Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik.

Erster Theil.

Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

Dr. Carl Spitz,
Professor am Polytechnikum in Carlsruhe.

Erster Theil:
Die allgemeine Arithmetik bis einschließlich zur Anwendung der Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung nebst 1450 Uebungsaufgaben enthaltend.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig und Heidelberg.
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1868.

Vorwort zur ersten Auflage.

Durch die günstige Aufnahme meiner Lehrbücher über Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie ermuthigt, übergebe ich hiermit der Oeffentlichkeit ein, mit diesen in Bezug auf Methode und Ausführlichkeit übereinstimmendes, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. Dasselbe erscheint in zwei Theilen, wovon jeder ein für sich abgeschlossenes Ganze bildet.

Der vorliegende erste Theil umfaßt die Rechnung mit allgemeinen Zahlzeichen, mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, die Lehre von den Gleichungen, die Reihen und Anwendung derselben auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Bei der Behandlung der vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlzeichen war ich bemüht, Klarheit in den Begriff der entgegengesetzten Zahlen und Schärfe in die sich daran reihenden Definitionen, Sätze und Beweise zu bringen. Die entgegengesetzten Zahlen, auf welche wir offenbar schon im Eingange zur Subtraction geführt werden, und die deshalb auch hier zur Sprache kommen müssen, wurden als Richtungszahlen aufgefaßt und so lange mit besonderen, von den Operationszeichen + und — verschiedenen, Zeichen markirt, als eine scharfe Trennung zwischen den Richtungs- und Operationszeichen nothwendig war, um jeden Irrthum und etwaige Mißverständnisse zu verhüten. Erst nachdem gezeigt worden ist, wie man die Operationszeichen ganz umgehen kann, wurden solche statt der Richtungszeichen eingeführt.

Diese Behandlungsweise der entgegengesetzten Zahlen und die durch ihre Einführung nöthig gewordene Verallgemeinerung der Definitionen von Addition und Subtraction machten es möglich, die Sätze über die Verbindung beider Operationen ganz allgemein zu beweisen. In den meisten Lehrbüchern werden diese Sätze entweder gar nicht bewiesen, oder doch nur auf sehr weitläufigem Wege und selbst dann nur unter beschränkten Voraussetzungen.

So finden wir u. A. fast in allen Lehrbüchern die Richtigkeit der Gleichung

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$$

an einer Stelle dargethan, wo der Schüler von negativen Zahlen noch gar keinen Begriff hat, da das Kapitel über entgegengesetzte Zahlen erst später folgt. Nun wird aber dennoch gewöhnlich schon in der Einleitung gesagt, daß die Buchstaben nur allgemeine Zahlzeichen seien, ja dem Schüler gerathen, bei der Addition und Subtraction statt der Buchstaben dekadische Zahlen einzuführen und die gewonnenen Resultate mit einander zu vergleichen. Wie nun, wenn dem Schüler hier einfiele, zu seiner Uebung in obiger Gleichung

$$a = 6, b = 3, c = 8$$

zu setzen? Obgleich derartige Beziehungen stillschweigend nur unter der beschränkten Voraussetzung nachgewiesen werden, daß bei allen vorkommenden Subtractionen der Minuend größer sei als der Subtrahend, so werden dieselben doch später, nach der Einführung der entgegengesetzten Zahlen, unmittelbar in Anwendung gebracht und als allgemein giltig angesehen. Der Nachweis dieser Giltigkeit ist zwar jetzt sehr leicht zu liefern, allein ganz außer Acht sollte er nicht gelassen werden. Aehnliche Fälle lassen sich noch mehr hier und in dem Kapitel über die Multiplication anführen. Allein ich glaube vorstehende Bemerkungen dürften genügen, um die in vorliegendem Lehrbuche gewählte Behandlungsweise zu rechtfertigen.

Der zweite Abschnitt enthält außer der Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Theilers, der Faktorenzerlegung und der Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von Zahlen, auch noch diejenigen Sätze über die Primzahlen, welche zum Verständnisse und zur strengen Beweisführung der nachfolgenden Sätze unbedingt nothwendig sind.

Da die Kettenbrüche mit den gewöhnlichen und Decimalbrüchen enge verbunden sind, und von ihnen sehr bald schon Anwendung gemacht werden kann, so hielt ich es für zweckmäßig, dieselben unmittelbar den Decimalbrüchen anzuschließen und in der Lehre von den Brüchen, welche den dritten Abschnitt bildet, mit aufzunehmen.

In dem fünften Abschnitte, welcher von den Wurzeln handelt, habe ich der graphischen Darstellung der compleren Zahlen und der imaginären Einheit etwas mehr Aufmerksamkeit geschenkt, als dies sonst in den Lehrbüchern über allgemeine Arithmetik zu geschehen pflegt. Die hier vorgetragene Entwickelung weicht in mancher Beziehung von der sonst üblichen ab, hat aber offenbar den Vorzug, daß sie den betreffenden Gegenstand viel allgemeiner auffassen lehrt und außerdem uns ein Mittel an die Hand gibt, auf ganz einfache Weise die allgemeine Giltigkeit der bekannten goniometrischen Relationen für $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ und $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ nachzuweisen und zu zeigen, daß dem Ausdrucke $\sqrt[n]{(a + bi)}$ immer n und nur n von einander verschiedene Werthe entsprechen.

Bei jeder der Grundoperationen wurde am Schlusse der Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die betreffende Rechnungsart erwähnt, wodurch eine Lücke ausgefüllt ist, welche man so manchem Lehrbuche über allgemeine Arithmetik zum Vorwurfe machen kann.

Die Anwendung der geometrischen Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung, welche der zehnte Abschnitt umfaßt, habe

ich etwas ausführlicher behandelt, als dies sonst zu geschehen pflegt. Es dürfte sich deshalb vorliegendes Lehrbuch besonders auch für Forstwirthe und Cameralisten eignen. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes wird im zweiten Theile folgen.

Sämmtliche in dem Buche vorkommende Sätze sind durch eine hinreichende Anzahl gelöster Beispiele näher erläutert und zum Verständnisse gebracht.

Um ein besonderes Aufgabenbuch entbehrlich zu machen, habe ich jedem Abschnitte eine reichhaltige Sammlung von zweckmäßig gewählten Aufgaben zur Uebung beigegeben. Die Anzahl der gelösten Beispiele beträgt nahezu 500, die der Uebungsaufgaben 1130.

Ein von dem Lehrbuche getrennt erschienener Anhang enthält die Resultate zu den Aufgaben und die etwa zur Auflösung derselben nöthigen Andeutungen. Dieser Anordnung wegen eignet sich das Buch besonders auch für den Gebrauch beim Selbststudium.

Möge auch dieser Arbeit eine eben so günstige Beurtheilung und Aufnahme zu Theil werden, wie meinen früher veröffentlichten Lehrbüchern.

Carlsruhe im August 1863.

C. Spitz.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Außer einigen Abänderungen und Verbesserungen, welche gegenwärtige Auflage erlitten hat, wurde dieselbe ganz besonders um mehr als 300 neue Uebungsaufgaben und durch die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades bereichert.

Diese bedeutende Erweiterung des Buches müßte aber nothwendig eine Erhöhung des Preises zur Folge gehabt haben, wenn sich nicht der Herr Verleger bereit erklärt hätte, diese zweite Auflage auf die doppelte Anzahl von Exemplaren zu erhöhen. Hierdurch ist es möglich geworden, den Preis des Buches sogar bedeutend unter den seitherigen zu stellen und somit zugleich die Anschaffung desselben wesentlich zu erleichtern.

Um diesem Lehrbuche auch bei einem weniger umfassenden Unterrichte Brauchbarkeit zu verleihen, habe ich, analog wie in den neuesten Auflagen meiner Lehrbücher über Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie, allen Paragraphen oder Sätzen, welche ohne Störung des Zusammenhanges übergangen werden können, das Zeichen ○ vorangesetzt.

Carlsruhe im Juni 1868.

C. Spitz.

Inhalt.

Seite

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Siebenter Abschnitt.

Seite

Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

Zehnter Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Grundbegriffe.

1) Kann von zwei Dingen das eine ganz, oder theilweise statt des anderen gesetzt werden, so nennt man dieselben gleichartig (homogen), andernfalls ungleichartig (heterogen).

2) Die Menge der zu einem Quantum verbundenen gleichartigen Theile bestimmt dessen Größe oder Quantität.

3) Da wir aber in der Folge die Dinge nur hinsichtlich ihrer Größe in Betracht ziehen, von der Beschaffenheit (Qualität) derselben also ganz absehen, so werden wir in dieser Beziehung die Dinge selbst Größen nennen.

4) Eine Größe wird durch Hinzufügen gleichartiger Theile vermehrt, durch Hinwegnehmen solcher vermindert.

5) Jeder Theil einer Größe ist selbst wieder eine Größe.

6) Kann von zwei gleichartigen Größen die eine statt der anderen gesetzt werden, so sagt man, beide Größen seien einander gleich; muß man aber die eine vermehren, um die andere zu erhalten, so werden sie ungleich genannt, und zwar heißt in diesem Falle die unverändert bleibende die größere, die zu vermehrende die kleinere Größe.

7) Um anzudeuten, daß zwei gleichartige Größen gleich, oder ungleich seien, setzt man zwischen beide bezüglich die Zeichen $=$ oder $>$ und gebraucht letzteres in der Weise, daß die Spitze des Winkels nach der kleineren Größe gerichtet ist. Bezeichnen z. B. A und B irgend zwei gleichartige Größen, so wird ausgedrückt:

durch A = B, daß A gleich B,

durch A > B und B < A, daß A größer als B oder B kleiner als A sei.

Durch $A \gtreqless B$ deutet man an, daß A sowohl größer, als auch gleich und kleiner als B sein kann.

8) Jede Darstellung der Beziehungen zwischen Größen in der Form

$$A = B$$

heißt eine Gleichung, und in der Form

$$A > B \text{ oder } B < A$$

eine Ungleichung. Die auf beiden Seiten bezüglich des Gleichheits-, oder Ungleichheitszeichens stehenden Theile werden die Seiten der betreffenden Darstellung genannt.

9) Wird zu einer Größe dieselbe Größe ein oder mehre Male hinzugefügt, so erhält man eine Größe, welche aus einer Vielheit gleichartiger Größen besteht und Anzahl heißt; die ursprüngliche Größe wird in Bezug auf diese Anzahl die Einheit genannt.

10) Untersuchen wir durch wie vielmalige Wiederholung der einer Anzahl zu Grunde liegenden Einheit die betreffende Vielheit erhalten wird, so gelangen wir zu dem Begriffe der Zahl.

11) Die Zahl in Verbindung mit der Einheit führt zu dem bestimmten Begriffe einer Größe.

Haben wir z. B. eine klare Vorstellung von der Ausdehnung eines Quadratfußes, so haben wir damit zugleich einen Begriff von der Ausdehnung einer Fläche, wenn dieselbe z. B. 8 Quadratfuß beträgt. Hier wäre also der Quadratfuß die Einheit und 8 die Zahl, welche ausdrückt, wie oft die Einheit zu wiederholen ist, um die Größe 8 Quadratfuß zu erhalten.

12) Jede Einheit kann wiederum in Bezug auf einen ihrer Theile als eine Vielheit angesehen werden.

So ist z. B. der Quadratfuß eine hundertmalige Wiederholung eines Quadratzolles und somit eine Vielheit, welcher der Quadratzoll als Einheit zu Grunde liegt.

Man unterscheidet darum zuweilen einfache und zusammengesetzte Einheiten derselben Art.

Z. B. Zoll, Fuß, Ruthe. — Loth, Pfund, Centner.

13) Es ist klar, daß die einer Größe zu Grunde liegende Einheit mit ihr stets gleichartig sein muß und daß bei Verbindung mehrer gleichartiger Größen mit einander stets vorausgesetzt wird, daß dieselben auf einerlei Einheit bezogen seien.

So müssen z. B. Flächen immer Flächeneinheiten, Kräften immer Krafteinheiten u. s. w. zu Grunde liegen.

14) Eine Zahl heißt benannt (concret), wenn sie eine Vielheit bestimmter (benannter) Einheiten bezeichnet, unbenannt oder rein (abstract) dagegen, wenn sie nur die Vielheit an sich ausdrückt.

So ist z. B. sechs Meter eine benannte, dagegen sechs eine unbenannte oder abstracte Zahl.

15) Je nachdem gleichen, oder ungleichen homogenen Größen einerlei Einheiten zu Grunde liegen, gelangt man bezüglich zu gleichen, oder übereinstimmend*) ungleichen Zahlen; umgekehrt entsprechen der Verbindung gleicher, oder ungleicher Zahlen mit einerlei Einheit, bezüglich gleiche, oder übereinstimmend ungleiche Größen.

Hiernach ist es uns möglich gemacht, die Untersuchung von Größen auf die der abstracten Zahlen zurückzuführen und von den Zahlen als Größen und somit auch von Theilen des abstracten „Eins" zu sprechen.

16) Größen, welche aus einer Menge gleichartiger, unter sich getrennter Einheiten bestehen, heißen unstetig (discret), solche dagegen, welche ein ununterbrochenes Ganze ausmachen, werden stetig (continuirlich) genannt.

Unstetige Größen sind z. B.: ein Haufen Aepfel, eine Heerde Schaafe und dergl., stetige dagegen: Zeit, Raum u. s. w.

17) Diejenige Wissenschaft, welche die verschiedenen Beziehungen der Größen zu einander, sowie deren Abhängigkeitsgesetze

---

*) Nehmen wir mit einer Ungleichung z. B. mit $A > B$ irgend eine Rechnungsoperation vor, und resultirt hieraus wiederum eine Ungleichung, so kann diese zweifacher Art sein. Entweder ist nämlich das hierdurch aus der größeren Größe A hervorgegangene Resultat wiederum das größere, oder es ist das kleinere. Wir werden diese Beziehung in der Folge kurzhin so ausdrücken, daß wir sagen, das Resultat sei mit der vorgelegten Ungleichung bezüglich übereinstimmend, oder nicht übereinstimmend ungleich.

und mittelst dieser, einzelne Größen aus anderen entwickeln lehrt, heißt im Allgemeinen **Größenlehre** oder **Mathematik**.

18) Die Mathematik zerfällt zunächst in zwei größere Gebiete, in die **reine** und **angewandte** Mathematik. Erstere beschäftigt sich mit der Untersuchung der Größen in Bezug auf Form und Ausdehnung, sowie auf Menge und Anordnung der Theile, ohne Rücksicht auf die Materien der Größen und deren Beziehungen auf irgend welche Erfahrungsgegenstände; letztere dagegen bringt die in der reinen Mathematik gewonnenen Resultate mit Erfahrungsgegenständen in Verbindung und wendet dieselben also auf wirkliche in der Natur vorkommende Fälle und Erscheinungen an.

19) Die **reine** Mathematik zerfällt in **Arithmetik** und **Geometrie**, je nachdem dieselbe die Betrachtung unstetiger, oder stetiger Größen zum Gegenstande hat.

20) Die Arithmetik umfaßt wieder die **gemeine** und die **allgemeine Arithmetik**. Erstere beschäftigt sich nur mit bestimmt gegebenen Zahlen, in letzterer dagegen gebraucht man, um die Resultate der Aufgaben und Untersuchungen nicht an eine specielle Form zu binden, statt der **Zahlen** allgemeine Zeichen. Da man hiefür **Buchstaben** wählte, so wird dieser Zweig der Arithmetik auch **Buchstabenrechnung** genannt. Verschiedene Zahlen werden hierbei in ein und derselben Rechnung auch durch verschiedene, gleiche Zahlen dagegen durch einerlei Buchstaben ersetzt.

Unter dem allgemeinen Zahlzeichen a hat man sich also a Wiederholungen der Zahleneinheit Eins, wie z. B. unter der Zahl 5 fünf solcher zu denken.

Franciscus Vieta (geb. 1540 zu Fontenoi in Poitou, gest. 1603 in Paris) führte um die Mitte des 16. Jahrhunderts zuerst statt der Zahlen Buchstaben ein. Anfänglich gebrauchte man die großen, später aber die von dem Engländer **Thomas Harriot** (geboren zu Oxford 1560) eingeführten kleinen lateinischen Buchstaben.

§. 2. Allgemeine Grundsätze*) der Mathematik.

1) **Jede Größe ist sich selbst, sowie allen Theilen, aus welchen sie besteht, zusammengenommen gleich.**

---

*) Ein **Grundsatz** ist eine Behauptung, deren Richtigkeit ohne Weiteres erkannt wird und somit nicht erst eines Nachweises bedarf. Zum Unterschiede

2) Wenn zwei Größen einzeln einer dritten Größe gleich sind, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist also $A = C$
und $B = C$
so ist auch $A = B$

3) Ist von zwei Größen die eine einer dritten Größe gleich, diese aber der anderen ungleich, so ist auch die erste der zweiten übereinstimmend ungleich.

Ist also $A = C$ — $A = C$
aber $C > B$ oder $C < B$
so ist auch $A > B$ oder $A < B$

4) Ist von zwei Größen die eine kleiner, die andere größer als eine und dieselbe dritte Größe, so ist die erste Größe kleiner als die zweite.

Ist also $A < C$,
aber $B > C$,
so ist $A < B$.

Man deutet dieses Verhältniß gewöhnlich dadurch an, daß man schreibt:

$$A < C < B$$

und sagt, die Größe C liege zwischen den beiden Größen A und B.

5) Vorstehende vier Grundsätze, welche in Bezug auf Größen im Allgemeinen ausgesprochen wurden, gelten nach Obigem auch insbesondere für abstracte Zahlen.

---

hiervon nennt man solche Behauptungen, deren Wahrheit erst durch andere, schon festgestellte Wahrheiten begründet werden muß, Lehrsätze oder kurzhin Sätze. Die Ableitung der Richtigkeit des in einem Satze Behaupteten heißt Beweis.

Ein vollständiger Beweis besteht:

α) aus der Voraussetzung oder dem Angenommenen;

β) aus der Behauptung oder Aussage;

γ) aus dem eigentlichen Beweise.

Wird durch einen Beweis die Richtigkeit der Aussage aus schon als wahr erkannten Sätzen, ohne Rücksicht auf das Gegentheil der Aussage, im Zusammenhange dargethan, so heißt der Beweis ein directer; wird aber gezeigt, daß das Gegentheil des Behaupteten mit dem Angenommenen oder mit anderen schon als richtig erkannten Sätzen im Widerspruche steht, und daß also die aufgestellte Aussage die richtige sein muß, so ist der Beweis ein indirecter oder apagogischer.

Erster Abschnitt.

Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlzeichen.

A. Von der Addition.

§. 3. Erklärung.

Eine Zahl a zu einer Zahl b addiren heißt, eine dritte Zahl suchen, welche so viel Einheiten enthält, als a und b zusammen.

Die beiden zu addirenden Zahlen werden die Summanden, Posten genannt, und die zu bestimmende Zahl heißt die Summe von jenen.

Das Geschäft der Addition wird durch das Additionszeichen + (plus) angedeutet, welches man zwischen die Summanden setzt. Die Summe der zwei Zahlen a und b ist hiernach $a + b$ und wird gelesen: a plus b.

§. 4. Zusätze*).

1) Addirt man zu zwei gleichen Zahlen eine und dieselbe Zahl, so erhält man gleiche Summen.

2) Von zwei ungleichen Zahlen kann man stets die größere als eine Summe aus der kleineren und einer dritten Zahl ansehen. Ist z. B. $a > b$, so kann man stets setzen

$$a = b + z,$$

---

*) Unter Zusatz versteht man eine Behauptung, deren Richtigkeit unmittelbar aus dem zunächst Vorhergehenden gefolgert werden kann.

wo z eine Zahl bedeutet, die so viel Einheiten enthält, als zu b Einheiten noch hinzukommen müssen, um a Einheiten zu erhalten.

§. 5. Verbindung mehrer Zahlen durch Addition.

1) Soll zur Summe $a + b$ noch eine dritte Zahl c addirt werden, so setzt man, um anzudeuten, daß jene Summe als ein Ganzes angesehen werden soll, dieselbe zwischen Klammern und erhält somit $(a + b) + c$ als neue Summe.

Es leuchtet jedoch unmittelbar ein, daß es ganz einerlei ist, in welcher Reihenfolge der Summanden man die Addition vornimmt, da in allen Fällen eine gleichvielmalige Wiederholung der Zahleneinheit ausgedrückt wird. Hiernach ist also:

$(a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + a$ u. s. w.

Dieser Satz gilt natürlich für jede Anzahl von Summanden. Soll darum nicht ausdrücklich die Aufeinanderfolge der Summenbildung angedeutet werden, so kann man auch die Klammern weglassen und schreiben:

$a + b + c$ oder $a + c + b$ oder $b + c + a$ u. s. w.

2) Um anzudeuten, daß eine und dieselbe Zahl wiederholt als Summand steht, setzt man dieser Zahl eine andere, welche die Anzahl der Posten angibt, unmittelbar voran und schreibt also z. B.

$4a$ statt der Summe $a + a + a + a$

oder allgemein:

na statt der Summe $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots + \overset{n}{a}$ *)

Die dem gleichen Summanden vorgesetzte Zahl heißt alsdann der Coefficient desselben.

So ist also 4 in dem ersten der vorstehenden Beispiele, und n im zweiten der Coefficient von a.

Steht bei einer Zahl kein bestimmter Coefficient, so hat man sich dafür stets die Einheit gesetzt zu denken.

---

*) Die über den einzelnen Posten stehenden Zahlen geben die Wiederholungszahlen des Summanden an. Wir werden von dieser Bezeichnungsweise in der Folge häufig Gebrauch machen.

3) Sind zwei oder mehre gleichnamige, mit Coefficienten versehene Zahlzeichen zu addiren, so schreibt man nach 2) die Summe, wenn man dem unveränderten Zahlzeichen die Summe der Coefficienten vorsetzt.

Beispiele.

1) $3a + 6a + 5a + 7a = 21a$.
2) $2x + 4x + 3x + 8x + x = 18x$.

4) Hat man zwei oder mehre Summen, in welchen gleichnamige Zahlzeichen vorkommen, zu addiren, so schreibt man am besten dieselben zuerst so untereinander, daß die gleichnamigen Buchstaben unter einander zu stehen kommen, und addirt hierauf.

Beispiel.

Um die Summe von
$(3a + 2b + 4c) + (7a + 5b + 3c) + (8a + 2b + 5c)$
zu finden, schreibe man:

$$\begin{array}{rl} & 3a + 2b + 4c \\ & 7a + 5b + 3c \\ & 8a + 2b + 5c, \text{ so folgt als} \\ \hline \text{Summe:} & 18a + 9b + 12c. \end{array}$$

§. 6. Aufgaben zur Uebung.

1) $2a + 3a + 5a + 6a + 14a = ?$
2) $7a + 6b + 4a + 2c + 5b + 8a + 3c = ?$
2a) $(7a + 5b + 6c + 8d) + (10a + b + 3c + 5d) = ?$
3) $(3m + 8n + 4p) + (2m + n + 7p) + (m + 5n + 8p) = ?$
4) $(5a + 8x + 4y) + (7a + 3b + 8y) + (5x + 2y) + (6c + 4y) + (8a + 4x + 3y) + (b + 7c) = ?$
5) $(3x + y + 2z + 4v) + (2x + 3y + z + 5v) + (6x + 2y + 3z + v) + (x + 2z + 3v) + (2x + y + 3v) = ?$

B. Von der Subtraction.

§. 7. Erklärung.

Von einer Zahl a, eine andere Zahl b subtrahiren heißt, eine dritte Zahl suchen, welche zur Zahl b addirt als Summe die Zahl a gibt.

Die Zahl a, von welcher subtrahirt wird, heißt Minuend, die Zahl b, welche subtrahirt wird, Subtrahend, und die gefundene dritte Zahl Differenz, Unterschied oder auch Rest.

Das Geschäft der Subtraction wird durch das Subtractionszeichen — (minus) angedeutet, welches man unmittelbar vor den Subtrahenden setzt.

Obige Differenz wird hiernach ausgedrückt durch $a - b$ und gelesen: „ a minus b“.

§. 8. Zusätze.

1) Subtrahirt man von zwei gleichen Zahlen eine und dieselbe dritte Zahl, so erhält man gleiche Differenzen.

2) Von zwei ungleichen Zahlen a und b, wo $a < b$ sei, kann man die kleinere a als die Differenz aus der größeren b und einer dritten Zahl z ansehen, die so viel Einheiten enthält, als zu a Einheiten noch hinzugefügt werden müssen, um b Einheiten zu erhalten; so daß man also hat:

$$a = b - z.$$

3) Bezeichnen wir die Differenz $a - b$ durch d, setzen also

$$a - b = d,$$

so muß nach obiger Definition

$$b + d = a \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha$$

und hiernach $$a - d = b \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta$$

sein.

Um daher eine vollzogene Subtraction zu prüfen, gibt es folgende zwei Wege:

α) Man addire die gefundene Differenz zum Subtrahenden, so muß der Minuend als Summe erscheinen, oder

β) Man subtrahire die Differenz von dem Minuenden, so muß der Subtrahend als Differenz erhalten werden,

wenn das Subtractionsresultat richtig sein soll.

4) Durch vorstehende Prüfungsmittel erkennt man unmittelbar die Richtigkeit folgender Sätze:

α) Subtrahirt man von der Summe zweier Zahlen den einen Posten, so erhält man als Differenz den anderen.

β) Addirt man zur Differenz zweier Zahlen den Subtrahenden, so erhält man als Summe den Minuenden.

Beispiele.

α) $(a + b) - b = a$ und $(a + b) - a = b$.
β) $(a - b) + b = a$.

Anmerkung. In dem Satze α ist zugleich ein Prüfungsmittel für die Addition enthalten.

5) Fassen wir die beiden letzten Sätze zusammen, so ergibt sich hieraus unmittelbar der Satz:

Der Werth einer Zahl wird durch gleichzeitige Addition und Subtraction einer anderen Zahl nicht geändert, gleichviel, in welcher Aufeinanderfolge diese Operationen vorgenommen werden.

C. Von den entgegengesetzten Zahlen.

§. 9. Erklärung.

1) Die in §. 7 aufgestellte Definition der Subtraction zweier Zahlen hat offenbar bis dahin nur unter der Voraussetzung eine Bedeutung, daß der Minuend größer als der Subtrahend sei. Die Aufgabe einer Subtraction, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend, führt uns auf die Festsetzung des Begriffes der entgegengesetzten Zahlen.

Um diesen Gegenstand klar zu machen, wollen wir zunächst untersuchen, was man unter entgegengesetzten Größen zu verstehen habe, und alsdann die gewonnenen Resultate auf abstracte Zahlen übertragen.

Fig. 1.



2) Ist AM (Fig. 1) irgend ein Strahl, A dessen Anfangspunkt, und ist z. B. AB = a Fuß und BC = b Fuß, so ist

offenbar die Summe von a Fuß und b Fuß ausgedrückt durch die Strecke AC, welche von einem Punkte durchlaufen wird, der sich von A aus stets in derselben Richtung gegen M hin zuerst von A um AB = a Fuß und dann um BC = b Fuß entfernt hat.

3) Um in ähnlicher Weise die Aufgabe der Subtraction zweier Größen, z. B. die Differenz a Fuß weniger b Fuß darzustellen, haben wir 3 Fälle zu unterscheiden. Es kann nämlich sein:

α) a > b, β) a = b, γ) a < b.

Ist α) a > b und z. B. AC = a Fuß, BC = b Fuß, so ist obige Differenz dargestellt durch die Strecke AB d. h. durch die Entfernung eines Punktes von A, der zuerst in der Richtung AM von A aus die Strecke AC = a Fuß, und dann in entgegengesetzter Richtung die Strecke CB = b Fuß durchlaufen hat.

Ist β) a = b, so hat sich offenbar der Punkt am Ende seiner Bewegung von A gar nicht entfernt. Wir nennen in diesem Falle das Resultat seiner Bewegung eine Nullgröße, und bezeichnen hiernach den Ausgangspunkt A als Nullpunkt.

Ist γ) a < b, und z. B. AB = a Fuß, BB' = b Fuß, so wird in analoger Weise wie vorhin, das Resultat der Subtraction durch die Strecke AB' dargestellt, welche die Entfernung eines Punktes ausdrückt, der sich zuerst von A gegen M hin um AB = a Fuß entfernt und dann in entgegengesetzter Richtung, also gegen M' hin über den Nullpunkt A hinaus bis B' bewegt hat.

4) Aus Vorstehendem geht hervor, daß wir, um jede beliebige Subtraction zweier Größen in der angegebenen Weise als Resultat der Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen festen Ausgangspunkt A darstellen zu können, zwei, von diesem Anfangs- oder Nullpunkt ausgehende, einander entgegengesetzte, bezüglich der Addition und Subtraction entsprechende, Bewegungsrichtungen unterscheiden müssen. Um diese Richtungen zu kennzeichnen, nennt man die der Addition entsprechende die positive, die der Subtraction entsprechende die negative und bezeichnet die erstere durch das Zeichen ⟶, die letztere durch ⟵; die Grenze zwischen beiden wird durch das Nullzeichen 0 kenntlich gemacht.

5) Je nach der Richtung, in welcher die Größen genommen werden, unterscheidet man hiernach *positive* und *negative Größen*; und in Bezug hierauf werden beide auch mit dem gemeinschaftlichen Namen *entgegengesetzte Größen* belegt.

6) Uebertragen wir die eben gemachten Bemerkungen auf die abstracten Zahlen, so gelangen wir zu dem Schlusse, daß wir auch hier diesen Gegensatz festhalten und sonach in der allgemeinen Zahlenreihe zwei einander *entgegengesetzte Halbzahlenreihen* unterscheiden müssen, welche nach beiden Seiten hin ohne Ende fortgesetzt werden können. Die Zahl, welche beiden gemeinschaftlich ist, oder die gemeinschaftliche Ausgangsstelle heißt die *Null* und wird durch das Zeichen 0 angedeutet. Die eine der Halbzahlenreihen heißt, analog dem Früheren, die *positive*, die andere die *negative* Zahlenreihe, die sie bildenden Zahlen aber werden bezüglich *positive* und *negative Zahlen* genannt und ebenfalls durch die angeführten Zeichen $\rightarrow$ und $\leftarrow$ näher bezeichnet.

7) Da die Zeichen $\rightarrow$ und $\leftarrow$ gleichsam die Richtung des Zählens angeben, d. h. näher bezeichnen, ob um die entsprechende Zahl in der Zahlenreihe aufwärts (additiv), oder abwärts (subtractiv) fortgezählt werden soll, so hat man ihnen den Namen *Richtungszeichen* gegeben und zum Unterschiede von diesen die Zeichen $+$ und $-$, durch welche die Rechnungsoperationen angedeutet werden, die man mit den Zahlen vornehmen soll, zwischen welchen sie stehen, *Operationszeichen* genannt.

8) Zahlen, welche mit Richtungszeichen versehen sind, heißen *algebraische Zahlen* oder auch *Richtungszahlen*, zum Unterschiede von den früher betrachteten, welche *absolute Zahlen* genannt werden.

9) Berücksichtigen wir, daß nach der Bildungsweise der allgemeinen Zahlenreihe, von zwei algebraischen Zahlen *diejenige* die *größere* ist, zu welcher man von der anderen aus im Sinne der *positiven* Zahlenreihe gelangt, so ist klar, daß eine *negative* Zahl einen um so *größeren*, oder *kleineren* Werth hat, je nachdem sie *absolut* genommen *kleiner*, oder *größer* erscheint.

So ist z. B. $(\leftarrow 4) > (\leftarrow 9)$, $(\leftarrow 12) < (\leftarrow 5)$.

10) Steht vor einer Zahl **kein** bestimmtes Richtungszeichen, so ist dieselbe stets als *positiv* anzusehen.

11) Nach diesen erklärenden Bemerkungen ergibt sich nun unmittelbar die Bedeutung der Subtractionsaufgabe a — b, wenn a und b absolute Zahlen sind, für den Fall, daß a = b, oder a < b sei. Wir haben nämlich zu setzen:

a — b = 0, wenn a = b,

und a — b = ⟵ (b — a), wenn a < b.

Beispiele.

1) 5 — 5 = 0.

2) 6 — 9 = ⟵ (9 — 6) = ⟵ 3.

12) In der Folge werden wir aber alle in den verschiedenen Rechnungsoperationen vorkommenden Zahlen als *algebraische Zahlen* auffassen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, und aus diesem Grunde auch in Zukunft unter dem Ausdrucke „*Zahl*" stets eine *algebraische Zahl* verstehen Die früher in §. 3 und §. 7 angeführten Definitionen über Addition und Subtraction beziehen sich jedoch nur auf absolute Zahlen und für letztere Operation sogar nur unter gewissen Voraussetzungen auf solche. Es ist somit nothwendig, daß wir diese Begriffsbestimmungen nun erweitern und auch auf die algebraischen Zahlen überhaupt ausdehnen.

§. 10. Erklärung.

Addiren heißt, in der allgemeinen Zahlenreihe von Null aus in der Ordnung und im Sinne der aufeinanderfolgenden Summanden um die diesen jeweils entsprechenden Einheiten fortschreiten.

So drückt z. B.

(⟶ a) + (⟵ b) + (⟵ c) + (⟶ d)

aus, daß man von Null aus in der allgemeinen Zahlenreihe zuerst nach der positiven Seite hin a Einheiten, von hier aus b Einheiten gegen die negative Seite hin, dann von hier aus weiter c Einheiten gegen die negative Seite und endlich von da aus d Einheiten gegen die positive Seite hin zu zählen habe.

Beispiele.

1) (⟶ 8) + (⟵ 5) + (⟶ 7) + (⟵ 14) = ⟵ 4.

2) (⟵ 7) + (⟶ 12) + (⟶ 8) + (⟵ 5) + (⟶ 2) = ⟶ 10.

§. 11. Zusätze.

1) Werden gleiche Zahlen zu gleichen Zahlen addirt, so erhält man gleiche Summen.

2) Zwei gleiche entgegengesetzte Zahlen

$$\left(\begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{smallmatrix}\ a\right) \text{ und } \left(\begin{smallmatrix}\longleftarrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix}\ a\right)$$

addiren heißt, von der Null aus zuerst a Einsen in dem, dem ersten Summanden entsprechenden Sinne, und hierauf wieder um ebenso viel in entgegengesetztem Sinne oder zurück zur Null zählen.

Man sagt darum kurzhin: die Summe zweier gleichen entgegengesetzten Zahlen ist Null.

Umgekehrt folgt hieraus der Satz:

Ist die Summe zweier Zahlen, welche von Null verschieden sind, gleich Null, so sind dieselben einander gleich und entgegengesetzt.

Beispiele.

1) $(\longrightarrow 7) + (\longleftarrow 7) = (\longleftarrow 7) + (\longrightarrow 7) = 0.$

2) $(\longleftarrow 5) + (\longrightarrow 5) = (\longrightarrow 5) + (\longleftarrow 5) = 0.$

3) Der Werth einer Zahl wird nicht geändert, wenn man sie zu Null, oder Null zu ihr addirt. Denn durch die Null wird ausgedrückt, daß von der dem Werthe der betreffenden Zahl entsprechenden Stelle in der Zahlenreihe aus kein Weiterzählen mehr stattfinden soll.

Beispiele.

1) $0 + (\longleftarrow a) = \longleftarrow a$

2) $(\longrightarrow b) + 0 = \longrightarrow b.$

3) $0 + 0 = 0.$

4) In einer Summe von algebraischen Zahlen kann man stets mehre derselben in vorgeschriebener Aufeinanderfolge zu einem Summanden zusammenfassen und so Gruppen von Summanden bilden, welche zusammen die ursprüngliche Summe ausmachen, und umgekehrt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition §. 10.

Ist z. B.

$$[a] + [b] + [c] + [d] + [e] + [f] + [g] + [h] + [k]$$

die vorgelegte Summe, wo durch die Klammern angedeutet werden soll, daß den Zahlen a, b, c, d .... k beliebige Richtungszeichen zukommen, so können wir zusammenfassen:

$[a] + [b] + [c]$ zur Summe $[x]$
$[d] + [e]$ „ „ $[y]$
$[f] + [g] + [h] + [k]$ „ „ $[z]$

und setzen:

$$[a] + [b] + [c] + [d] + [e] + [f] + [g] + [h] + [k] = [x] + [y] + [z].$$

§. 12. Allgemeiner Satz.

Bei der Addition algebraischer Zahlen kann die Reihenfolge der Summanden willkürlich gewählt werden.

Beweis. Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß derselbe für zwei und drei Summanden Giltigkeit hat.

Deuten wir zu diesem Ende wieder durch das Symbol $[z]$ an, daß die absolute Zahl z mit einem beliebigen Richtungszeichen versehen sei, so ist für zwei Summanden zu zeigen, daß jederzeit

$$[a] + [b] = [b] + [a].$$

Hier sind aber zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder haben nämlich beide Summanden einerlei Richtungszeichen, oder diese sind verschieden.

Für den ersten Fall geht die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus der Definition hervor, da sowohl $[a] + [b]$ als auch $[b] + [a]$ ein Zählen um gleichviel Einsen in dem nämlichen Sinne ausdrückt.

Um den Satz für den zweiten Fall zu beweisen, wollen wir annehmen, es sei a positiv und b negativ, ferner

$$\alpha) \; a > b \text{ z. B. } a = b + c = c + b$$

also $(\longrightarrow a) = (\longrightarrow c) + (\longrightarrow b)$;

so ist

$$(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = (\longrightarrow c) + (\longrightarrow b) + (\longleftarrow b)$$
$$= (\longrightarrow c) + 0 = \longrightarrow c$$

und auch $(\longleftarrow b) + (\longrightarrow a) = (\longleftarrow b) + (\longrightarrow b) + (\longrightarrow c)$
$$= 0 + (\longrightarrow c) = \longrightarrow c$$

folglich $(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = (\longleftarrow b) + (\longrightarrow a)$.

Für β) $a <$ z. B. $b = a + c = c + a$
wird
$$(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = (\longrightarrow a) + (\longleftarrow a) + (\longleftarrow c) = \longleftarrow c$$
und
$$(\longleftarrow b) + (\longrightarrow a) = (\longleftarrow c) + (\longleftarrow a) + (\longrightarrow a) = \longleftarrow c$$
folglich wiederum
$$(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = (\longleftarrow b) + (\longrightarrow a).$$

Nehmen wir an, es sei a negativ und b positiv, so ergibt sich die Richtigkeit unmittelbar aus Vorstehendem durch Umkehrung.

Durch wiederholte Anwendung des vorstehenden Satzes auf zwei Summanden schließen wir nun unmittelbar auf die Richtigkeit desselben für drei Summanden. Denn man erhält sofort:
$[a] + [b] + [c] = [a] + [c] + [b] = [c] + [a] + [b] = [b] + [a] + [c] = [b] + [c] + [a] = [c] + [b] + [a]$.

Um nun endlich die allgemeine Giltigkeit obiger Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, dieselbe sei für n Summanden richtig und zeigen, daß sie alsdann auch für n + 1 Summanden giltig ist.

Jene n Summanden seien [a], [b], [c] . . . [l], so kann der noch hinzukommende Summand [m] im Ganzen (n + 1) verschiedene Stellen in der Summe einnehmen.

Daß [m] an die erste, oder letzte Stelle gesetzt werden darf, folgt aus dem für zwei Summanden Bewiesenen, wenn man sich die Summe der n anderen Summanden in einen Summanden zusammengefaßt denkt. Es bleibt uns somit nur noch zu zeigen, daß [m] auch jede beliebige Stelle zwischen den n schon gegebenen Summanden einnehmen darf. Zu diesem Ende denken wir uns alle dem Summanden [m] vorangehenden, sowie auch alle ihm nachstehenden Summanden zu Gruppen vereinigt und bezüglich zu den Summanden [x] und [y] zusammengefaßt, wodurch alsdann die Gesammtsumme der (n + 1) Summanden zurückgeführt wird auf die Summe [x] + [m] + [y].

Nun ist aber nach Obigem
$[x] + [m] + [y] = [m] + [x] + [y] = [x] + [y] + [m]$, woraus wir folgern, daß der (n + 1) te Summand [m] auch jede beliebige Stelle zwischen den früheren n Summanden einnehmen darf. Ist also unsere Behauptung für n Summanden

richtig, so gilt sie auch für (n + 1). Nun haben wir aber die Richtigkeit derselben für 2 und 3 Summanden nachgewiesen, folglich gilt der Satz auch für 3 + 1 oder 4 und somit wieder für 4 + 1 oder 5 u. s. w., d. h. für jede beliebige Anzahl von Summanden.

Anmerkung. Diese Art der Beweisführung ist unter dem Namen „der Schluß von n auf n + 1" bekannt.

§. 13. Zusätze.

Aus obiger allgemeinen Auffassung der Additionsaufgabe ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1) Mehre Zahlen mit gleichen Richtungszeichen in eine Summe verwandeln heißt, der Summe der absoluten Zahlen das gemeinschaftliche Richtungszeichen vorsetzen.

Anmerkung. Man umgibt zu diesem Ende die Summe der absoluten Zahlen mit einer Klammer.

Beispiele.

1) $(\longrightarrow a) + (\longrightarrow b) + (\longrightarrow c) = \longrightarrow (a + b + c)$
2) $(\longleftarrow x) + (\longleftarrow y) + (\longleftarrow z) = \longleftarrow (x + y + z)$
3) $(\longrightarrow 4) + (\longrightarrow 7) + (\longrightarrow 3) = \longrightarrow (4 + 7 + 3) = \longrightarrow 14.$
4) $(\longleftarrow 7) + (\longleftarrow 3) + (\longleftarrow 4) + (\longleftarrow 1) = \longleftarrow (7 + 3 + 4 + 1) = \longleftarrow 15.$

2) Zwei entgegengesetzte Zahlen werden addirt, wenn man beide Zahlen absolut nimmt, die kleinere von der größeren subtrahirt und die Differenz mit dem Richtungszeichen der als Minuend angenommenen Zahl versieht.

So ist z. B.

$(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = \longrightarrow (a - b)$ oder $= \longleftarrow (b - a)$

je nachdem $a \gtrless b$.

Denn ist $a > b$, z. B. $a = b + c = c + b$, also $c = a - b$, so wird

$(\longrightarrow a) + (\longleftarrow b) = (\longrightarrow c) + (\longrightarrow b) + (\longleftarrow b) = \longrightarrow c = \longrightarrow (a - b)$

und für $a < b$, z. B. $b = a + c$ oder $c = b - a$ folgt

$$(\rightarrow a) + (\leftarrow b) = (\rightarrow a) + (\leftarrow a) + (\leftarrow c) = \leftarrow c = \leftarrow (b - a).$$

Beispiele.

1) $(\rightarrow 8) + (\leftarrow 3) = \rightarrow (8 - 3) = \rightarrow 5$
2) $(\rightarrow 8) + (\leftarrow 12) = \leftarrow (12 - 8) = \leftarrow 4$
3) $(\leftarrow 5) + (\rightarrow 7) = \rightarrow (7 - 5) = \rightarrow 2$

§. 14. Erklärung.

Eine algebraische Zahl subtrahiren heißt, dieselbe mit entgegengesetztem Richtungszeichen addiren.

Hiernach ist also

$$[a] - (\rightarrow b) = [a] + (\leftarrow b)$$
$$[a] - (\leftarrow b) = [a] + (\rightarrow b)$$

oder wenn wir der Kürze halber in der Folge allgemein durch $[\underline{z}]$ die der Zahl $[z]$ entgegengesetzte Zahl andeuten:

$$[a] - [b] = [a] + [\underline{b}].$$

Anmerkung. Daß vorstehende Definition mit der in §. 7, 1 gegebenen völlig übereinstimmt, ergibt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, daß man dem Satze α in §. 8, 3 entsprechend, nach §. 11, 2 und 3 erhält

$$[a] + [\underline{b}] + [b] = [a] + 0 = [a].$$

Beispiele.

1) $(\rightarrow 8) - (\rightarrow 5) = (\rightarrow 8) + (\leftarrow 5) = \rightarrow (8 - 5) = \rightarrow 3$
2) $(\rightarrow 7) - (\leftarrow 3) = (\rightarrow 7) + (\rightarrow 3) = \rightarrow (7 + 3) = \rightarrow 10$
3) $(\leftarrow 9) - (\leftarrow 14) = (\leftarrow 9) + (\rightarrow 14) = \rightarrow (14 - 9) = \rightarrow 5$
4) $(\leftarrow 6) - (\rightarrow 2) = (\leftarrow 6) + (\leftarrow 2) = \leftarrow (6 + 2) = \leftarrow 8$
5) $(\rightarrow 4) - (\rightarrow 9) = (\rightarrow 4) + (\leftarrow 9) = \leftarrow (9 - 4) = \leftarrow 5$

§. 15. Zusatz.

Eine algebraische Zahl addiren heißt auch dieselbe aber entgegengesetzt genommene Zahl subtrahiren. Z. B.:

$$[a] + [b] = [a] - [\underline{b}]$$

§. 16. Erklärungen.

1) Verbindet man mehre algebraische Zahlen theils additiv, theils subtractiv miteinander, so erhält man einen zusammengesetzten Ausdruck, ein Aggregat oder ein Polynom von Zahlen, welche selbst die Glieder des Aggregats heißen und einfache Ausdrücke oder Monomien sind.

Je nachdem ein Aggregat aus zwei, drei ꝛc. Gliedern besteht, heißt dasselbe auch bezüglich ein Binom, Trinom ꝛc.

So ist z. B.

$$[a] + [b] - [c] + [d] - [e]$$

ein fünfgliedriges Aggregat und drückt aus, daß man zuerst zur Zahl [a] die Zahl [b] addiren, von der erhaltenen Summe die Zahl [c] subtrahiren, zu dieser Differenz wieder [d] addiren und schließlich von der neuen Summe noch [e] subtrahiren soll.

2) Um anzudeuten, daß einzelne Glieder eines Aggregats als zusammengehörig oder als ein Ganzes aufgefaßt werden sollen, bedient man sich außer den schon oben angeführten Klammern () auch noch der Parenthesen von der Form [] oder {} u. s. w.

So wird z. B. durch

$$\Big\{[a] + \Big[[b] - [c]\Big]\Big\} - \Big[[d] - [c]\Big]$$

angezeigt, daß man zur Zahl [a] die Differenz der Zahlen [b] und [c] addiren und von der erhaltenen Summe die Differenz der Zahlen [d] und [e] subtrahiren soll.

Anmerkung. Der Gebrauch der Parenthesen ist von der größten Wichtigkeit; eine falsche Anwendung derselben legt in der Regel der vorgelegten Aufgabe einen ganz anderen Sinn bei und bewirkt dadurch ein unrichtiges Resultat.

§. 17. Zusätze.

1) Aus der Definition für die Addition und Subtraction der algebraischen Zahlen geht unmittelbar hervor, daß sich jedes Aggregat in Form einer Summe schreiben läßt.

So ist z. B.

$$[a] - [b] - [c] + [d] = [a] + [{}^{b}] + [\underline{c}] + [d].$$

Man nennt aus diesem Grunde ein Aggregat auch die algebraische Summe der betreffenden Glieder.

2) Die Summe mehrer Summenaggregate ist gleich der Summe sämmtlicher Glieder dieser Aggregate.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus §. 10 und §. 11, 4.

So ist z. B.

$$\{[a] + [b] + [c]\} + \{[d] + [f]\} = [a] + [b] + [c] + [d] + [f].$$

Kommen unter den einzelnen Gliedern gleichnamige vor, so kann man dieselben nach §. 11, 4 zusammenfassen.

Beispiel.

$$\left[5a + (\longleftarrow 3b) + (\longrightarrow 2c)\right] + \left[3a + (\longrightarrow 8b) + (\longleftarrow 7c)\right] =$$

$$\left[5a + (\longrightarrow 3a)\right] + \left[(\longleftarrow 3b) + (\longrightarrow 8b)\right] + \left[(\longrightarrow 2c) + (\longleftarrow 7c)\right]$$

$$= 8a + (\longrightarrow 5b) + (\longleftarrow 5c).$$

Am bequemsten schreibt man in diesem Falle die gleichnamigen Glieder vertical unter einander und addirt hierauf, z. B.

$$\left[7a + (\longrightarrow 5b) + (\longleftarrow 8c)\right] + \left[6a + (\longrightarrow 7b) + (\longrightarrow 2c)\right] +$$

$$\left[(\longleftarrow 4a) + (\longleftarrow 9b) + (\longrightarrow 12c)\right] =$$

$$\begin{array}{lrcrcr} & 7a & + & (\longrightarrow 5b) & + & (\longleftarrow 8c) \\ & 6a & + & (\longrightarrow 7b) & + & (\longrightarrow 2c) \\ & (\longleftarrow 4a) & + & (\longleftarrow 9b) & + & (\longrightarrow 12c) \\ \hline \text{Summe} = & 9a & + & (\longrightarrow 3b) & + & (\longrightarrow 6c). \end{array}$$

3) **Vertauscht man bei einer Subtraction Minuend und Subtrahend mit einander, so verwandelt sich dadurch die Differenz in die entgegengesetzte.**

Vorauss. Ist $[a] - [b] = [d]$

Behaupt. so ist $[b] - [a] = [\underline{d}]$

Beweis. Da $[a] - [b] = [a] + [\underline{b}]$
und $[b] - [a] = [b] + [\underline{a}]$ } (§. 14)

so folgt durch Addition

$$\{[a] - [b]\} + \{[b] - [a]\} = \{[a] + [\underline{b}]\} + \{[b] + [\underline{a}]\}$$

$$= [a] + [\underline{a}] + [b] + [\underline{b}]$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad (\S.\ 11.)$$

Somit muß nach §. 11, Zusatz 2,

wenn $[a] - [b] = [d]$

ist, auch $[b] - [a] = [\underline{d}]$

sein.

Beispiele.

1) $(\leftarrow 7) - (\rightarrow 5) = (\leftarrow 7) + (\leftarrow 5) = \leftarrow 12.$

2) $(\rightarrow 5) - (\leftarrow 7) = (\rightarrow 5) + (\rightarrow 7) = \rightarrow 12.$

4) **Werden sämmtliche Glieder eines Aggregats in die entgegengesetzten verwandelt, so geht dadurch der Werth des Aggregats ebenfalls in den entgegengesetzten über.**

Vorauss. Ist $[a] - [b] + [c] - [d] = [z]$

Behaupt. so wird $[\underline{a}] - [\underline{b}] + [\underline{c}] - [\underline{d}] = [\underline{z}]$

Beweis. Nach §. 17, 1 ist

$$[a] - [b] + [c] - [d] = [a] + [\underline{b}] + [c] + [\underline{d}]$$

und $[\underline{a}] - [\underline{b}] + [\underline{c}] - [\underline{d}] = [\underline{a}] + [b] + [\underline{c}] + [d]$

Durch Addition folgt hieraus

$$\left\{[a] - [b] + [c] - [d]\right\} + \left\{[\underline{a}] - [\underline{b}] + [\underline{c}] - [\underline{d}]\right\} =$$

$$\left\{[a] + [\underline{b}] + [c] + [\underline{d}]\right\} + \left\{[\underline{a}] + [b] + [\underline{c}] + [d]\right\} =$$

$$\left\{[a] + [\underline{a}]\right\} + \left\{[\underline{b}] + [b]\right\} + \left\{[c] + [\underline{c}]\right\} + \left\{[\underline{d}] + [d]\right\} =$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Somit ist nach §. 11, Zusatz 2:

$$[\underline{a}] - [\underline{b}] + [\underline{c}] - [\underline{d}] = [\underline{z}]$$

wenn $[a] - [b] + [c] - [d] = [z].$

5) **Ein Aggregat subtrahiren heißt hiernach nichts Anderes, als dasselbe mit entgegengesetzten Gliedern addiren.**

Beispiele.

1) $\left\{[a] - [b] + [c]\right\} - \left\{[d] - [f] - [g]\right\} =$

$\left\{[a] - [b] + [c]\right\} + \left\{[\underline{d}] - [\underline{f}] - [\underline{g}]\right\}$

2) $\left\{3a - (\rightarrow 2b) - (\leftarrow 8c)\right\} - \left\{(\leftarrow 7a -\right.$

$\left.(\rightarrow 4b) + (\rightarrow 5c) - (\leftarrow 3d)\right\} =$

$\left\{3a - (\rightarrow 2b) - (\leftarrow 8c)\right\} + \left\{7a - (\leftarrow 4b) +\right.$

$\left.(\leftarrow 5c) - (\rightarrow 3d)\right\} =$

$$\begin{array}{l} 3a + (\leftarrow 2b) + (\rightarrow 8c) \\ 7a + (\rightarrow 4b) + (\leftarrow 5c) + (\leftarrow 3d) \\ \hline 10a + (\rightarrow 2b) + (\rightarrow 3c) + (\leftarrow 3d) \end{array}$$

Es ist nun auch leicht mehre, theils additiv, theils subtractiv mit einander verbundene Aggregate in eine algebraische Summe zu verwandeln. Z. B.

$$\left\{(\leftarrow 3a) - (\rightarrow 7b + (\leftarrow 2c)\right\} - \left\{7a + (\rightarrow 8b) - (\rightarrow 5c)\right\}$$

$$- \left\{7b - (\leftarrow 4c)\right\} + \left\{6a - (\rightarrow 8c)\right\} =$$

$$\left\{(\leftarrow 3a) - (\rightarrow 4b) + (\leftarrow 2c)\right\} + \left\{(\leftarrow 7a) + (\leftarrow 8b) - (\leftarrow 5c)\right\}$$

$$+ \left\{(\leftarrow 7b) - (\rightarrow 4c)\right\} + \left\{6a - (\rightarrow 8c)\right\} =$$

$$\begin{array}{lrcrcr} & (\leftarrow 3a) & + & (\leftarrow 4b) & + & (\leftarrow 2c) \\ & (\leftarrow 7a) & + & (\leftarrow 8b) & + & (\rightarrow 5c) \\ & & & (\leftarrow 7b) & + & (\leftarrow 4c) \\ & (\rightarrow 6a) & & & + & (\leftarrow 8c) \\ \hline \text{Summe:} & (\leftarrow 4a) & + & (\leftarrow 19b) & + & (\leftarrow 9c) \end{array}$$

6) **Der Werth einer Zahl bleibt unverändert, wenn man Null von ihr subtrahirt.**

Beweis. Nach §. 11, Zusatz 2 ist

$$[a] - 0 = [a] - \left\{[a] + [\underline{a}]\right\}$$

$$= [a] + \left\{[\underline{a}] + [a]\right\}$$

$$= [a] + [\underline{a}] + [a]$$

$$= 0 + [a] = [a].$$

7) Bezeichnen a und b zwei absolute Zahlen und ist $a < b$, so können wir setzen:

$$a - b = \leftarrow (b - a) \quad (§.\ 9.\ 11.)$$

Nehmen wir in dieser Gleichung $a = 0$ an, so geht dieselbe über in

$$0 - b = \leftarrow (b - 0) = \leftarrow b.$$

Man kann somit eine negative Zahl b als den Ausdruck für eine b malige Subtraction der absoluten Einheit von der Null ansehen und umgekehrt, wie sich solches auch schon unmittelbar aus der früheren Darstellung der negativen Zahlen ergibt.

8) Da der linken Seite der Gleichung

$$0 - b = \leftarrow b$$

aber auch noch dann ein bestimmter Werth entsprechen wird, wenn b eine algebraische Zahl, oder eine algebraische Summe bezeichnet, so entnehmen wir derselben folgende Erklärung:

Eine algebraische Zahl, oder eine algebraische Summe von der Null subtrahiren heißt, diese Ausdrücke negativ nehmen, und umgekehrt.

9) Aus 5, 8 und §. 14 fließt unmittelbar der Satz:

Eine algebraische Zahl, oder eine algebraische Summe negativ nehmen heißt, die Richtungszeichen der einzelnen Glieder in die entgegengesetzten verwandeln.

Z. B. $\leftarrow [a] = 0 - [a] = [\underline{a}]$

$$\leftarrow (\leftarrow 4) = 0 - (\leftarrow 4) = 0 + (\rightarrow 4) = \rightarrow 4.$$

$$\leftarrow \{[a] - [b] - [c]\} = 0 - \{[a] - [b] - [c]\}$$
$$= 0 + \{[\underline{a}] - [\underline{b}] - [\underline{c}]\}$$
$$= [\underline{a}] - [\underline{b}] - [\underline{c}].$$

Anmerkung. Negativ und entgegengesetzt nehmen sich hiernach gleichbedeutende Ausdrücke. Der Werth eines Aggregats wird also nicht geändert, wenn man sämmtliche Glieder in die entgegengesetzten verwandelt und das neue Aggregat negativ nimmt.

So ist z. B.

$$[a] - [b] + [c] - [d] = \leftarrow \{[\underline{a}] - [\underline{b}] + [\underline{c}] - [\underline{d}]\}$$

10) Jedes Aggregat läßt sich als Differenz zweier Aggregate darstellen.

Denn man hat z. B.

$$[a] - [b] - [c] + [d] = \{[a] - [b]\} + \{[\underline{c}] + [d]\} \quad \text{(§. 41, 1 und §. 11, 4.)}$$
$$= \{[a] - [b]\} - \{[c] + [\underline{d}]\} \quad \text{(§. 17, 5.)}$$

§. 18. Erklärung.

Nach Vorhergehendem läßt sich jedes aus einfachen, oder zusammengesetzten Gliedern gebildete Aggregat in Form einer Summe darstellen.

So ist z. B.

$$(\rightarrow a) - (\rightarrow b) + (\leftarrow c) - (\leftarrow d) =$$
$$(\rightarrow a) + (\leftarrow b) + (\leftarrow c) + (\rightarrow d).$$

Hiernach lassen sich also stets die in einem Aggregate subtractiv auftretenden Glieder in additive verwandeln, d. i. die Subtractionszeichen in demselben durchweg beseitigen. Weil nun aber die einzelnen Glieder der Summe nur noch durch Additions-

zeichen miteinander verbunden sind, so kann man diese behufs kürzerer Schreibweise und ohne das Verständniß der Aufgaben zu beeinträchtigen, auch ganz außer Acht lassen und die Summanden mit ihren entsprechenden Richtungszeichen unmittelbar neben einander schreiben.

Die obige Summe wäre hiernach ausgedrückt durch

$$\rightarrow a \leftarrow b \leftarrow c \rightarrow d$$

und umgekehrt steht

$$\leftarrow x \rightarrow y \leftarrow z \rightarrow u \leftarrow v$$

anstatt

$$(\leftarrow x) + (\rightarrow y) + (\leftarrow z) + (\rightarrow u) + (\leftarrow v).$$

Berücksichtigt man nun, daß unseren Betrachtungen in der Folge stets nur algebraische Zahlen zu Grunde liegen, indem nach Vorhergehendem mit jeder absoluten oder in Betreff des Richtungszeichens unbestimmt gelassenen Zahl wie mit einer positiven zu operiren ist, und man nach dem eben Mitgetheilten die beiden Operationszeichen gänzlich aus den verschiedenen Rechnungsoperationen entfernen kann, so steht es uns frei, diesen von jetzt an eine ganz andere Bedeutung beizulegen. Aus diesem Grunde, und weil diese Zeichen überhaupt schon aus der gemeinen Arithmetik zu sehr in Uebung sind, sich dieselben auch, wenn sie etwa als Operationszeichen gebraucht werden, leicht von den Richtungszeichen unterscheiden lassen, werden wir von da an das positive Richtungszeichen $\rightarrow$ durch $+$ und das negative Richtungszeichen $\leftarrow$ durch $-$ ersetzen.

Wenn in Nachfolgendem von einer oder mehren Zahlen kurzhin die Rede, denselben also kein besonderes Richtungszeichen beigegeben ist, so hat man sich solches stets als p o s i t i v zu denken.

Hiernach ist also

1) $a + b + c = \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c = (\rightarrow a) + (\rightarrow b) + (\rightarrow c)$

2) $a - b = \rightarrow a \leftarrow b = (\rightarrow a) + (\leftarrow b)$

3) $a - (b + c) = \rightarrow a \leftarrow (\rightarrow b \rightarrow c) =$

$$\rightarrow a + \left\{\leftarrow \Big((\rightarrow b) + (\rightarrow c)\Big)\right\}$$

4) $(a - b) - (c - d) = (\rightarrow a \leftarrow b) \leftarrow (\rightarrow c \leftarrow d) =$

$$\left\{(\rightarrow a) + (\leftarrow b)\right\} + \left\{\leftarrow \left((\rightarrow c) + (\leftarrow d)\right)\right\}.$$

5) $-12 - 5 = (\leftarrow 12) + (\leftarrow 5) = \leftarrow 17 = -17$

6) $8a - 5a - 12a = (\rightarrow 8a) + (\leftarrow 5a) + (\leftarrow 12a) = \leftarrow 9a = -9a.$

Beispiele.

1) $3a + 5a - 2a = 8a - 2a = 6a$

2) $7x - 12x = -5x$

3) $7a - 3b + 2a - 7b = 9a - 10b$

4) $(9a - 6b + 3c) - (4a - 9b + 8c)$
$= 9a - 6b + 3c - 4a + 9b - 8c$ (§. 17, 5.)
$= 5a + 3b - 5c$

5) $(7a - 5b + 8c - 6d) + (8a - 7b + 6f) + (5a - 6c - 8f + 4g) + (7b + 8c + 5d) =$

	$7a$	$-5b$	$+8c$	$-6d$		
	$8a$	$-7b$			$+6f$	
	$5a$		$-6c$		$-8f$	$+4g$
		$7b$	$+8c$	$+5d$		
Summe $=$	$20a$	$-5b$	$+10c$	$-d$	$-2f$	$+4g.$

Anmerkung. In den meisten Lehrbüchern über allgemeine Arithmetik müht man sich ab Gleichungen, wie z. B.

$$(a + b) - c = a + (b - c) = b + (a - c)$$
$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$$
$$(a - b) - c = a - (b + c) = (a - c) - b$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$$
$$(a - b) + (c \quad d) = (a + c) - (b + d)$$
$$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$$

u. s. w.

unter ganz beschränkten Voraussetzungen zu beweisen und wendet solche alsdann als allgemein giltig auf nachfolgende Untersuchungen an.

Die Richtigkeit solcher Beziehungen ergibt sich aber aus unserer Darstellungsweise der entgegengesetzten Zahlen und §. 12 unmittelbar und zwar ganz allgemein.

§. 19. Aufgaben zur Uebung.

1) $8a - 3a = ?$

1a) $5b - 3b + 2b = ?$

1b) $6c - 9c = ?$

1c) $-4d - 5d = ?$

2) $7x - 4x + 8x - 2x = ?$

3) $3m - 4n - 2m + 7n - 8m + 6n = ?$

4) $(a + b - c) + (a - b - c) = ?$
5) $(2a - 4b + 3c) + (5a + 3b - 8c) = ?$
6) $(5a + 2b - c) + (4a - 2b + d) = ?$
7) $(3a + 2b - 4c) + (6a - 8b + 5c) + (4b - 8c) = ?$
7a) $(5x - 2y + 3z - 6v) + (3x - 7z + 2v) + (8y - 4z + 10v) + (x - 6y) + (7y - 8z - 6v) = ?$
7b) $(8a - 5b) - (3a + 2b) = ?$
8) $(a + b - c) - (a - b - c) = ?$
9) $(7a - 8b + 4c) - (5a - 9b + 3c) = ?$
10) $(12a + 8b - 9c) - (4a + 8b - 4d - 2f) = ?$
11) $\big((6a - 8b) + (4a - 2b)\big) - (5a + 3b - 4c) = ?$
12) $\big((5a + 7b) - (8a - 6b)\big) - \big((7a - 8b) - (5a - 2b)\big) = ?$
13) $\big((7a + 8b - 3c) + (4a - 2b - 5c)\big) - \big((7a - 8b - 9c) - (5a + 8b - 3c)\big) = ?$
14) $\big((7a + 3m - 8 + 10q) - (5a + 8m - 12 - 3q)\big) + \big((-8a - 2m + 3 - 11q) - (4m + 5 + 6v)\big) = ?$
14a) $(15a - 3b - 7c + 9d) - (4a - 8b + 6c + 3d) - (8a + 9b - 3c + 6d) - (2a - 3b + c + 4d) + (6a - 5b + 2c + 9d) - (4a + 8b + 3c - 2d) = ?$

§. 20. Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch Addition und Subtraction.

1) Werden zwei ungleiche Zahlen um eine und dieselbe Zahl vermehrt, oder vermindert, so erhält man übereinstimmend ungleiche Zahlen.

Vorauss. Es sei $[a] \gtrless [b]$ und $[c] = [c]$

Behaupt. so ist $[a] \pm [c] \gtrless [b] \pm [c]$

Beweis. Setzen wir bezüglich

$$[a] = [b] \pm z,$$

so folgt:

$$[a] \pm [c] = \big([b] \pm z\big) \pm [c]$$
$$= \big([b] \pm [c]\big) \pm z$$

also ist

$$[a] \pm [c] \gtrless [b] \pm [c]$$

indem für das positive Zeichen noch z zu [b] + [c] addirt werden muß, um [a] + [c] zu erhalten, für das negative aber z von [b] — [c] zu subtrahiren ist, wenn [a] — [c] resultiren soll.

2) Werden zwei ungleiche Zahlen von einer und derselben dritten Zahl subtrahirt, so erhält man mit jenen nicht übereinstimmend ungleiche Zahlen.

Vorauss. Es sei $[a] \gtrless [b]$ und $[c] = [c]$,

Behaupt. so ist $[c] - [a] \lessgtr [c] - [b]$

Beweis. Setzen wir beziehungsweise

$$[a] = [b] \pm z,$$

so folgt:

$$[c] - [a] = [c] - \big([b] \pm [z]\big)$$
$$= \big([c] - [b]\big) \mp z \text{ (§. 17, 5.)}$$

also ist

$$[c] - [a] \lessgtr [c] - [b]$$

je nachdem $[a] \gtrless [b]$ ist; denn im ersten Falle muß noch z subtrahirt, im anderen aber z addirt werden, wenn [c] — [a] erhalten werden soll.

3) Werden zu zwei ungleichen Zahlen zwei damit übereinstimmend ungleiche Zahlen addirt, so erhält man übereinstimmend ungleiche Summen.

Vorauss. Es sei $[a] \gtrless [b]$

und $[c] \gtrless [d]$

Behaupt. so ist $[a] + [c] \gtrless [b] + [d]$

Beweis. Setzen wir beziehungsweise

$$[a] = [b] \pm z$$
$$[c] = [d] \pm z'$$

so folgt:

$$[a] + [c] = \big([b] \pm z\big) + \big([d] \pm z'\big)$$
$$= \big([b] + [d]\big) \pm (z + z') \quad (\text{§. } 12,\ 1)$$

also ist

$$[a] + [c] \gtrless [b] + [d]$$

4) **Werden von zwei ungleichen Zahlen zwei damit nicht übereinstimmend ungleiche Zahlen subtrahirt, so erhält man mit der ersten Ungleichung übereinstimmend ungleiche Differenzen.**

Voraussf. Es sei $[a] \gtrless [b]$

und $[c] \lessgtr [d]$

Behaupt. so ist $[a] - [c] \gtrless [b] - [d]$

Beweis. Setzen wir wieder

$$[a] = [b] \pm z$$
$$[c] = [d] \mp z'$$

so folgt:

$$[a] - [c] = \big([b] \pm z\big) - \big([d] \mp z'\big)$$
$$= \big([b] - [d]\big) + (\pm z \pm z')$$
$$= \big([b] - [d]\big) \pm (z + z')$$

also ist

$$[a] - [c] \gtrless [b] - [d]$$

5) **Werden zu zwei ungleichen Zahlen zwei damit nicht übereinstimmend ungleiche Zahlen addirt, so bleibt das Resultat im Allgemeinen unbestimmt.**

Voraussf. Es sei $[a] \gtrless [b]$

$[c] \lessgtr [d]$

Behaupt. so ist $[a] + [c] \gtreqless [b] + [d]$

Beweis. Setzen wir

$$[a] = [b] \pm z$$
$$[c] = [d] \mp z'$$

so folgt:

$$[a] + [c] = \big([b] - [d]\big) \pm (z - z')$$

und je nachdem nun $z' \gtreqless z$ ist, wird für die erste Ungleichung

$$[a] + [c] \lesseqgtr [b] + [d]$$

und für die zweite

$$[a] + [c] \gtreqless [b] + [d]$$

D. Von der Multiplication.

§. 21. Erklärungen.

1) Eine Zahl [a] mit einer anderen Zahl [b] multipliciren heißt, eine Zahl suchen, welche aus der Zahl [a] auf dieselbe Weise hervorgeht, wie die Zahl [b] aus der positiven Einheit.

Die Zahl [a], welche multiplicirt werden soll, heißt der Multiplicand, die Zahl [b], mit welcher man multiplicirt, der Multiplicator, und das Resultat der Multiplication das Produkt.

Um das Geschäft der Multiplication anzudeuten, setzt man zwischen die beiden mit einander zu multiplicirenden Zahlen einen Punkt als Multiplicationszeichen. Für obige Multiplication erhält man hiernach [a] . [b] und liest dieses: „[a] multiplicirt mit [b]."

2) Für den Fall, daß [a] und [b] positive Zahlen bezeichnen, erhalten wir, da

$$+ b = + \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \overset{4}{1} + \ldots + \overset{b}{1},$$

für das Produkt

$$(+ a) . (+ b) = + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \overset{4}{a} + \ldots + \overset{b}{a}$$

und wir können darum sagen:

Eine positive Zahl a mit einer anderen positiven Zahl b multipliciren heißt, eine Zahl bestimmen, welche als Summe erscheint, wenn man bmal die Zahl (+ a) als Summand setzt.

Umgekehrt folgt hieraus, daß die Summe

$$+ \overset{1}{\breve{a}} + \overset{2}{\breve{a}} + \overset{3}{\breve{a}} + \overset{4}{\breve{a}} + \ldots + \overset{b}{\breve{a}}$$

gleichbedeutend ist mit dem Produkte (+ a) . (+ b) oder, wie man in diesem Falle kürzer zu schreiben pflegt, mit a . b.

§. 22. Zusätze.

1) Werden zwei gleiche Zahlen mit ein und derselben Zahl multiplicirt, so erhält man gleiche Produkte.

2) Jede Zahl mit der positiven Einheit multiplicirt gibt die Zahl selbst als Produkt.

§. 23. Sätze über die Multiplication algebraischer Zahlen.

1) Das Produkt zweier positiven Zahlen ist positiv.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus §. 21, 2.

Beispiele.

1) $(+ a) . (+ b) = + (a . b).$
2) $(+ 3) . (+ 7) = + (3 . 7) = + 21.$

2) Ist der Multiplicator positiv, der Multiplicand aber negativ, so ist das Produkt negativ.

Behauptung. $(- a) . (+ b) = - (a . b).$

Beweis. Da

$$+ b = + \overset{1}{\breve{1}} + \overset{2}{\breve{1}} + \overset{3}{\breve{1}} + \overset{4}{\breve{1}} + \ldots + \overset{b}{\breve{1}}$$

so ist nach §. 21, 1

$$(-a) . (+b) = (-\overset{1}{\breve{a}}) + (-\overset{2}{\breve{a}}) + (-\overset{3}{\breve{a}}) + (-\overset{4}{\breve{a}}) + \ldots + (-\overset{b}{\breve{a}})$$

$$= - (+ \overset{1}{\breve{a}} + \overset{2}{\breve{a}} + \overset{3}{\breve{a}} + \overset{4}{\breve{a}} + \ldots + \overset{b}{\breve{a}})$$

$$= - \big((+ a) . (+ b)\big) = - (a . b)$$

Beispiel.

$(- 5) . (+ 8) = - (5 . 8) = - 40.$

3) **Ist der Multiplicator negativ, der Multiplicand aber positiv, so ist das Produkt negativ.**

Behaupt. $(+ a) \cdot (- b) = - (a \cdot b)$.

Beweis. Es ist

$$-b = 0 - (+b) = 0 - (+ \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \overset{4}{1} \ldots + \overset{b}{1}),$$

also nach §. 21, 1

$$(+ a) \cdot (- b) = 0 - (+ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \overset{4}{a} \ldots + \overset{b}{a})$$
$$= 0 - \big((+a) \cdot (+b)\big) = - (a \cdot b).$$

Beispiel.

$$(+ 7) \cdot (- 4) = - (7 \cdot 4) = - 28.$$

4) **Das Produkt zweier negativen Zahlen ist positiv.**

Behaupt. $(- a) \cdot (- b) = + (a \cdot b)$.

Beweis. Da wieder

$$-b = 0 - (+b) = 0 - (+ \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \overset{4}{1} + \ldots + \overset{b}{1})$$

so folgt nach §. 21, 1

$$(-a) \cdot (-b) = 0 - \Big((- \overset{1}{a}) + (- \overset{2}{a}) (- \overset{3}{a}) + \ldots + (- \overset{b}{a})\Big)$$
$$= 0 - \big((-a) \cdot (+b)\big) = 0 - \big(- (a \cdot b)\big)$$
$$= 0 + (a \cdot b) = + (a \cdot b).$$

Beispiel.

$$(- 6) \cdot (- 5) = + (6 \cdot 5) = + 30.$$

Schreiben wir nochmals die Resultate für die vier angeführten Fälle zusammen, so erhalten wir die Gleichungen:

1) $(+ a) \cdot (+ b) = + (a \cdot b)$
2) $(- a) \cdot (+ b) = - (a \cdot b)$
3) $(+ a) \cdot (- b) = - (a \cdot b)$
4) $(- a) \cdot (- b) = + (a \cdot b)$

und folgern hieraus den allgemeinen Satz:

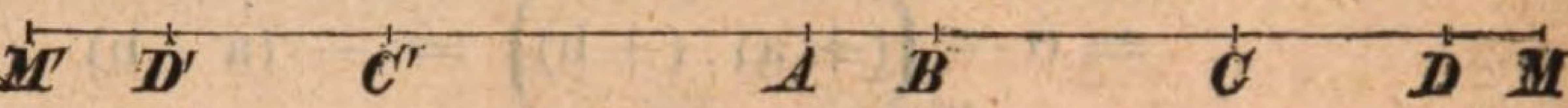
Das Produkt zweier Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem die Richtungszeichen derselben bezüglich gleichnamig oder ungleichnamig sind.

Anmerkung 1. Gewöhnlich läßt man die Klammern weg, und setzt das betreffende Zeichen unmittelbar dem Produkte der absoluten Zahlen voran, wobei das positive Zeichen ganz außer Acht gelassen wird.

Z. B. $(+3) \cdot (+5) = 15$; $(-4) \cdot (+6) = -24$; $(+7) \cdot (-2) = -14$; $(-5) \cdot (-7) = 35$.

Anmerkung 2. Analog wie wir früher die Resultate der Addition und Subtraction von Größen durch graphische Darstellung ausgedrückt haben, lassen sich auch die vorstehenden Produkte construirend versinnlichen, wenn wir den Multiplicanden als eine Größe, etwa als eine Strecke auffassen.

Fig. 2.



Es sei zu diesem Ende M'M (Fig. 2) irgend eine Gerade, welche durch den Punkt A in zwei Halbstrahlen, den positiven AM und den negativen AM' getheilt wird. Ist nun AB die Einheit jener Größe (Strecke), so wird der positive Multiplicand $(+a)$ erhalten, wenn man die Einheit AB von A aus a mal gegen die positive Seite hin, der negative $(-a)$ dagegen, wenn man AB von A aus a mal gegen die negative Seite hin neben einander trägt. Berücksichtigen wir nun, daß aus der positiven Einheit der positive Multiplicator $(+b)$ erhalten wird, wenn man dieselbe b mal als Summand setzt, der negative dagegen, wenn man die hierdurch erzielte Summe negativ nimmt, und daß ferner das Negativnehmen einer Strecke gleichbedeutend ist mit einer Umdrehung derselben um den Anfangspunkt um einen Winkel von $\pm 180^0$; so wird, wenn AC = AC' den absoluten Werth des Multiplicanden a und AD = AD' den des Produkts $a \cdot b$ darstellt, nach §. 21, 1 erhalten:

1) $(+a) \cdot (+b)$, wenn man AC = $+a$ von A aus b mal gegen die positive Seite hin nach AD,
2) $(-a) \cdot (+b)$, wenn man AC' = $-a$ von A aus b mal gegen die negative Seite hin nach AD' auf der Geraden neben einander trägt;

dagegen

3) $(+a) \cdot (-b)$, wenn man AC = $+a$ von A aus b mal gegen die positive Seite hin nach AD,
4) $(-a) \cdot (-b)$, wenn man AC' = $-a$ von A aus b mal gegen die negative Seite hin

auf der Geraden neben einander trägt und die dadurch erhaltenen Strecken AD und AD' in beiden Fällen um einen Winkel von $\pm 180^0$ dreht, also bezüglich in die Lagen AD' und AD bringt.

Hiernach wird also dargestellt:

1) $(+a) \cdot (+b)$ durch AD $= +(a \cdot b)$
2) $(-a) \cdot (+b)$ durch AD' $= -(a \cdot b)$
3) $(+a) \cdot (-b)$ durch AD' $= -(a \cdot b)$
4) $(-a) \cdot (-b)$ durch AD $= +(a \cdot b)$.

§. 24. Zusatz.

Jede negative Zahl kann als ein Produkt angesehen werden, das erhalten wird, wenn man dieselbe aber positive Zahl mit der negativen Einheit multiplicirt.

Beispiel.

$$-a = (+a) . (-1).$$

§. 25. Vertauschung des Multiplicanden und Multiplicators.

Vertauscht man Multiplicand und Multiplicator mit einander, so wird dadurch das Produkt nicht geändert.

Beweis. Nach dem im §. 23 Mitgetheilten haben wir die Richtigkeit des vorstehenden Satzes nur für zwei positive Zahlen darzuthun und z. B. zu zeigen, daß a . b = b . a ist.

Nach §. 21, 2 ist nun aber

$$a \,.\, b = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots\ldots \overset{b}{a}$$

$$\overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{a}{1})}^{1} + \overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{a}{1})}^{2} +$$

$$\overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{a}{1})}^{1} + \ldots\ldots + \overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{a}{1})}^{b}$$

oder, wenn man sich die Ausdrücke in den Klammern vertikal unter einander geschrieben und die Vertikalreihen successive addirt denkt

$$a \,.\, b = \overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{b}{1})}^{1} + \overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{b}{1})}^{2} +$$

$$\overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{b}{1})}^{3} + \ldots + \overbrace{(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{b}{1})}^{a}$$

$$= \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} + \ldots + \overset{a}{b}$$

$$= b \,.\, a.$$

Anmerkungen. 1) Vergleichen wir das Gesagte mit §. 5, 2, so ergibt sich, daß der Multiplicator mit der dort als Coefficient bezeichneten Zahl gleichbedeutend ist. Wir werden aus diesem Grunde auch das Wort „Coefficient" in der Folge in ausgedehnterem Sinne gebrauchen und darunter überhaupt einen Ausdruck begreifen, der mit einem anderen durch Multiplication verbunden ist.

2) Aus Vorstehendem geht unmittelbar hervor, daß der Multiplicator stets eine unbenannte Zahl sein muß.

§. 26. Erklärung.

Soll ein *Produkt* zweier Zahlen nochmals mit einer *dritten* Zahl multiplicirt werden, so umgibt man jenes Produkt mit Klammern und schreibt den Multiplicator unmittelbar nach der rechtsstehenden Klammer.

§. 27. Allgemeiner Satz.

Bei der Bildung des Produktes aus drei Zahlen hat die Ordnung der Aufeinanderfolge der Operationen auf das Resultat keinen Einfluß.

Beweis. Bezeichnen a, b, c die drei Zahlen, so ist das Produkt, welches aus der Multiplication derselben hervorgeht, *positiv*, wenn nur *eine* oder *sämmtliche* Zahlen positiv sind, *negativ* dagegen, wenn nur *eine* oder *sämmtliche* Zahlen negativ sind, die Ordnung in Bezug auf die Aufeinanderfolge mag gewählt werden, wie man will. Wir können deshalb, ohne der Allgemeinheit zu schaden, die drei Zahlen a, b und c als *positiv* voraussetzen.

Nun ist aber nach §. 25

$$(a \,.\, b) \,.\, c = (b \,.\, a) \,.\, c = c \,.\, (a \,.\, b) = c \,.\, (b \,.\, a)$$

und wir haben somit nur noch zu zeigen, daß auch das Produkt, welches durch die Multiplication einer der beiden Zahlen a und b mit dem Produkte der anderen dieser Zahlen und c erhalten wird, jedem der vier vorstehenden Produkte gleich sei.

Um z. B. zu beweisen, daß

$$(a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c)\, b$$

setzen wir nach §. 21, 2

$$(a.b).c = (a \overset{1}{.} b) + (a \overset{2}{.} b) + (a \overset{3}{.} b) + \ldots\ldots + (a \overset{c}{.} b)$$

$$= \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{b}{a})}^{1} + \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{b}{a})}^{2} +$$

$$\overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{b}{a})}^{3} + \ldots + \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{b}{a})}^{c}$$

und denken uns nun die Klammerausdrücke unter einander geschrieben und die Vertikalreihen summirt; so folgt:

$$(a.b).c = \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{c}{a})}^{1} + \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{c}{a})}^{2} +$$

$$\overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{c}{a})}^{3} + \ldots + \overbrace{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{c}{a})}^{b}$$

$$= \overset{1}{a\,.\,c} + \overset{2}{a\,.\,c} + \overset{3}{a\,.\,c} + \ldots + \overset{b}{a\,.\,c}$$

$$= (a\,.\,c)\,.\,b.$$

Hieraus fließt nun unmittelbar

$$(a\,.\,b)\,.\,c = (b\,.\,a)\,.\,c = (b\,.\,c)\,.\,a.$$

In Bezug auf das Produkt dreier Zahlen ist es also ganz einerlei, mit welcher von denselben man das Produkt der zwei anderen multiplicirt. Darum kann man auch die Klammern weglassen und kurzhin schreiben:

$$a\,.\,b\,.\,c = a\,.\,c\,.\,b = b\,.\,a\,.\,c = b\,.\,c\,.\,a = c\,.\,a\,.\,b = c\,.\,b\,.\,a.$$

§. 28. Zusätze und Erklärungen.

1) Durch den Schluß von n auf $n + 1$ läßt sich ganz analog wie in §. 12 beweisen, daß bei der Multiplication einer beliebigen Anzahl von Zahlen mit einander die Aufeinanderfolge derselben auf das Resultat ohne Einfluß ist.

Aus diesem Grunde belegt man auch sämmtliche mit einander durch Multiplication verbundene Zahlen oder Ausdrücke mit dem gemeinschaftlichen Namen *Faktoren*.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß auch in Betreff der Richtungszeichen die Ordnung der Aufeinanderfolge willkürlich ist. Denn das Richtungszeichen eines Produktes wird durch wiederholte Multiplicationen mit einer positiven Zahl nicht geändert und es hängt somit jenes lediglich nur von der Anzahl der *negativen* Faktoren ab. Sind diese in *gerader* Anzahl vorhanden, so wird das Produkt stets *positiv*, im *anderen Falle* dagegen *negativ*.

2) Beim Anschreiben mehrer monomischen Faktoren wählt man immer die alphabetische Ordnung und setzt, wenn unter denselben auch *bestimmte* Zahlen auftreten, das Produkt dieser dem Produkte der allgemeinen Zahlen voran. Ferner läßt man,

um noch mehr Kürze in die Schreibweise zu bringen, das Multiplicationszeichen in allen Fällen, wo kein Irrthum entstehen kann, außer Acht.

Man schreibe also z. B. nicht 3 . a . 2 . b . g . f . c . d, sondern kurzweg 6abcdfg.

3) Tritt ein und dieselbe Zahl mehrmals als Faktor auf, so gibt man, — behufs noch kürzerer Schreibweise —, dieselbe nur einmal an und fügt ihr rechts oben eine Zahl bei, welche anzeigt, wie vielmal sie als Faktor zu nehmen sei.

Hiernach wäre z. B.

$5 . 5 = 5^2$; $10 . 10 . 10 = 10^3$; $aaaa = a^4$; $6aabbbc = 6a^2b^3c$;

oder allgemein:

$$\overset{1}{a}\,\overset{2}{a}\,\overset{3}{a}\,\overset{4}{a}\,.\,.\,.\,.\,.\,\overset{n}{a} = a^n$$

wofür zu lesen ist: „a hoch n".

Anmerkung. Das Produkt einer Zahl mit sich nennt man gewöhnlich das Quadrat dieser Zahl. So ist z. B. $aa = a^2$ das Quadrat von a.

Beispiele:

1) $3a . 2b = 6ab$.
2) $5ab . -4ac = -20aabc = -20a^2bc$.
3) $2ax . -3axy . -5ay = 30aaaxxyy = 30a^3x^2y^2$.
4) $-3mn . -2mnp . -4mnpp = -24mmmmnnppp = -24m^4n^2p^3$.

§. 29. Erklärung.

Um anzudeuten, daß das Produkt aus einem Aggregat und einem Monom gebildet werden soll, setzt man jenes in Klammern und schreibt unmittelbar vor die vordere, oder nach der hinteren Klammer das Monom. Ist dieses positiv, so kann man das Multiplicationszeichen außer Acht lassen. Soll z. B. $a - b + c$ mit n multiplicirt werden, so schreibt man:

$$n(a - b + c) \text{ oder } (a - b + c)n.$$

Analog wird das Produkt mehrer Aggregate dadurch ausgedrückt, daß man jedes derselben in Klammern setzt und sie unmittelbar neben einander schreibt, z. B.

$(a + b - c)(d - f)$; $(a - b)(d + f - g)(h - k)$.

§. 30. Sätze über die Multiplication von Aggregaten mit Monomien und mit Aggregaten.

1) Um ein Aggregat mit einer Zahl zu multipliciren, multiplicire man jeden Posten des Aggregates mit dieser Zahl.

Behaupt. $(a - b + c) \, n = an - bn + cn$.

Beweis. Nach §. 21 ist

$$(a - b + c)n = (a - \overset{1}{b} + c) + (a - \overset{2}{b} + c) + \ldots + (a - \overset{n}{b} + c)$$

$$= (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{n}{a}) - (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots + \overset{n}{b}) + (\overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \ldots + \overset{n}{c})$$

$$= an - bn + cn.$$

Dieser Satz gilt natürlich auch für den Fall, daß n negativ ist. Denn man kann setzen:

$$(a - b + c) \,.\, -n = - \left\{(a - b + c) \,.\, n\right\}$$

$$= - \left\{an - bn + cn\right\}$$

$$= - an + bn - cn \; [\text{§. } 17. \; 9)]$$

$$= (a \,.\, -n) - (b \,.\, -n) + (c \,.\, -n).$$

Zusatz.

Eine algebraische Summe mit -1 multicipliren heißt, dieselbe negativ nehmen oder die Zeichen ihrer sämmtlichen Glieder in die entgegengesetzten verwandeln.

Beispiele.

1) $(3a - 4b)\, 5c = 15ac - 20bc$.

2) $(2m - 4n + 3p - 5q) \,.\, -4v = -8mv + 16nv - 12pv + 20qv$.

3) $(2ab - 4bc + 3ac)\, 5abc = 10a^2b^2c - 20ab^2c^2 + 15a^2bc^2$.

2) Das Produkt zweier Aggregate wird gefunden, wenn man jedes Glied des einen Aggregates mit jedem Gliede des anderen multplicirt und aus den erhaltenen Theilprodukten ein neues Aggregat bildet.

Behaupt. $(a + b - c)\,(d - f) = ad - af + bd - bf - cd + cf$.

Beweis. Setzen wir zunächst

$$d - f = m$$

so folgt:

$$(a + b - c)\, m = am + bm - cm$$

und wenn wir nun wieder den Werth $d - f$ für m einführen so erhalten wir

$$(a + b - c)(d - f) = a(d - f) + b(d - f) - c(d - f)$$
$$= ad - af + bd - bf - cd + cf.$$

Anmerkung. Kommen unter den Partialprodukten gleichnamige vor, so schreibe man dieselben unter einander und verbinde sie durch Addition.

Beispiele.

$$1)\ (a + b)(a + b) = \begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$2)\ (a - b)(a - b) = \begin{array}{l} a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$$3)\ (a + b)(a - b) = \begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$$

$$4)\ (2a - 4b + 3c)(3a - 2b + 4c) =$$
$$\begin{array}{l} 6a^2 - 12ab + 9ac \\ \quad - 4ab \quad\quad + 8b^2 - 6bc \\ \quad\quad + 8ac \quad\quad - 16bc + 12c^2 \\ \hline = 6a^2 - 16ab + 17ac + 8b^2 - 22bc + 12c^2. \end{array}$$

3) Um das Produkt von mehr als zwei Aggregaten zu bilden, bestimmt man im Allgemeinen zuerst das Produkt aus zwei derselben, multiplicirt dieses mit dem dritten Aggregate u. s. f.

Beispiele.

$$1)\ (a - b)(c + d)(f - g) = (ac - bc + ad - bd)(f - g)$$
$$= acf - bcf + adf - bdf - acg + bcg - adg + bdg.$$

$$2)\ (2x - 3y)(3x + 4y)(5x - 2y)(x - y)$$
$$= \left\{\begin{array}{l} 6x^2 - 9xy \\ \quad + 8xy - 12y^2 \end{array}\right\}(5x - 2y)(x - y)$$
$$= (6x^2 - xy - 12y^2)(5x - 2y)(x - y)$$
$$= \left\{\begin{array}{l} 30x^3 - 5x^2y - 60xy^2) \\ \quad 12x^2y + 2xy^2 + 24y^3 \end{array}\right\}(x - y)$$
$$= (30x^3 - 17x^2y - 58xy^2 + 24y^3)(x - y)$$
$$\begin{array}{l} 30x^4 - 17x^3y - 58x^2y^2 + 24xy^3 \\ \quad - 30x^3y + 17x^2y^2 + 58xy^3 - 24y^4 \\ \hline = 30x^4 - 47x^3y - 41x^2y^2 + 82xy^3 - 24y^4. \end{array}$$

§. 31. Zusätze.

1) Haben sämmtliche Glieder eines Aggregats einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man das Aggregat stets in eine angedeutete Multiplication verwandeln. So ist z. B.

$$am - bdm + cfm = (a - bd + cf)\,m.$$

Man sagt in diesem Falle, man habe m als gemeinschaftlichen Faktor herausgeschrieben.

2) Haben zwei Zahlen a und b einen Faktor gemeinschaftlich, so hat auch die Summe und Differenz aus beiden diesen Faktor gemeinschaftlich.

Denn ist z. B.

$$a = fm \text{ und } b = fn$$

so ist

$$a \pm b = fm \pm fn = (m \pm n)\,f.$$

§. 32. Sätze über die Multiplication der Null mit einer Zahl und der Nullen unter einander.

1) Ist einer der Faktoren Null, so ist auch das Produkt Null.

Behauptung. $a \,.\, 0 = 0$

Beweis. Da wir die Null aus der positiven Einheit erhalten, wenn wir zu dieser -1 addiren, so wird nach §. 21, 1

$$a \,.\, 0 = a - a = 0.$$

2) Das Produkt zweier Nullen ist Null.

Beweis. Setzen wir in vorstehender Gleichung $a = 0$, so folgt unmittelbar $0 \,.\, 0 = 0$.

§. 33. Aufgaben zur Uebung.

1) $ab \,.\, cd = ?$

2) $3ab \,.\, 4ac = ?$

3) $5abc \,.\, -7bc = ?$

3a) $-7ab \,.\, -5ac = ?$

4) $2mn \,.\, -3np \,.\, -5mp = ?$

5) $7a^2b \,.\, 5a^2b \,.\, -2abc = ?$

5a) $(a - b - c + d)\,a = ?$

6) $(4a - 2b + 3c)\,5ab = ?$

7) $(2xy + 8xz - 4yz - 5xyz)\, 3xyz = ?$
7a) $(3a - 2b + 5c) \,.\, - 5ac = ?$
7b) $15ab - 7ac - (3b - 6c + 4d)\, 4a = ?$
7c) $(5x - 8y + 2z)\, 5 - (2x + 3y - 4z)\, 6 = ?$
7d) $(a - b + c)\, a - (a + b - c)\, b + (a - b - c)\, c = ?$
8) $(5a - 2b)(3a + 6b) = ?$
9) $(4m - 2n)(4m - 2n) = ?$
10) $(8x + 5y)(8x - 5y) = ?$
11) $(3a^2b - 5ab^3c)(3a^2b + 5ab^3c) = ?$
12) $(3a + 4b)(2a - 3b)(5a - 6b) = ?$
12a) $(x - y + z)(x + y - z) = ?$
13) $(2a - 3b - 8c - d + 9f)(7f + 2g - h) = ?$
14) $(5a^2 - 3ab + 7b^2)(3a - b) = ?$
15) $(3a^3 + 35a^2b - 17ab^2 - 13b^3)(3a^2 + 26ab - 57b^2) = ?$
16) $(4x - 3xy - 5y^2)(3x^2 + 4xy - 2y^2) = ?$
17) $(3a - 2b + 4c)(5a - b + 3c)(2a - 5b + 8c) = ?$
18) $(4m - 2n)(5m - 3n)(4m + 2n)(5m + 3n) = ?$
19) $\Big((3a - 2b)\, 2ab - (4a^2 + 3b^2)(a - b)\Big)\Big((2a + 3b)(4a - 5b) - (5a - 2b)(3a + 2b)\Big) = ?$

E. Von der Division.

§. 34. Erklärung.

Eine Zahl [a] durch eine andere [b] dividiren heißt, eine dritte Zahl suchen, welche mit [b] multiplicirt die Zahl [a] als Produkt gibt.

Man nennt die zu dividirende Zahl [a] den Dividenden, die Zahl [b], mit welcher man dividirt, den Divisor und das Resultat den Quotienten.

Die Aufgabe der Division deutet man durch das Divisionszeichen : an, welches so zwischen Dividend und Divisor gesetzt wird, daß jener vor und dieser nach dem Zeichen steht.

Für obigen Fall ist hiernach zu schreiben [a] : [b] und dafür zu lesen: „[a] dividirt durch [b]“.

Bezeichnen wir den Quotienten durch [q], so ist also

[a] : [b] = [q].

§. 35. Zusätze.

1) Aus vorstehender Definition folgt unmittelbar, daß wenn

$$[a] : [b] = [q],$$

auch

$$[q] \,.\, [b] = [a]$$

sein muß.

Um daher die Richtigkeit einer ausgeführten Division zu prüfen, multiplicire man den gefundenen Quotienten mit dem Divisor; je nachdem alsdann das Produkt dem Dividenden gleich oder ungleich ist, ist das Resultat bezüglich richtig oder unrichtig.

2) Gleiche Zahlen durch eine und dieselbe Zahl dividirt geben gleiche Quotienten.

3) Jede Zahl ist gleich dem Quotienten aus dieser Zahl durch die positive Einheit, und jede Zahl durch sich selbst dividirt gibt Eins zum Quotienten.

Beispiel.

Es ist

$$[a] = [a] : 1 \text{ und } [a] : [a] = 1,$$

denn in beiden Fällen erhält man

$$[a] = 1 \,.\, [a] = [a].$$

4) Die Null durch irgend eine Zahl dividirt gibt Null.

Beispiel.

Man hat

$$0 : [a] = 0$$

denn nach §. 32, 1 ist

$$0 \,.\, [a] = 0.$$

5) Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer anderen Zahl $\begin{matrix}\text{multiplicirt}\\\text{dividirt}\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\text{das Produkt}\\\text{den Quotienten}\end{matrix}$ wieder mit derselben Zahl $\begin{matrix}\text{dividirt.}\\\text{multiplicirt.}\end{matrix}$

Denn nach der Definition folgt unmittelbar

$$\big([a] \,.\, [b]\big) : [b] = a \text{ und } \big([a] : [b]\big) \,.\, [b] = [a]$$

6) Der Quotient zweier Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem die Richtungszeichen bezüglich gleichnamig oder ungleichnamig sind. (§. 23 und §. 34).

So ist also

$(+a):(+b) = +(a:b)$, $(+a):(-b) = -(a:b)$
$(-a):(+b) = -(a:b)$, $(-a):(-b) = +(a:b)$

7) Nach Vorstehendem und §. 23 ist es nun leicht bei jeder vorkommenden Verbindung von Richtungszahlen zu Quotienten und Produkten das Richtungszeichen des betreffenden Resultats unmittelbar anzugeben. Denken wir uns darum in der Folge eben dieses Zeichen der vorgelegten Verbindung sogleich vorangesetzt, so ist klar, daß alsdann alle in derselben vorkommenden Zahlen als positiv angesehen werden können. Man erkennt ebenso leicht, daß das Richtungszeichen der besagten Verbindungen lediglich nur von der Anzahl der darin vorkommenden negativen Zahlen abhängt, und daß dasselbe positiv oder negativ wird, je nachdem diese Anzahl gerade oder ungerade ausfällt, daß also in Bezug auf jenes Zeichen die Aufeinanderfolge der einzelnen Operationen bei derartigen Verbindungen keinen Einfluß hat. Legen wir diese Auffassungsweise den nächstfolgenden Untersuchungen zu Grunde, so ist es uns erlaubt, diese nur auf positive Zahlen zu beschränken, weshalb wir auch in den Entwickelungen der nachfolgenden Paragraphen dieses Abschnittes nur positive Zahlen voraussetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

§. 36. Erklärungen.

1) Ist $a:b = q$, so kann man nach §. 35, 1 den Dividenden a als ein Produkt der zwei Faktoren q und b ansehen. Da nun aber nach §. 21, 2 das Produkt qb eine b malige Addition des Quotienten q ausdrückt, so wird offenbar der Quotient q aus dem Dividenden a und dem Divisor b auch durch eine Zahl bestimmt, welche angibt, wie viel mal man b von a subtrahiren muß, um zur Null zu gelangen.

Man kann somit die Division positiver Zahlen entweder als eine Zerlegung des Dividenden in zwei Faktoren, von welchen der eine gleich dem Divisor ist, oder auch als eine wiederholte Subtraction auffassen, so daß also im ersten Falle der andere Faktor, im zweiten dagegen die Anzahl der subtrahirten Divisoren den Quotienten liefert. Man

nennt die Division in jenem Falle ein Theilen, in diesem ein Messen. Das Theilen tritt ein, wenn der Dividend benannt, der Divisor aber unbenannt ist, das Messen dagegen, wenn beide benannt sind.

Für den Fall, daß Divisor und Dividend unbenannt sind, ist die Auffassung der Divisionsaufgabe eine willkürliche.

2) Bei der Ausführung der Divisionsaufgabe a : b können zwei Fälle auftreten; entweder wird nämlich a erhalten, wenn man b mit einer der Zahlen unserer Zahlenreihe multiplicirt, oder es liegt a zwischen zwei Produkten, welche durch Multiplication zweier aufeinanderfolgenden Zahlen jener Reihe mit b erhalten werden. Im ersten Falle wird der Quotient a : b eine ganze Zahl, im anderen dagegen liegt derselbe zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Man sagt, um sich in beiden Fällen kurz auszudrücken, es gehe bezüglich b in a auf, oder nicht auf; oder auch es sei a durch b theilbar, oder nicht theilbar. Der letzte Fall führt uns auf die Lehre von den Brüchen. Da wir diese in einem späteren Abschnitte besonders behandeln werden, so setzen wir vorerst bei allen vorkommenden Divisionen voraus, daß dieselben aufgehen und betrachten hier nur diejenigen Sätze über Verbindungen, deren Kenntniß zum Verständnisse des Nächstfolgenden unumgänglich nothwendig ist.

§. 37. Zusätze.

1) Jede Zahl ist durch sich und durch die Einheit theilbar (§. 35, 3).

2) Eine Zahl, welche in eine andere theilbar ist, ist ein Faktor der zweiten Zahl.

§. 38. Division eines Produktes durch eine Zahl.

Um ein Produkt durch eine Zahl zu dividiren, dividire man einen der Faktoren des Produktes durch diese Zahl und multiplicire den Quotienten mit dem anderen Faktor.

Behauptung. $(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b = (b : c) \,.\, a.$

Beweis. Nach §. 35, 5 ist

$$(a \,.\, b) : c = \left\{\left[(a : c) \,.\, c\right] . \, b\right\} : c$$
$$= \left\{\left[(a : c) \,.\, b\right] . \, c\right\} : c \quad (\S.\ 28.)$$
$$= (a : c) \,.\, b \quad (\S.\ 35,\ 5.)$$

Da ferner

$$a \,.\, b = b \,.\, a \quad (\S.\ 28)$$

so ist also

$$(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b = (b : c) \,.\, a.$$

Nun kann aber a oder b selbst als Produkt mehrer Faktoren gedacht werden, folglich gilt obiger Satz ganz allgemein.

Beispiele.

1) $12ab : 6 = 2ab$. 2) $abc : c = ab$.

§. 39. Zusätze.

1) Geht eine Zahl in eine andere auf, so ist auch jedes Vielfache dieser Zahl durch jene theilbar, oder:

Ist ein Faktor eines Produktes durch eine Zahl theilbar, so ist auch das Produkt selbst durch diese Zahl theilbar.

2) Soll ein Quotient mit einer Zahl multiplicirt werden, so multiplicire man den Dividenden mit dieser Zahl und dividire das Produkt durch den Divisor.

Denn nach §. 38 folgt durch Umkehrung unmittelbar

$$(a : c) \,.\, b = (a \,.\, b) : c.$$

§. 40. Division durch ein Produkt.

Soll durch ein Produkt dividirt werden, so dividire man zuerst durch den einen Faktor und den Quotienten durch den anderen Faktor.

Behauptung. $a : (b \,.\, c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$

Beweis. Wir zeigen nach §. 35, 1, daß zunächst

$$\left[(a : b) : c\right] . \, (b \,.\, c) = a.$$

Man hat

$$\left[(a:b):c\right].(b.c) = \left\{\left[(a:b):c\right].b\right\}.c \quad (\S.\ 28,\ 1.)$$
$$= \left\{\left[(a:b):c\right].c\right\}.b$$
$$\left.\begin{array}{l} = (a:b).b \\ = a \end{array}\right\} (\S.\ 35,\ 5.)$$

Nun ist aber

$$b . c = c . b \quad (\S.\ 28)$$

also auch

$$a : (b . c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Da man nun b oder c wieder als ein Produkt von zwei Faktoren ansehen kann u. s. f., so gilt obiger Satz ganz analog für einen Divisor, der ein Produkt beliebig vieler Faktoren ist.

§. 41. Zusätze.

1) **Um ein Produkt durch ein Produkt zu dividiren, dividire man mit jedem Faktor des Divisors in irgend einen Faktor des Dividenden.** (§. 38 und §. 40.)

Beispiele.

1) $16ab : 4a = 4b.$
2) $15abbc : 5ab = 3bc.$
3) $-8xxyyz : -2xyz = 4xy.$
4) $10aaabbbcc : 2aabc = 5abbc = 5ab^2c.$

2) **Jedes Produkt ist durch jeden seiner Faktoren, sowie durch das Produkt jeder beliebigen Anzahl derselben theilbar.**

3) Ist eine Zahl a durch eine andere b, diese durch eine dritte c und c wiederum durch eine vierte Zahl d u. s. f. theilbar, so ist auch die erste Zahl a durch jede der Zahlen c, d 2c. theilbar. Denn ist z. B. $a : b = m$, $b : c = n$, $c : d = p$; also $a = bm$, $b = cn$, $c = dp$, so folgt nach §. 35, 1 $b = dnp$, also $a = dmnp$, somit $a : c = dmnp : dp = mn$ und $a : d = dmnp : d = mnp$. Der Quotient ist also immer eine ganze Zahl.

§. 42. Division eines Aggregates durch ein Monom.

Um ein Aggregat durch ein Monom zu dividiren, dividire man jeden einzelnen Posten des Aggregates durch dieses Monom.

Behauptung. $(a + b - c) : d = (a : d) + (b : d) - (c : d)$.

Beweis. Nach §. 35, 5 ist

$$(a + b - c) : d = \Big[(a : d) . d + (b : d) . d - (c : d) . d\Big] : d$$

oder nach §. 31, 1

$$= \Big[\big((a : d) + (b : d) - (c : d)\big) . d\Big] : d$$

$$= (a : d) + (b : d) - (c : d).$$

Beispiele.

1) $(14ab - 7ac + 21ad) : 7a = 2b - c + 3d$.
2) $(6a^2bc - 3ab^2c - 12a^2bc^2) : 3abc = 2a - b - 4ac$.

§. 43. Zusätze.

1) Haben sämmtliche Posten eines Aggregates einen und denselben Divisor, so kann dieser dem Aggregate als gemeinschaftlicher Divisor nachgesetzt werden.

Beispiel.

$$(a : c) \pm (b : c) = (a \pm b) : c.$$

2) Sind sämmtliche Glieder eines Aggregates durch ein und dieselbe Zahl theilbar, so ist auch die algebraische Summe derselben durch diese Zahl theilbar.

Sind also z. B. die Quotienten $(a : d)$, $(b : d)$, $(c : d)$ ganze Zahlen, so ist auch das Resultat der Division $(a \pm b \pm c) : d$ eine ganze Zahl.

3) Ist ein Aggregat und irgend eines seiner Glieder durch ein und dieselbe Zahl theilbar, so ist auch die algebraische Summe der noch übrigen Glieder durch diese Zahl theilbar.

§. 44. Division eines Aggregates durch ein Aggregat.

Um ein Aggregat von Zahlen durch ein anderes Aggregat zu dividiren, hat man zuerst die Glieder beider Aggregate alphabetisch, diese aber wieder in der Weise zu ordnen, wie die Wörter in einem Lexikon aufeinanderfolgen und dann folgendermaßen zu verfahren.

1) Bezeichnet D den Dividenden und d den Divisor, so dividire man mit dem ersten Posten des Divisors d in den ersten Posten des Dividenden D, um das erste Glied q_1 des Quotienten Q zu erhalten.

2) Mit dem Quotienten q_1 multiplicire man den Divisor d und subtrahire das Produkt vom Dividenden D in der Weise, daß der Rest r_1 wieder lexikalisch geordnet erscheint.

3) Alsdann betrachte man diesen Rest r_1 als Dividend und verfahre damit wie vorhin mit dem ursprünglichen Dividenden, so erhält man das zweite Glied q_2 des Quotienten Q.

4) Mit dem Quotienten q_2 multiplicire man wiederum den Divisor d, subtrahire das Produkt von dem entsprechenden Dividenden r_1 und ordne abermals den Rest r_2 lexikalisch.

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man nach und nach die aufeinanderfolgenden Glieder $q_3, q_4, \ldots\ldots$ des Quotienten Q, und der Reihe nach die entsprechenden Reste r_3, $r_4, \ldots\ldots$ Wird endlich einer dieser Reste gleich Null, so geht die Division auf.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht durch Rückwärtsschließen.

Ist z. B. $r_4 =$ Null, so hat man

$$D - r_1 = q_1\, d,$$
$$r_1 - r_2 = q_2\, d,$$
$$r_2 - r_3 = q_3\, d,$$
$$r_3 = q_4\, d; \qquad \text{und hieraus durch Addition}$$
$$D = q_1\, d + q_2\, d + q_3\, d + q_4\, d,$$
$$D = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\, d = Q \cdot d;$$

also ist $D : d = Q$.

Beispiele.

$$1)\quad \overbrace{(a^2 + 2ab + b^2)}^{D} : \overbrace{(a + b)}^{d} = \overbrace{a}^{q_1} + \overbrace{b}^{q_2}$$

$$\begin{array}{l} a^2 + ab = d \cdot q_1 \\ \hline ab + b^2 = r_1 \\ ab + b^2 = d \cdot q_2 \\ \hline 0 = r_2 \end{array}$$

$$2)\quad \overbrace{(a^2 - b^2)}^{D} : \overbrace{(a - b)}^{d} = \overbrace{a}^{q_1} + \overbrace{b}^{q_2}$$

$$\begin{array}{l} a^2 - ab = d \cdot q_1 \\ \hline ab - b^2 = r_1 \\ ab - b^2 = d \cdot q_2 \\ \hline 0 = r_2 \end{array}$$

3) $(2a^4 + 28b^4 - 30ab^3) : (2b^2 + a^2 - 3ab)$.

Ordnet man zuerst lexikalisch, so gestaltet sich die Aufgabe so:

$$(2a^4 - 30ab^3 + 28b^4) : (a^2 - 3ab + 2b^2)$$

und nach dem oben angegebenen Operationsgange erhalten wir:

$$\overbrace{(2a^4 - 30ab^3 + 28b^4)}^{D} : \overbrace{(a^2 - 3ab + 2b^2)}^{d} = \overbrace{\underbrace{2a^2}_{q_1} + \underbrace{6ab}_{q_2} + \underbrace{14b^2}_{q_3}}^{Q}$$

$$\begin{array}{l} 2a^4 - 6a^3b + 4a^2b^2 = d \cdot q_1 \\ \hline 6a^3b - 4a^2b^2 - 30ab^3 + 28b^4 = r_1 \\ 6a^3b - 18a^2b^2 + 12ab^3 = d \cdot q_2 \\ \hline 14a^2b^2 - 42ab^3 + 28b^4 = r_2 \\ 14a^2b^2 - 42ab^3 + 28b^4 = d \cdot q_3 \\ \hline 0 = r_3 \end{array}$$

$$4)\quad (a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$

$$\begin{array}{l} a^3 - a^2b \\ \hline + a^2b - b^3 \\ + a^2b - ab^2 \\ \hline ab^2 - b^3 \\ ab^2 - b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 45. Aufgaben zur Uebung.

1) $ab : b = ?$

2) $-ab : a = ?$

3) $5m : -m = ?$

4) $-abc : -b = ?$

5) $12a^2 : 3a = ?$
6) $15abcd : 5ab = ?$
7) $-60mnxy : -12mxy = ?$
8) $(15ab - 6ab^2 + 12abc) : 3ab = ?$
9) $(24acdf - 18acd - 12abcd) : 6acd = ?$
10) $(ac - bc + ad - bd) : (a - b) = ?$
11) $(4a^3 - 10a^2 - a + 7) : (a - 1) = ?$
12) $(x^2 - 2xy + y^2) : (x - y) = ?$
13) $(16m^2 - 9n^2) : (4m - 3n) = ?$
14) $(6a^4 + a^3b - 11a^3c - 12a^2b^2 + 26a^2bc - 10a^2c^2) : (3a^2 - 4ab + 2ac) = ?$
15) $(a^4 + a^2b^2 + b^4) : (a^2 + ab + b^2) = ?$
16) $(x^4 - 16y^4) : (x + 2y) = ?$

Zweiter Abschnitt.

Vom größten gemeinschaftlichen Theiler, der Factorenzerlegung und dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen.

§. 46. Erklärungen.

1) Ist eine Zahl a durch eine andere b theilbar, also der Quotient aus a durch b eine ganze Zahl, so nennt man den Divisor b einen Theiler oder ein Maaß des Dividenden a und diesen ein Vielfaches von jenem.

2) Sind zwei oder mehre Zahlen durch ein und dieselbe Zahl zugleich theilbar, so heißt diese ein gemeinschaftlicher Theiler oder ein gemeinschaftliches Maaß jener Zahlen.

So ist z. B. 6 ein gemeinschaftlicher Theiler der Zahlen 12, 24, 30, 48 und 60.

3) Häufig lassen sich zu gegebenen Zahlen mehre gemeinschaftliche Theiler angeben. Den größten derselben nennt man alsdann den größten gemeinschaftlichen Theiler oder das größte gemeinschaftliche Maaß.

So sind z. B. 2, 4 und 8 gemeinschaftliche Maaße der Zahlen: 16, 24 und 40; allein 8 ist das größte gemeinschaftliche Maaß derselben.

4) Jede Zahl, welche durch mehre Zahlen zugleich theilbar ist, nennt man ein gemeinschaftliches Vielfache und die kleinste von ihnen insbesondere das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen.

So sind z. B. die Zahlen 24, 48, 72 zugleich durch 2, 4, 6 und 8 theilbar, allein 24 ist die kleinste derselben von dieser Eigenschaft und somit das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 4, 6 und 8.

5) Ist eine Zahl nur durch sich selbst und die Einheit theilbar, so heißt solche eine absolute Primzahl oder kurzweg Primzahl, auch einfache Zahl oder Stammzahl; jede andere Zahl dagegen wird eine zusammengesetzte genannt.

So sind z. B. 3, 5, 11, 13 Primzahlen, dagegen 4, 9, 12, 26 zusammengesetzte Zahlen.

6) Zwei oder mehre Zahlen, welche außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maaß haben, heißen relative Primzahlen oder Primzahlen in Bezug aufeinander.

So sind z. B. 9 und 65 relative Primzahlen, obgleich jede dieser Zahlen eine zusammengesetzte, also in Faktoren zerlegbar ist.

7) Alle Faktoren einer Zahl, welche Primzahlen sind, heißen die einfachen oder Primfaktoren, alle übrigen die zusammengesetzten Faktoren jener Zahl.

8) Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß, so werden sie auch commensurabele, im anderen Falle dagegen incommensurabele Zahlen genannt.

9) Alle Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, heißen gerade, alle übrigen dagegen ungerade.

10) Wird eine ungerade Zahl durch 2 dividirt, so bleibt stets 1 als Rest. Bezeichnen wir daher durch n irgend eine Zahl unserer Zahlenreihe, so ist jede gerade Zahl dargestellt durch 2n und jede ungerade durch $2n \pm 1$.

⊙ §. 47. Sätze über die wichtigsten Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen.

1) Sowohl die Summe als Differenz zweier geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Voraussʃ. Es sei $a = 2m$ und $b = 2n$,

Behaupt. so ist $a \pm b$ eine gerade Zahl.

Beweis. $a \pm b = 2m \pm 2n = 2(m \pm n)$ folglich eine gerade Zahl. (§. 46, 10.)

Zusatz.

Die algebraische Summe beliebig vieler geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

2) Sowohl die Summe als Differenz zweier ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Voraussf. Es sei $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$,
Behaupt. so ist $a \pm b$ eine gerade Zahl.
Beweis. $a + b = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$
$a - b = (2m + 1) - (2n + 1) = 2(m - n)$.

3) Sowohl die Summe als Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

Voraussf. Es sei $a = 2m$, $b = 2n + 1$,
Behaupt. so ist $a \pm b$ eine ungerade Zahl.
Beweis. $a \pm b = 2m \pm 2n \pm 1 = 2(m \pm n) \pm 1$ also ungerade (§. 46, 10).

4) Das Produkt zweier geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Voraussf. Es sei $a = 2m$, $b = 2n$,
Behaupt. so ist ab eine gerade Zahl.
Beweis. $ab = 2m \,.\, 2n = 4mn = 2 \,.\, 2mn$.

5) Das Produkt zweier ungeraden Zahlen ist eine ungerade Zahl.

Voraussf. Es sei $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$,
Behaupt. so ist ab eine ungerade Zahl.
Beweis. $ab = (2m + 1)(2n + 1)$
$= 4mn + 2m + 2n + 1$
$= 2(2mn + m + n) + 1$.

6) Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine gerade Zahl.

Voraussf. Es sei $a = 2m$, $b = 2n + 1$,
Behaupt. so ist ab eine gerade Zahl.
Beweis. $ab = 2m(2n + 1) = 2(2mn + m)$.

7) Der Quotient aus zwei geraden Zahlen kann eine gerade oder ungerade Zahl sein, vorausgesetzt, daß die Division aufgeht.

Die Richtigkeit dieses Satzes fließt unmittelbar aus §. 34 in Verbindung mit obigen Sätzen 4 und 6.

8) Der Quotient aus zwei ungeraden Zahlen ist eine ungerade Zahl, vorausgesetzt, daß die Division aufgeht.

Folgt unmittelbar aus Satz 5.

9) Der Quotient einer geraden Zahl durch eine ungerade ist eine gerade Zahl, vorausgesetzt, daß die Division aufgeht.

Folgt unmittelbar aus Satz 6.

10) Eine ungerade Zahl ist nie durch eine gerade Zahl meßbar.

Die Wahrheit dieser Behauptung fließt unmittelbar aus §. 34 in Verbindung mit obigen Sätzen 4 und 6; denn hiernach kann der Quotient weder gerade noch ungerade sein.

§. 48. Einige Sätze über besondere Kennzeichen der Theilbarkeit bestimmter ganzen Zahlen.

1) Durch 2 ist eine Zahl theilbar, wenn die Ziffer der Einer durch 2 theilbar ist.

Beweis. Bezeichnen wir hier und in der Folge die Einer irgend einer Zahl durch e, deren Zehner durch z, die Hunderter durch h, die Tausender durch t u. s. f., so ist jede Zahl dargestellt durch:

$$\ldots\ldots\ldots + 1000\,t + 100\,h + 10\,z + e, \text{ oder}$$
$$\ldots\ldots\ldots + 10^3\,t + 10^2\,h + 10\,z + e.$$

Die Theilbarkeit dieser Summe durch 2 hängt nun offenbar von der Zahl e oder den Einern ab, da alle übrigen Posten durch 2 theilbar sind.

Beispiel.

2748 ist durch 2 theilbar, weil es die Zahl 8 ist.

2) Durch 4 ist eine Zahl theilbar, wenn die Zahl, welche die Einer und Zehner bilden, durch 4 theilbar ist.

Beweis. Da 100 durch 4 theilbar ist, so ist es auch jedes Vielfache von 100. Die Theilbarkeit einer Zahl durch 4 hängt somit nur von der durch die Einer und Zehner gebildeten Zahl ab.

Beispiel.

3952 ist durch 4 theilbar, weil es die Zahl 52 ist.

3) Durch 8 ist eine Zahl theilbar, wenn die durch die Einer, Zehner und Hunderter gebildete Zahl durch 8 theilbar ist.

Beweis. Da 1000 durch 8 theilbar ist, so ist es auch jedes Vielfache von 1000. Die Theilbarkeit einer Zahl durch 8 hängt somit nur von der durch die Einer, Zehner und Hunderter gebildeten Zahl ab.

Beispiel.

97432 ist durch 8 theilbar, weil es die Zahl 432 ist.

4) Durch 16, 32, 64 .... ist eine Zahl theilbar, wenn bezüglich die aus den 4, 5, 6, ... letzten Ziffern gebildete Zahl es ist.

Der Beweis wird ähnlich wie vorhin geführt.

5) Durch 5 ist eine Zahl theilbar, wenn an der Stelle der Einer eine Null oder 5 steht.

Beweis. Die Theilbarkeit einer Zahl

$$.... + 1000\,t + 100\,h + 10\,z + e$$

durch 5 hängt offenbar von der Theilbarkeit der Einer e ab.

Beispiel.

3470 und 3895 sind durch 5 theilbar.

6) Durch 3 oder 9 ist eine Zahl theilbar, wenn die Quersumme d. i. die Summe der Ziffern der Zahl bezüglich durch 3 oder 9 theilbar ist.

Beweis. Aus der allgemeinen Form einer Zahl

$$.... + 1000\,t + 100\,h + 10\,z + e$$
$$= ... + 999\,t + 99\,h + 9\,z + (.... + t + h + z + e)$$

folgt unmittelbar, daß die Theilbarkeit solcher durch 3 oder 9 nur von der Theilbarkeit der Summe ... + t + h + z + e durch eben diese Zahlen abhängig ist.

Beispiele.

1) 32745 ist durch 3 theilbar, weil 3 + 2 + 7 + 4 + 5 = 21 durch 3 theilbar ist.

2) 53874 ist durch 9 theilbar, weil 5 + 3 + 8 + 7 + 4 = 27 durch 9 theilbar ist.

7) Durch 11 ist eine Zahl theilbar, wenn die Differenz der Summen aller geradstelligen und

aller ungeradstelligen Ziffern Null, oder durch 11 theilbar ist.

Beweis.

$\ldots. + 1000\,t + 100\,h + 10\,z + e = (\ldots + 1000\,t + 10\,z) + (\ldots + 100\,h + e)$.

Da nun 100, 10000, 1000000, . . . durch 11 dividirt den Rest 1, also 200, 20000, 2000000, . . . den Rest 2 u. s. w. lassen, während bei der Division der Zahlen 10, 1000, 100000, ... oder 20, 2000, 200000, . . . zum Aufgehen noch 1, oder 2 rc. fehlt, so gibt die vorgelegte Zahl offenbar denselben Rest bei einer Division durch 11, wie die Differenz $(\ldots. + t + z) - (\ldots + h + e)$. Ist diese also Null, oder durch 11 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst.

Beispiele.

1) 327624 ist durch 11 theilbar, denn die Differenz
$(3 + 7 + 2) - (2 + 6 + 4) = 0$.

2) 4192848 ist durch 11 theilbar, denn die Differenz
$(4 + 9 + 8 + 8) - (1 + 2 + 4) = 22$
ist durch 11 theilbar.

8) Die Regeln über die Theilbarkeit einer Zahl durch 7, 13 und dergl. haben keinen praktischen Werth und werden darum hier übergangen.

§. 49. Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zweier Zahlen.

1) Das größte gemeinschaftliche Maaß zweier Zahlen a und b wird auf folgende Weise gefunden:

Man dividirt mit der kleineren Zahl b in die größere a; geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maaß, geht sie aber nicht auf und ist etwa q_1 der Quotient, r_1 der betreffende Rest, so dividirt man mit r_1 in den vorigen Divisor b. Es resultire z. B. hiefür q_2 als Quotient und r_2 als Rest. Mit diesem Reste r_2 dividirt man nun wieder in den letzten Divisor r_1, wodurch der dritte Quotient q_3 und der dritte Rest r_3 erhalten werde. Auf diese Weise fährt man fort zu operiren, bis einmal ein Rest Null wird, die Division also aufgeht. Die letzte als Divisor angesehene Zahl oder,

was dasselbe ist, der vorletzte Rest ist alsdann das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Zahlen a und b.

Nehmen wir z. B. an, es sei der vierte Rest $r_4 = 0$, so läßt sich das oben mitgetheilte Verfahren durch folgendes Schema darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} & q_1 & & q_2 & & q_3 & & q_4 \\ a & : & b & : & r_1 & : & r_2 & : & r_3 \\ & \underline{bq_1} & & \underline{r_1 q_2} & & \underline{r_2 q_3} & & \underline{r_3 q_4} \\ & r_1 & & r_2 & & r_3 & & r_4 = 0. \end{array}$$

r_3 muß nun in a und b zugleich theilbar sein und zwar ist r_3 die größte Zahl, welche diese Eigenschaft besitzt.

Denn man hat:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ r_2 &= r_3 q_4 + 0 \end{aligned}$$

und erhält hiernach durch successive Einführung der betreffenden Werthe von der letzten gegen die erste Gleichung, der Reihe nach die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_3 q_4 \\ r_1 &= r_3 q_4 q_3 + r_3 = r_3 (1 + q_3 q_4) \\ b &= r_3 (1 + q_3 q_4) q_2 + r_3 q_4 \\ &= r_3 (q_2 + q_4 + q_2 q_3 q_4) \\ a &= r_3 (q_2 + q_4 + q_2 q_3 q_4) q_1 + r_3 (1 + q_3 q_4) \\ &= r_3 (1 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 q_4) \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, daß a und b den Faktor r_3 haben.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß das oben gelehrte Verfahren für jeden Rest $r_n = 0$ richtig ist.

Gäbe es einen größeren gemeinschaftlichen Theiler r von a und b, so müßte, da

$$a = bq_1 + r_1$$

auch r_1 durch r theilbar sein (§. 43, 3); weil ferner

$$b = r_1 q_2 + r_2$$

und nun b und r_1 durch r theilbar wären, so müßte es auch r_2, somit auch r_3 und endlich auch r_4 sein, was unmöglich ist, da $r > r_4$ vorausgesetzt wurde.

Beispiele.

1) Das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Zahlen 25728 und 14539 aufzusuchen.

Auflösung.

Nach obigem Schema hat man

	1	1	3	2	1	16
25728 :	14539 :	11189 :	3350 :	1139 :	1072 :	67
14539	11189	10050	2278	1072	1072	
11189	3350	1139	1072	67	0	

Also ist 67 das größte gemeinschaftliche Maaß und man hat

$$25728 : 67 = 384,\ 14539 : 67 = 217.$$

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Zahlen 2672048 und 3225152 zu finden.

Auflösung.

	1	4	1	4	1	11	10	2
3225152 :	2672048 :	553104 :	459632 :	93472 :	85744 :	7728 :	736 :	368
2672048	2212416	459632	373888	85744	7728	7360	736	
553104	459632	93472	85744	7728	8464	368	0	
					7728			
					736			

Somit ist 368 das größte gemeinschaftliche Maaß und man hat

$$2672048 : 368 = 7261 \text{ und } 3225152 : 368 = 8764.$$

2) Wird bei dem angegebenen Verfahren der letzte Divisor, oder der vorletzte Rest = 1, so ist dieses ein Zeichen, daß beide Zahlen außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maaß haben, also relative Primzahlen sind.

So haben z. B. die zwei Zahlen 695 und 274 kein gemeinschaftliches Maaß, denn man findet:

	2	1	1	6	2	1	6
695 :	274 :	147 :	127 :	20 :	7 :	6 :	1
548	147	127	120	14	6	6	
147	127	20	7	6	1	0.	

3) **Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß, so ist dieses zugleich ein gemeinschaftliches Maaß aller bei der Bestimmung desselben auftretenden Zwischenreste oder Zwischendivisoren.**

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus 1.

§. 50. Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maaßes mehrer Zahlen.

1) Soll man zu drei oder mehr Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß bestimmen, so suche man solches zuerst zu zwei derselben und dann zu dem gefundenen Maaße und der dritten Zahl u. s. f. Das zuletzt gefundene Maaß ist zugleich das größte gemeinschaftliche Maaß der vorgelegten Zahlen.

Beispiel.

Das größte gemeinschaftliche Maaß der drei Zahlen 11880, 26928, 1368 zu finden.

Auflösung.

Auf die oben angegebene Weise findet man als größtes gemeinschaftliches Maaß von 11880 und 26928 die Zahl 792 und von 792 und 1368 die Zahl 72; folglich ist 72 das größte gemeinschaftliche Maaß der drei gegebenen Zahlen und es ist
$11880 : 72 = 165$; $26928 : 72 = 374$; $1368 : 72 = 19$.

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß mehrer Monomien wird erhalten, wenn man dem größten gemeinschaftlichen Maaße ihrer Zahlencoefficienten die allen Monomien gemeinschaftlichen allgemeinen Zahlzeichen in ihrer kleinsten darin vorkommenden Anzahl als Faktoren anhängt.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

Beispiele.

1) Das größte gemeinschaftliche Maaß zu $24a^2bc^3$ und $9ab^2c$ ist $3abc$
2) " " " " " $36a^3b^2c$, $12ab^2c^2$ und $24a^2b^2c^3$ ist $12ab^2c$.

§. 51. Einige Sätze über Primzahlen.

1) Zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen unserer Zahlenreihe sind stets relative Primzahlen.

Beweis. Wären dieselben zugleich durch eine dritte Zahl theilbar, so müßte auch ihre Differenz oder 1 durch diese Zahl theilbar sein (§. 43, 2).

2) Absolute Primzahlen sind Primzahlen untereinander.

3) Von allen geraden Zahlen ist nur 2 eine Primzahl und alle Primzahlen mit Ausnahme der Zahl 2 sind ungerade Zahlen.

4) Jede zusammengesetzte Zahl ist ein Produkt aus lauter Primfaktoren.

5) Sind a und b relative Primzahlen und man multiplicirt die eine derselben z. B. a mit irgend einer dritten Zahl z, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler des Produktes az und der Zahl b zugleich gemeinschaftlicher Theiler der Zahlen b und z.

Beweis. Verfährt man mit den zwei Zahlen a und b nach Art der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers und bezeichnen wieder $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ die aufeinanderfolgenden Partialquotienten, $r_1, r_2, r_3 \ldots . r_n$ die betreffenden Reste, so hat man, da $r_n = 1$ ist:

$$
\begin{array}{lll}
a = bq_1 + r_1 & \text{oder} & a - bq_1 = r_1 \\
b = r_1q_2 + r_2 & \text{„} & b - r_1q_2 = r_2 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3 & \text{„} & r_1 - r_2q_3 = r_3 \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 1 & \text{„} & r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1
\end{array}
$$

oder wenn man sämmtliche Gleichungen beiderseits mit z multiplicirt:

$$
\begin{array}{l}
az - bq_1z = r_1z \\
bz - r_1q_2z = r_2z \\
r_1z - r_2q_3z = r_3z \\
\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2}z - r_{n-1}q_n z = z
\end{array}
$$

Bezeichnet nun t irgend einen gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen az und b, so ist auch bq_1z und daher $az - bq_1z = r_1z$ durch t theilbar; es geht somit t auch in r_1q_2z und deßhalb in $bz - r_1q_2z = r_2z$ u. s. f., also schließlich auch in $r_{n-2}z - r_{n-1}q_n z = z$ auf.

6) Sind a und b relative Primzahlen zu c, so ist das Produkt ab ebenfalls zu c relative Primzahl.

Beweis. Nach 5 haben b und c einerlei gemeinschaftliche Theiler mit den Zahlen ab und c. Nun sind aber der Voraussetzung zufolge b und c relative Primzahlen, also sind es auch die Zahlen ab und c.

7) Aus 6 folgt unmittelbar, daß wenn jede der Zahlen a, b, c, d . . . relative Primzahl zu einer Zahl k ist, auch jedes der Produkte ab, abc, abcd, ... zu k relative Primzahl sein muß, und daß alle Produkte, welche man aus einzelnen jener Zahlen in der Weise bildet, daß keine von ihnen zugleich Faktor zweier oder mehrer Produkte ist, relative Primzahlen sind.

8) Ist das Produkt ab zweier Zahlen a und b durch eine dritte Zahl c, welche zu dem einen Faktor a relative Primzahl ist, theilbar, so ist der andere Faktor b durch eben diese Zahl c theilbar.

Beweis. Nach der Voraussetzung haben ab und c den gemeinschaftlichen Theiler c, also ist nach 5 auch c ein gemeinschaftlicher Theiler von b und c, somit jedenfalls ein Theiler von b.

9) Ist jede der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ zu jeder der Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ relative Primzahl, so ist auch das Produkt $a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ relative Primzahl zu dem Produkte $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$.

Beweis. Nach 7 ist jede der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ relative Primzahl zu dem Produkte $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$, also ist auch nach demselben Satze das Produkt $a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ relative Primzahl zu dem Produkte $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$.

10) Setzt man in 9

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m = a$$

und

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = b,$$

so ergibt sich unmittelbar der Satz:

Sind a und b irgend zwei relative Primzahlen, so sind auch die Produkte $\overset{1}{\breve{a}}\,\overset{2}{\breve{a}}\,\overset{3}{\breve{a}}\,\overset{4}{\breve{a}} \ldots \overset{m}{\breve{a}}$ und $\overset{1}{\breve{b}}\,\overset{2}{\breve{b}}\,\overset{3}{\breve{b}}\,\overset{4}{\breve{b}} \ldots \overset{n}{\breve{b}}$ oder a^m und b^n, oder wenn die Anzahl der Faktoren in beiden Produkten dieselbe und etwa gleich n ist, die Produkte a^n und b^n relative Primzahlen.

11) Ist eine Zahl a durch jede der zwei relativen Primzahlen x und y theilbar, so ist sie auch durch das Produkt xy derselben theilbar.

Beweis. Ist z. B. $a = mx$, also $a : y = mx : y$ eine ganze Zahl, so muß der Voraussetzung zufolge nach dem

8. Satze m durch y theilbar sein. Ist nun $m : y = n$, also $m = ny$, so ist $a = mx = nxy$, folglich durch xy theilbar.

12) Eine Zahl, welche durch mehre Primzahlen zugleich theilbar ist, ist auch durch das Produkt einzelner sowie aller Faktoren theilbar.

13) Dividirt man zwei Zahlen a und b durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß m, so sind die Quotienten Primzahlen unter einander.

Beweis. Setzen wir $a = mx$, $b = my$, und wären nun x und y keine relativen Primzahlen, so müßten sie ein gemeinschaftliches Maaß m' haben und man hätte etwa

$$x = m'x', \; y = m'y'$$

also $$a = mm'x', \; b = mm'y'.$$

Den beiden Zahlen a und b würde aber hiernach als größtes gemeinschaftliches Maaß das Produkt mm' entsprechen, was mit der Voraussetzung im Widerspruche stünde.

14) Multiplicirt, oder dividirt man die eine von zwei Zahlen, welche ein größtes gemeinschaftliches Maaß haben, mit irgend einer Zahl, welche zur anderen relative Primzahl ist, so wird hierdurch das größte gemeinschaftliche Maaß nicht geändert.

Beweis. Bezeichnet m das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen a und b, ist z. B. $a = mx$, $b = my$, wo nach 13 x und y relative Primzahlen sind, und multiplicirt man etwa a mit irgend einer Zahl z, welche kein gemeinschaftliches Maaß mit b hat, so erhält man $az = mxz$. Nun ist aber z zu y relative Primzahl und nach der Voraussetzung auch x zu y, folglich nach 6 auch xz zu y relative Primzahl und somit m das größte gemeinschaftliche Maaß von az und b.

Analog läßt sich dieser Satz für den Fall der Division beweisen.

15) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Angenommen, es gäbe nur eine bestimmte Anzahl von Primzahlen, deren letzte z heißen mag, so müßte offenbar jede Zahl, welche größer als z ist, durch eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 . . . . . z theilbar sein. Setzen wir nun das Produkt aller dieser Primzahlen, d. i. $2 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots z = p$, so ist $p + 1 > 2 . 3 . 5 . 7 \ldots z$, und durch keinen dieser Faktoren

theilbar. Hiernach ist also p + 1 entweder selbst eine Primzahl, oder es liegen zwischen z und p + 1 noch andere Primzahlen, welche in p + 1 aufgehen.

Es gibt somit stets noch Primzahlen, welche größer als z sind, man mag z so groß nehmen, als man will; die Anzahl derselben ist also eine unbeschränkte.

Anmerkung. Um sämmtliche Primzahlen von 1 bis zu irgend einer Zahl z aufzufinden, verfahre man folgendermaßen:

Man setze alle ungeraden Zahlen von 1 bis z neben einander:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 . . . .

und streiche nun von der Zahl 3 an, diese jedoch ausgeschlossen, immer die dritte Zahl, also 9, 15, 21 . . . durch, dann kennzeichne man ebenso von der Zahl 5 an, diese jedoch ausgeschlossen, immer die fünfte Zahl, die schon durchgestrichenen aber mitgezählt, also 15, 25, 35 . . . .; verfahre hierauf in ähnlicher Weise mit jeder siebenten Zahl von der Zahl 7 an, diese wiederum ausgeschlossen u. s. f. Die schließlich nicht durchgestrichenen Zahlen sind alsdann die zu suchenden Primzahlen.

Nach der angedeuteten Operation steht also die Zahlenreihe so:

1, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, . . .

und man erhält somit unter Berücksichtigung, daß 2 eine Primzahl ist,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .

als die zu suchenden Primzahlen.

§. 52. Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zweier Aggregate.

Um das größte gemeinschaftliche Maaß zweier Aggregate zu finden, ordnet man zuerst die Glieder beider nach der für die Division zweier Aggregate in §. 44 angegebenen Reihenfolge, läßt alsdann den etwa allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor weg und dividirt hierauf, ganz analog wie bei Zahlen, mit dem Aggregate von geringerem Werthe in das größere. Geht hierbei die Division der ersten Posten nicht auf, so richte man zuerst den Dividend durch Multiplication mit einem bestimmten Zahlenfaktor so her, daß dieses der Fall ist*).

---

*) Schon in §. 51, 14 wurde gezeigt, daß für zwei Zahlen unter gewisser Voraussetzung durch eine solche Operation das größte gemeinschaftliche Maaß nicht geändert wird. Dasselbe läßt sich nun zwar auch für zwei Aggregate nachweisen; allein, da der Beweis etwas weitläufig ist, und die Entwickelung mehrer Sätze über Aggregatenprodukte und dergl. verlangt, so wollen wir ihn hier, als unserem Zwecke zu ferne liegend, übergehen und nur das zu befolgende Verfahren bei der Bestimmung des gemeinschaftlichen Maaßes mittheilen.

Geht die Division beider Aggregate durch einander auf, so ist der Divisor selbst das gemeinschaftliche Maaß, wenn nicht, so dividire man mit dem Reste in den vorigen Divisor, berücksichtige jedoch hierbei wieder, daß Dividend und Divisor, wenn nöthig, zuerst durch Multiplication mit einem Faktor die Eigenschaft zu erhalten haben, daß ihre ersten Posten in einander aufgehen. In gleicher Weise fahre man fort, bis die Division einmal aufgeht. Der letzte Divisor ist alsdann das zu suchende gemeinschaftliche Maaß der zwei vorgelegten Aggregate.

Beispiele.

1) Das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Aggregate $2a^3 - 7a^2 + 8a - 4$ und $a^2 - 5a + 6$ zu finden.

Auflösung.

Da beide Aggregate in Bezug auf a schon geordnet und die ersten Posten durch einander theilbar sind, so hat man

$$\begin{array}{l}(2a^3 - 7a^2 + 8a - 4) : (a^2 - 5a + 6) = 2a + 3 \\ \underline{2a^3 - 10a^2 + 12a} \\ \qquad 3a^2 - 4a - 4 \\ \qquad \underline{3a^2 - 15a + 18} \\ \qquad\qquad 11a - 22\end{array}$$

Nun wäre $a^2 - 5a + 6$ durch $11a - 22$ zu dividiren. Da aber a^2 nicht durch $11a$ theilbar ist, so multiplicire man zuvor den Dividenden mit 11, oder, was in vorliegendem Falle kürzer ist, man dividire den Divisor durch 11. Man erhält alsdann

$$\begin{array}{l}(a^2 - 5a + 6) : (a - 2) = a - 3 \\ \underline{a^2 - 2a} \\ \quad - 3a + 6 \\ \quad \underline{- 3a + 6}\end{array}$$

Da die Division aufgeht, so ist $a - 2$ das verlangte größte gemeinschaftliche Maaß und

$$(2a^3 - 7a^2 + 8a - 4) : (a - 2) = 2a^2 - 3a + 2$$
$$(a^2 - 5a + 6) : (a - 2) = a - 3.$$

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Aggregate $2a^4 - 3a^3 - 7a^2 - a - 6$ und $6a^3 + 7a^2 + a + 6$ zu finden.

Auflösung.

Das hierbei zu befolgende Verfahren geht aus nachstehender übersichtlichen Zusammenstellung der Rechnung hervor:

$$(2a^4 - 3a^3 - 7a^2 - a - 6):(6a^3 + 7a^2 + a + 6) = a - 8$$
$$. \; 3$$
$$6a^4 - 9a^3 - 21a^2 - 3a - 18$$
$$6a^4 + 7a^3 + a^2 + 6a$$
$$- 16a^3 - 22a^2 - 9a - 18$$
$$. \; 3$$
$$- 48a^3 - 66a^2 - 27a - 54$$
$$- 48a^3 - 56a^2 - 8a - 48$$
$$- 10a^2 - 19a - 6$$

$$(6a^3 + 7a^2 + a + 6):(-10a^2 - 19a - 6) = -3a + 11$$
$$. \; 5$$
$$30a^3 + 35a^2 + 5a + 30$$
$$30a^3 + 57a^2 + 18a$$
$$- 22a^2 - 13a + 30$$
$$. \; 5$$
$$-110a^2 - 65a + 150$$
$$-110a^2 - 209a - 66$$
$$144a + 216$$

$$(- 10a^2 - 19a - 6) : (144a + 216)$$
$$- 10a^2 - 15a \qquad : 72$$
$$- 4a - 6 \; : (2a + 3) = - 5a - 2$$
$$- 4a - 6$$

Folglich ist $2a + 3$ das größte gemeinschaftliche Maaß und man hat:

$$(2a^4 - 3a^3 - 7a^2 - a - 6) : (2a + 3) = a^3 - 3a^2 + a - 2.$$
$$(6a^3 - 7a^2 + a + 6) : (2a + 3) = 3a^2 - a + 2.$$

§. 53. Aufgaben zur Uebung.

Das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden:

1) zu 1116 und 3007;
2) „ 73509 und 105181;
3) „ 124640 und 145345;
4) „ 506088 und 1492128;
5) „ 2808, 12896 und 78208;
6) „ 290, 696, 1160 und 2030;
7) „ $27a^3 - 27a^2x + 9ax^2 + x^3$ u. $9a^2 - 6ax + x^2$;
8) „ $6m^3 + 17m^2n + mn^2 - 10n^3$ u. $6m^4 - 22m^3n + 9m^2n^2 + 11mn^3 - 6n^4$;
9) „ $10x^3yz - 16x^2yz - 10xyz - 16yz$ und $10x^4yz - 14x^3yz - 18x^2yz + 38xyz - 16yz$;

10) zu $7a^6 + 30a^5 + 30a^4 - 24a^3 - 45a^2 - 6a + 8$ und $a^7 + 5a^6 + 6a^5 - 6a^4 - 15a^3 - 3a^2 + 8a + 4$.

§. 54. Von der Faktorenzerlegung.

1) Unter der Zerlegung eines Ausdruckes in seine Faktoren versteht man die Aufsuchung derjenigen Faktoren, durch deren Multiplication jener Ausdruck hervorgeht.

2) Um eine gegebene Zahl unserer natürlichen Zahlenreihe in ihre einfachen oder Primfaktoren zu zerlegen, suche man zuerst die kleinste Primzahl, welche in der Zahl enthalten ist, dividire diese durch jene und verfahre mit dem erhaltenen Quotienten ebenso u. s. f. bis endlich einmal der Quotient selbst eine Primzahl wird. Die einzelnen Divisoren und der letzte Quotient bilden alsdann die zu suchenden Primfaktoren.

Beispiele.

1) Die Zahl 36 in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

Auflösung.

2	36
2	18
3	9
	3

Folglich ist

$$36 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3$$
$$= 2^2 \,.\, 3^2.$$

2) Die Zahl 6300 in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

Auflösung.

2	6300
2	3150
3	1575
3	525
5	175
5	35
	7

Folglich ist

$$6300 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7$$
$$= 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7.$$

3) Für allgemeine Monomien sind die Buchstaben, aus welchen dieselben gebildet sind, selbst die einfachen Faktoren. Gehen denselben numerische Coefficienten voran, so zerlege man diese nach vorhin angegebener Regel.

Beispiele.

1) $16a^2bc^3 = 2 . 2 . 2 . 2 . aabccc.$
2) $420x^3y^2z = 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . xxxyyz.$

4) Die Zerlegung eines Polynoms ist im Allgemeinen weit schwieriger, als die der dekadischen Zahlen und Monomien; auch lassen sich dafür keine bestimmten Regeln angeben, sondern Uebung und richtige Auffassung sind die geeignetsten Mittel, welche hier zum Ziele führen.

Wir geben darum statt aller weiteren Erörterungen nachfolgend einige

Beispiele.

1) $ac - bc + cd = (a - b + d)\,c.$
2) $24ab^2c - 20ab^2c^2 - 12bc^2 = (6ab - 5abc - 3c)\,4bc.$
3) $ac - bc + ad - bd = (a - b)\,c + (a - b)\,d$
$= (a - b)\,(c + d).$
4) $x^2 \pm 2xy + y^2 = x^2 \pm xy \pm xy + y^2$
$= x\,(x \pm y) \pm y\,(x \pm y)$
$= (x \pm y)\,(x \pm y).$
5) $m^2 - n^2 = m^2 + mn - mn - n^2$
$= m\,(m + n) - n\,(m + n)$
$= (m + n)\,(m - n).$
6) $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12$
$= x\,(x - 4) + 3\,(x - 4)$
$= (x - 4)\,(x + 3).$
7) $a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = a^2\,(a + b) - b^2\,(a + b)$
$= (a + b)\,(a^2 - b^2)$
$= (a + b)\,(a + b)\,(a - b)$ (Nr. 5.)
8) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2\,(x + 2) - (x + 2)$
$= (x + 2)\,(x^2 - 1)$
$= (x + 2)\,(x + 1)\,(x - 1)$ (Nr. 5).

Anmerkung. Die Faktorenzerlegung kann auch zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maaßes angewendet werden. Ist z. B. zu den drei Zahlen 720, 1080, 2520 das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden und man zerlegt jede derselben in ihre Primfaktoren, also

720 in $2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^4 . 3^2 . 5$
1080 in $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^3 . 5$
2520 in $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$

so ist das Produkt aller den drei Zahlen gemeinschaftlichen Faktoren oder $2^3 . 3^2 . 5 = 8 . 9 . 5 = 360$ das verlangte größte gemeinschaftliche Maaß.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. In vielen Fällen ist dasselbe weit kürzer, als das in §. 49 gelehrte.

§. 55. Aufgaben zur Uebung.

Zerleget folgende Ausdrücke in ihre einfachen Faktoren:

1) 32. 2) 192. 3) 420.
4) 1800. 5) 8190. 6) 6306300.
7) $ac + cx$.
8) $3m^2 + 6mn + 3n^2$.
8a) $x^2 + (a + b) x + ab$.
8b) $y^2 - (a + b) y - ab$.
8c) $z^2 - (a + b) z + ab$.
9) $ax - 2b + 2a - bx$.
10) $cx + 4d + 2c + 2dx$.
11) $4x^2 - 14x + 12$.
12) $6a^2b - 12ab^2 + 9a^2b^2$.
13) $12ac - 6bc - 8ab + 4b^2$.
14) $x^2 - 3xy + xz + 2y^2 - 2yz$.
15) $m^2 - n^2 + 2np - p^2$.
16) $a^4 - b^4$.
17) $x^3 - 2x^2 - x + 2$.
18) $12a^3b - 75ab^3$.
19) $a^3 + b^3$.
20) $a^3 - b^3$.
20a) $a^5 - ab^4 + a^4b - b^5$.
21) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

§. 56. Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrer Zahlen.

1) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache irgend gegebener Zahlen ist offenbar die kleinste derjenigen Zahlen, welche sich in solche Primfaktoren zerlegen lassen, daß aus einzelnen derselben jede der gegebenen Zahlen als Produkt gebildet werden kann.

2) Um daher das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu vorgelegten Zahlen zu finden, zerlege man jede derselben in ihre Primfaktoren und bilde aus diesen in der Weise ein Produkt, daß man diejenigen Faktoren einer jeden derselben unberücksichtigt läßt, welche ein Produkt geben, das schon durch die Faktoren

der vorhergehenden Zahlen gebildet werden kann. Das Produkt der übrigen Faktoren liefert alsdann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

3) Nachstehend wollen wir an einem Beispiele zeigen, wie man am sichersten zu den gewünschten Faktoren gelangt:

Um z. B. zu den Zahlen 6, 8, 10, 12, 15, 18 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu bestimmen, schreibe man sie in beistehender Weise neben einander, suche nun das kleinste gemeinschaftliche Maaß von wenigstens zwei derselben; setze dieses — hier also 2 — voran, dividire der Reihe nach alle durch dieses Maaß theilbare Zahlen und schreibe die erhaltenen Quotienten, sowie die nicht theilbaren Zahlen als zweite Reihe nebeneinander. Hierauf wiederhole man mit dieser Reihe dieselbe Operation und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man zu einer Horizontalreihe gelangt, in welcher keine zwei Zahlen mehr einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Das Produkt aus diesen und allen zur Linken vertikal unter einander stehenden Divisoren oder 2 . 2 . 3 . 5 . 2 . 3 = 360 ist alsdann das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

2	6,	8,	10,	12,	15,	18
2	3,	4,	5,	6,	15,	9
3	3,	2,	5,	3,	15,	9
5	1,	2,	5,	1,	5,	3
	1,	2,	1,	1,	1,	3

4) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß man bei diesem Verfahren sogleich alle Zahlen außer Acht lassen kann, welche als Faktoren in einer, oder mehren der noch übrigen Zahlen auftreten.

Um z. B. zu den Zahlen 2, 4, 8, 10, 12, 20, 24, 36 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden, kann man sogleich die Zahlen 2, 4, 8, 10, 12 ganz unberücksichtigt lassen, da dieselben in den drei anderen Zahlen als Faktoren vorkommen, und die Zerlegung also kürzer auf folgende Weise anschreiben:

2	20,	24,	36
2	10,	12,	18
3	5,	6,	9
	5,	2,	3.

Es ist somit das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

$$= 2 . 2 . 3 . 5 . 2 . 3 = 360.$$

5) Noch mehr Kürze kann dadurch in die Schreibweise gebracht werden, daß man, nachdem wieder die in anderen der

vorgelegten Zahlen als Faktoren vorkommenden Zahlen weggelassen sind, jede der noch bleibenden Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt und nun bei jeder folgenden Zahl diejenigen Faktoren durchstreicht, welche schon in gleicher Anzahl als Faktoren aller vorhergehenden Zahlen vorkommen. Das Produkt aller nicht durchgestrichenen Primfaktoren gibt alsdann das gewünschte Vielfache.

Für obiges Beispiel wäre hiernach zu schreiben:

20 = 2 . 2 . 5
24 = 2 . ~~2~~ . ~~2~~ . 3
36 = ~~2~~ . ~~2~~ . ~~3~~ . 3

und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache wieder
= 2 . 2 . 5 . 2 . 3 . 3 = 360.

6) Bei einiger Uebung kann man auch die durchgestrichenen Faktoren sogleich weglassen und unmittelbar diejenigen Primfaktoren niederschreiben, deren Produkt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bestimmt.

7) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrer relativen Primzahlen ist das Produkt dieser Zahlen selbst.

§. 57. Aufgaben zur Uebung.

Bestimmet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu folgenden Zahlenwerthen:

1) 32, 48, 64.
2) 12, 18, 32, 45, 96.
3) 3, 10, 15, 45, 65, 104.
4) 4, 18, 54, 90, 105, 154, 385, 495, 2310.
5) 21, 35, 77, 91, 1001.
6) 105, 147, 385, 539, 1001, 9317, 105105.

Dritter Abschnitt.

Von den Brüchen.

---

§. 58. Erklärungen.

1) Theilt man die Einheit in eine Anzahl gleicher Theile und nimmt einen oder mehre solcher Theile zusammen, so erhält man eine Zahl, welche gebrochen oder kurzhin ein Bruch heißt.

Um einen Bruch zu bezeichnen, sind also zwei Zahlenwerthe nothwendig. Der eine, welcher angibt, in wie viel Theile die Einheit getheilt ist, heißt der Nenner, der andere, welcher ausdrückt, wie viel solcher Theile genommen werden sollen, der Zähler des Bruches.

2) Um einen Bruch anzuschreiben, zieht man einen horizontalen Strich und setzt den Zähler über, den Nenner unter diesen Strich.

Hiernach drückt z. B. $\frac{a}{b}$ aus, daß man die Einheit in b gleiche Theile getheilt, und a solcher Theile genommen habe.

Man kann darum setzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{\overset{1}{1}}{b} + \frac{\overset{2}{1}}{b} + \frac{\overset{3}{1}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{1}}{b}$$

Von zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist also derjenige der größere, dessen Zähler der größere ist.

So ist z. B. $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$,

oder allgemein $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$, wenn $a > b$.

§. 59. Uebereinstimmung eines Bruches mit einem Quotienten.

Aus den Definitionen eines Bruches und der Multiplication (§. 21) ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{1}{b} \cdot b = \frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{3}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{b}{\breve{1}}}{b} = 1.$$

Also ist

$$\frac{a}{b} \cdot b = \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{\breve{1}}}{b}\right)}^{1} + \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{\breve{1}}}{b}\right)}^{2}$$

$$+ \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{\breve{1}}}{b}\right)}^{3} + \ldots\ldots + \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{\breve{1}}}{b}\right)}^{b}$$

oder wenn man sich diese Ausdrücke vertikal unter einander geschrieben denkt und addirt:

$$\frac{a}{b} \cdot b = \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{b}{\breve{1}}}{b}\right)}^{1} + \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{b}{\breve{1}}}{b}\right)}^{2}$$

$$+ \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{b}{\breve{1}}}{b}\right)}^{3} + \ldots\ldots + \overbrace{\left(\frac{\overset{1}{\breve{1}}}{b} + \frac{\overset{2}{\breve{1}}}{b} + \ldots + \frac{\overset{b}{\breve{1}}}{b}\right)}^{a}$$

$$= \overset{1}{\breve{1}} + \overset{2}{\breve{1}} + \overset{3}{\breve{1}} + \ldots + \overset{a}{\breve{1}} = a.$$

Wir ersehen hieraus, daß *der Bruch eine Zahl ist, welche mit dem Nenner multiplicirt den Zähler als Produkt gibt.*

Vergleichen wir diese Eigenschaft mit der in §. 34 für die Divisionsaufgabe angeführten Definition, so gelangen wir zu folgendem Schlusse:

Ein Bruch drückt ganz allgemein einen Quotienten aus, dessen Dividend und Divisor bezüglich durch den Zähler und Nenner des Bruches gebildet werden.

Es sind somit $\frac{a}{b}$ und a : b identische Ausdrücke und beide werden darum auch auf einerlei Weise gelesen.

Zusatz.

Jede ganze Zahl kann als Bruch von gegebenem Nenner dargestellt werden, indem man den Zähler gleich dem Produkte aus dem Nenner und jener Zahl macht.

Um z. B. a als Bruch anzuschreiben, dessen Nenner = n ist, hat man hiernach $a = \frac{an}{n}$.

§. 60. Benennung und Eintheilung der Brüche.

1) Je nachdem der Zähler eines Bruches kleiner oder größer ist als der Nenner, heißt derselbe bezüglich ein echter oder ein unechter Bruch.

So ist z. B. $\frac{5}{7}$ ein echter, dagegen $\frac{12}{5}$ ein unechter Bruch.

2) Jeder Bruch, dessen Zähler durch den Nenner ohne Rest theilbar ist, heißt ein uneigentlicher Bruch oder Scheinbruch im Gegensatze zu den eigentlichen Brüchen, zu welchen alle übrigen gehören, bei welchen der Zähler kein ganzes Vielfache des Nenners ist.

So sind z. B. $\frac{12}{4}$, $\frac{am}{m}$ uneigentliche, dagegen $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{4}$ eigentliche Brüche.

3) Vertauscht man Zähler und Nenner eines Bruches mit einander, so heißt der neugebildete Bruch der reciproke Werth des ursprünglichen.

Z. B. $\frac{5}{8}$ und $\frac{n}{m}$ sind die reciproken Werthe von $\frac{8}{5}$ und $\frac{m}{n}$.

4) Ein Bruch, dessen Zähler Eins ist, heißt ein einfacher Bruch, Stammbruch oder der reciproke Werth des Nenners.

So sind z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{a}$ einfache Brüche oder die reciproken Werthe von 4, 15 und a.

5) Der Werth eines jeden echten Bruches liegt zwischen 0 und 1, der eines unechten zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen unserer Zahlenreihe, und kann somit als die Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruches angesehen werden.

In dieser Weise als Summe dargestellt, heißt eine Zahl eine **gemischte**.

Z. B. $3 + \frac{5}{8}$ oder kürzer $3\frac{5}{8}$.

6) Brüche, bei welchen der Zähler oder Nenner, oder auch beide zugleich selbst Brüche sind, werden **zusammengesetzte** oder **Doppelbrüche** genannt.

Z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, $\frac{5}{\frac{7}{8}}$, $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{9}}$.

7) Brüche von einerlei Nenner heißen **gleichnamige**.

Z. B. $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{3}{6}$;

$\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$ und $\frac{d}{m}$.

8) Die Brüche werden ferner eingetheilt:

a) in **gemeine** oder **gewöhnliche**,

b) in **künstliche** Brüche.

Zu den **gemeinen** Brüchen gehören alle Brüche, deren Nenner beliebige Zahlen sind; zu den **künstlichen** dagegen solche, deren Nenner auf vorgeschriebene Weise gebildet werden.

Die **künstlichen** Brüche zerfallen wieder

α) in **Decimalbrüche**,

β) in **Kettenbrüche**.

Decimalbrüche sind solche Brüche, deren Nenner 10 heißen, oder durch wiederholte Multiplication der Zahl 10 mit sich gebildet werden können.

Z. B. $\frac{7}{10}$, $\frac{39}{100}$, $\frac{247}{1000}$, $\frac{43}{10000}$.

Kettenbrüche sind Brüche, deren Zähler eine ganze Zahl ist, deren Nenner aber aus der Summe einer ganzen Zahl und einem Bruche, der wiederum ebenso beschaffen sein kann wie jener u. s. f. gebildet wird.

Z. B. $\frac{2}{3 + \frac{4}{7}}$ $\frac{3}{5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3 + \frac{1}{7}}}}$ $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}}$

A. Von den gemeinen Brüchen.

§. 61. Allgemeine Sätze über die Rechnung mit Brüchen.

1) Um gleichnamige Brüche zu addiren, addire man deren Zähler und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner.

Behaupt. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Beweis. $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \left(\frac{\overset{1}{1}}{c} + \frac{\overset{2}{1}}{c} + \frac{\overset{3}{1}}{c} + \ldots + \frac{\overset{a}{1}}{c}\right)$$
$$+ \left(\frac{\overset{1}{1}}{c} + \frac{\overset{2}{1}}{c} + \frac{\overset{3}{1}}{c} + \ldots + \frac{\overset{b}{1}}{c}\right) \text{ (§. 58, 2)}$$
$$= \left(\frac{\overset{1}{1}}{c} + \frac{\overset{2}{1}}{c} + \frac{\overset{3}{1}}{c} + \ldots + \frac{\overbrace{1}^{a+b}}{c}\right)$$
$$= \frac{a+b}{c}$$

Zusätze.

a) Jeder Bruch, dessen Zähler größer als die Einheit ist, läßt sich in eine Summe von Brüchen mit übereinstimmenden Nennern zerlegen.

Beispiel.

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} \text{ u. s. w.}$$

b) Um einen unechten Bruch als gemischte Zahl darzustellen, führe man die angedeutete Division aus.

Beispiele.

1) $\frac{12}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$

2) $\frac{am + b}{m} = \frac{am}{m} + \frac{b}{m} = a + \frac{b}{m}$.

c) Um eine gemischte Zahl als unechten Bruch darzustellen, multiplicire man die Ganzen mit dem Nenner, addire zu

dem Produkte den Zähler und gebe der Summe den Nenner des Bruches als Nenner.

Beispiele.

1) $3\frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{8} + \frac{5}{8} = \frac{24 + 5}{8} = \frac{29}{8}$ (§. 59, Zus.)

1) $a + \frac{b}{m} = \frac{am}{m} + \frac{b}{m} = \frac{am + b}{m}$.

Anmerkung. Man nennt dieses Verfahren das Einrichten der Brüche.

d) Gleichnamige Brüche werden subtrahirt, indem man der Differenz ihrer Zähler den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner gibt.

Beispiele.

1) $\frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{7 - 4}{12} = \frac{3}{12}$.

2) $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$.

2) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man

α) den Zähler mit dieser Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert läßt; oder

β) diese Zahl durch den Nenner des Bruches dividirt und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt.

Behaupt. *α*) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}$

β) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{n}{b} \cdot a$.

Beweis. *α*) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{\overset{1}{a}}{b} + \frac{\overset{2}{a}}{b} + \frac{\overset{3}{a}}{b} + \ldots + \frac{\overset{n}{a}}{b}$ (§. 21, 1)

$= \frac{\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots + \overset{n}{a}}{b}$

$= \frac{an}{b}$

β) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b} = \frac{na}{b} = \frac{n}{b} \cdot a$.

Anmerkung. Vom Satze β macht man besonders dann Gebrauch, wenn der Nenner in die ganze Zahl aufgeht.

Beispiele.

1) $\frac{5}{7} \cdot 6 = \frac{5 \cdot 6}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$.

2) $\frac{4}{5} \cdot 15 = \frac{15}{5} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

3) Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man jene Zahl mit dem Zähler multiplicirt und den Nenner unverändert läßt.

Behaupt. $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b}$

Beweis. Nach §. 21, 1 entsteht das Produkt aus n wie $\frac{a}{b}$ aus der positiven Einheit. Nun erhält man aber $\frac{a}{b}$ aus der positiven Einheit, wenn man diese in b Theile theilt und a solcher Theile nimmt; folglich wird das Produkt aus n erhalten, wenn man n in b gleiche Theile theilt und a solcher zusammenfaßt. Es ist somit

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{\overset{1}{n}}{b} + \frac{\overset{2}{n}}{b} + \frac{\overset{3}{n}}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{n}}{b}$$

$$= \frac{\overset{1}{n} + \overset{2}{n} + \overset{3}{n} + \ldots + \overset{a}{n}}{b} \quad (\S.\ 61,\ 1.)$$

$$= \frac{na}{b}.$$

Beispiel.

$$8 \cdot \frac{5}{7} = \frac{8 \cdot 5}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}.$$

Zusatz.

Aus 2, α und 3 fließt unmittelbar die Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot n = n \cdot \frac{a}{b}$$

d. h. die Ordnung in der Aufeinanderfolge der Faktoren ist willkürlich.

4) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit dieser Zahl multiplicirt und den Zähler unverändert läßt.

Behaupt. $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{bn}$.

Beweis. Nach §. 35 heißt $\frac{a}{b} : n$ eine Zahl suchen, welche mit n multiplicirt, wieder $\frac{a}{b}$ zum Produkte gibt. Bezeichnen wir diese Zahl einstweilen durch x, so muß also sein:

$$nx = \frac{a}{b}$$

oder

$$bnx = a$$

folglich ist

$$x \text{ oder } \frac{a}{b} : n = \frac{a}{bn}.$$

Beispiele.

$$1)\ \frac{3}{7} : 4 = \frac{3}{7 \,.\, 4} = \frac{3}{28}.$$

$$2)\ \frac{25}{3} : 4 = \frac{25}{3 \,.\, 4} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$$

5) Zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividirt.

Behaupt. $\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Beweis. Nach §. 21, 1 wird das Produkt aus $\frac{a}{b}$ erhalten, wie $\frac{c}{d}$ aus Eins. Nun ist aber

$$\frac{c}{d} = \frac{\overset{1}{1}}{d} + \frac{\overset{2}{1}}{d} + \frac{\overset{3}{1}}{d} + \ldots\ldots + \frac{\overset{c}{1}}{d}$$

$$= (\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots\ldots + \overset{c}{1}) : d$$

also wird

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\overset{1}{\frac{a}{b}} + \overset{2}{\frac{a}{b}} + \overset{3}{\frac{a}{b}} + \ldots + \overset{c}{\frac{a}{b}}\right) : d$$

$$= \frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd} \text{ (§. 61, 4.)}$$

Beispiele.

1) $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 7} = \frac{20}{63}$.

2) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{84}{55} = 1\frac{29}{55}$.

Zusatz.

Da $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
so erhalten wir den Satz:

Bei der Multiplication zweier oder mehrer Brüche mit einander ist die Aufeinanderfolge der Faktoren willkürlich.

6) **Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man die Zahl mit dem reciproken Werthe des Bruches multiplicirt.**

Behaupt. $n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a}$

Beweis. Da

$$\left(n \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = \frac{nb}{a} \cdot \frac{a}{b} \text{ (§. 61, 3.)}$$

$$= \frac{abn}{ab} \text{ (§. 61, 5.)}$$

$$= \frac{ab}{ab} \cdot n = 1 \cdot n = n,$$

so ist das Verfahren nach §. 35, 1 gerechtfertigt.

Beispiel.

$$6 : \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{8}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}.$$

Zusatz.

Anstatt eine Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, kann man auch jene Zahl durch den reciproken Werth des Bruches dividiren.

7) Ein Bruch wird auch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner durch diese Zahl dividirt, den Zähler aber unverändert läßt.

Behaupt. $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b : n}$.

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b} = a \cdot \frac{n}{b}$ (§. 61, 2 α.)

$= a : \frac{b}{n} = \frac{a}{b : n}$ (§. 61, 6 Zusatz.)

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Erweiterung des Satzes 2 und wird insbesondere angewendet, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

Beispiel.

$$\frac{7}{12} \cdot 4 = \frac{7}{12 : 4} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

8) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, wenn man

α) jenen mit dem reciproken Werthe von diesem multiplicirt;

β) Zähler und Nenner des Dividenden bezüglich durch Zähler und Nenner des Divisors dividirt.

Behaupt. α) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

β) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$.

Beweis. α) Man erhält umgekehrt:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{cd}{cd} \text{ (§. 61, 5.)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

folglich ist nach §. 35, 1 die Division richtig.

$$\beta) \ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{cb} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{d}$$

$$= \frac{a : c}{b : d}.$$

Anmerkung. Vom Satze β wird in der Regel nur dann Gebrauch gemacht, wenn Zähler und Nenner des Dividenden bezüglich Vielfache des Zählers und Nenners vom Divisor sind.

Beispiele.

1) $\frac{3}{5} : \frac{7}{9} = \frac{3}{5} . \frac{9}{7} = \frac{3 . 9}{5 . 7} = \frac{27}{35}$ (α)

2) $\frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{12 : 3}{25 : 5} = \frac{4}{5}$ (β).

Zusatz.

Ein Bruch wird auch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Zähler durch diese Zahl dividirt, den Nenner aber unverändert läßt.

Denn es ist $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} : \frac{n}{1} = \frac{a : n}{b : 1} = \frac{a : n}{b}$.

Anmerkungen. 1) Dieser Satz ist eine Erweiterung des Satzes 4 und wird angewendet, wenn der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

Z. B. $\frac{12}{7} : 3 = \frac{12 : 3}{7} = \frac{4}{7}$.

2) Kommen bei einer Multiplication oder Division gemischte Zahlen vor, so richte man diese ein und verfahre alsdann nach obigen Regeln.

9) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einerlei Zahl

α) multiplicirt,

β) dividirt.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes fließt unmittelbar aus 5 und 8, β, wenn man daselbst $c = d$ setzt.

Zusatz.

Sind Zähler und Nenner eines Bruches Aggregate, so kann man sämmtliche Richtungszeichen in die entgegengesetzten verwandeln, ohne daß dadurch der Werth des Bruches geändert wird. Denn es ist z. B.

$$\frac{a - b + c}{d - f - g} = \frac{(a - b + c) . - 1}{(d - f - g) . - 1} = \frac{- a + b - c}{- d + f + g}$$

10) Der unter 9, α angeführte Satz gibt uns ein geeignetes Mittel an die Hand, einen Bruch in einen anderen von gegebenem Nenner zu verwandeln.

Zu diesem Ende dividire man mit dem Nenner des vorgelegten Bruches in den gegebenen neuen Nenner und multiplicire

mit dem erhaltenen Quotienten sowohl Zähler als Nenner des Bruches.

Beispiel.

Um $\frac{5}{7}$ in einen Bruch, dessen Nenner 42 heißt, zu verwandeln, hat man hiernach

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \,.\, (42 : 7)}{7 \,.\, (42 : 7)} = \frac{5 \,.\, 6}{7 \,.\, 6} = \frac{30}{42}.$$

11) Es ist nun auch leicht mehre Brüche unter einerlei Nenner zu bringen oder gleichnamig zu machen, indem man nämlich ein gemeinschaftliches Vielfache zu sämmtlichen Nennern der gegebenen Brüche bestimmt und jeden derselben auf die oben angeführte Weise in einen anderen verwandelt, dessen Nenner eben jenes Vielfache ist. Ist das gesuchte Vielfache zugleich das kleinste, so nennt man es auch den Haupt- oder Generalnenner der vorgelegten Brüche und wenn von einer Gleichnamigmachung mehrer Brüche die Rede ist, so wird stets stillschweigend vorausgesetzt, daß der gemeinschaftliche Nenner zugleich der Hauptnenner sei.

Beispiele.

1) Die Brüche $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{8}{9}$ gleichnamig zu machen.

Auflösung.

Nach §. 56 findet man zu den Nennern 8, 6, 12, 9 als kleinstes gemeinschaftliches Vielfache oder als Hauptnenner die Zahl 72 und man hat daher nach 10:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \,.\, (72 : 8)}{8 \,.\, (72 : 8)} = \frac{3 \,.\, 9}{8 \,.\, 9} = \frac{27}{72}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \,.\, (72 : 6)}{6 \,.\, (72 : 6)} = \frac{5 \,.\, 12}{6 \,.\, 12} = \frac{60}{72}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \,.\, (72 : 12)}{12 \,.\, (72 : 12)} = \frac{7 \,.\, 6}{12 \,.\, 6} = \frac{42}{72}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \,.\, (72 : 9)}{9 \,.\, (72 : 9)} = \frac{8 \,.\, 8}{9 \,.\, 8} = \frac{64}{72}$$

2) Die Brüche $\frac{2a}{3bc}, \frac{5b}{7a}, \frac{3ab}{2c}, \frac{c}{4ab}$ gleichnamig zu machen.

Auflösung.

Als Hauptnenner findet man 84abc und nun ist

$$\frac{2a}{3bc} = \frac{2a\,.\,(84abc : 3bc)}{3bc\,.\,(84abc : 3bc)} = \frac{2a\,.\,28a}{3bc\,.\,28a} = \frac{56a^2}{84abc}$$

$$\frac{5b}{7a} = \frac{5b\,.\,(84abc : 7a)}{7a\,.\,(84abc : 7a)} = \frac{5b\,.\,12bc}{7a\,.\,12bc} = \frac{60b^2c}{84abc}$$

$$\frac{3ab}{2c} = \frac{3ab\,.\,(84abc : 2c)}{2c\,.\,(84abc : 2c)} = \frac{3ab\,.\,42ab}{2c\,.\,42ab} = \frac{126a^2b^2}{84abc}$$

$$\frac{c}{4ab} = \frac{c\,.\,(84abc : 4ab)}{4ab\,.\,(84abc : 4ab)} = \frac{c\,.\,21c}{4ab\,.\,21c} = \frac{21c^2}{84abc}.$$

12) Enthalten Zähler und Nenner eines Bruches einen und denselben Faktor, so kann man nach 9, β beide durch diesen dividiren, ohne daß dadurch der Werth des Bruches geändert wird. Hiernach ist uns ein Mittel an die Hand gegeben, in manchen Fällen einen Bruch in kleineren Zahlen auszudrücken, oder, wie man zu sagen pflegt, denselben abzukürzen, zu verkleinern oder zu reduciren.

Dividirt man Zähler und Nenner durch das größte gemeinschaftliche Maaß beider — wenn sie ein solches haben — so erhält man den Werth des betreffenden Bruches in den kleinsten Zahlen dargestellt (§. 51, 13) und man sagt in diesem Falle, man habe den Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht.

Beispiele.

1) $\frac{16}{24} = \frac{16 : 8}{24 : 8} = \frac{2}{3}.$

2) $\frac{acx}{bcx} = \frac{acx : cx}{bcx : cx} = \frac{a}{b}.$

3) $\frac{a + b}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b) : (a + b)}{(a^2 - b^2) : (a + b)} = \frac{1}{a - b}.$

13) Sind Brüche mit verschiedenen Nennern zu addiren, oder zu subtrahiren, so mache man dieselben zuerst nach 10 gleichnamig und verfahre alsdann wie bei 1.

Beispiele.

1) $\frac{5}{8} + \frac{4}{5} + \frac{11}{16} + \frac{17}{20} = \frac{50}{80} + \frac{64}{80} + \frac{55}{80} + \frac{68}{80} =$
$\frac{50 + 64 + 55 + 68}{80} = \frac{237}{80} = 2\frac{77}{80}.$

2) $\frac{11}{12} - \frac{5}{8} = \frac{22}{24} - \frac{15}{24} = \frac{22 - 15}{24} = \frac{7}{24}.$

3) $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{anp}{mnp} - \frac{bmp}{mnp} + \frac{cmn}{mnp}$

$= \frac{anp - bmp + cmn}{mnp}.$

4) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)(a+b)}{a^2 - b^2} - \frac{(a-b)(a-b)}{a^2 - b^2}$

$= \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 - b^2}$

$= \frac{4ab}{a^2 - b^2}.$

14) Um gemischte Zahlen zu addiren, addire man zuerst nach vorstehenden Regeln die Brüche, verwandle, wenn es möglich ist, die erhaltene Summe in eine gemischte Zahl und addire deren Ganzen zur Summe der Ganzen der Summanden.

Beispiel.

$205\frac{11}{12} + 36\frac{7}{8} + 416\frac{17}{24} + 3254\frac{4}{5} = ?$

Auflösung.

Man schreibt am bequemsten die Summanden vertical unter einander und verfährt alsdann auf nachstehende Weise.

	120
$205\frac{11}{12}$	10 . 11 = 110
$36\frac{7}{8}$	15 . 7 = 105
$416\frac{17}{24}$	5 . 17 = 85
$3254\frac{4}{5}$	24 . 4 = 96
16	
Summe = $3927\frac{1}{2}$	$= \frac{396}{120} = 16\frac{12}{24} = 16\frac{1}{2}.$

Zusatz.

Da $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$= \frac{bc + ad}{bd} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd}$

$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b},$

so ist auch bei der Addition der Brüche die Ordnung in Hinsicht der Aufeinanderfolge der Summanden willkürlich.

15) Um gemischte Zahlen von einander zu subtrahiren, subtrahire man zuerst die Brüche und hierauf die Ganzen.

Ist aber der Minuend eine ganze oder eine gemischte Zahl, deren Bruch einen kleineren Werth hat, als der Bruch des Subtrahenden, so nehme man von den Ganzen des Minuenden ein Ganzes hinweg, drücke dasselbe als Bruch aus, dessen Nenner gleich dem Hauptnenner ist, addire solchen zum Bruche des Minuenden und subtrahire hierauf.

Beispiele.

1) $45\frac{17}{18} - 21\frac{5}{12} =$

	36
$45\frac{17}{18}$	$2 \cdot 17 = 34$
$21\frac{5}{12}$	$3 \cdot 5 = 15$
Differenz $= 24\frac{19}{36}$	$\frac{19}{36}$

2) $48 - 25\frac{5}{8} =$

	8
48	8
$25\frac{5}{8}$	5
Differenz $= 22\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

3) $697\frac{3}{5} - 243\frac{11}{12} =$

	60
$697\frac{3}{5}$	$12 \cdot 3 = 36$
	$\frac{60}{96}$
$243\frac{11}{12}$	$5 \cdot 11 = 55$
Differenz $= 453\frac{41}{60}$	$\frac{41}{60}$

4) $800\frac{4}{7} - 326\frac{7}{8} =$

	56
$800\,\frac{4}{7}$	$8 \cdot 4 = 32$
	$\frac{56}{88}$
$326\,\frac{7}{8}$	$7 \cdot 7 = 49$
Differenz $= 473\frac{39}{56}$	$\frac{39}{56}$

§. 62. Sätze über die Werthveränderung der Brüche.

1) **Von zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige der größere, dessen Nenner der kleinere ist.***)

Behaupt. $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+z}$.

Beweis. Nach §. 61, 9 α ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,(b+z)}{b\,(b+z)}$$

und

$$\frac{a}{b+z} = \frac{ab}{b\,(b+z)}$$

und da offenbar

*) Bei nachfolgenden Sätzen wird stets vorausgesetzt, daß Zähler und Nenner der in den Untersuchungen auftretenden Brüche positiv ausfallen, da alle übrigen Fälle kein besonderes Interesse haben.

$$a\,(b+z) > ab$$

so ist auch

$$\frac{a\,(b+z)}{b\,(b+z)} > \frac{ab}{b\,(b+z)}$$

oder

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{b+z} \quad (\S.\ 61,\ 9\ \beta)$$

Ebenso ist $\frac{8}{11} > \frac{8}{13}$, $\frac{7}{12} > \frac{7}{19}$ u. s. w.

2) Addirt man zum Zähler und Nenner eines Bruches ein und dieselbe positive Zahl, so wird der Werth des Bruches vergrößert oder vermindert, je nachdem der Bruch ein echter oder unechter ist.

Behaupt. $\frac{a}{b} \lessgtr \frac{a+z}{b+z}$, wenn $a \lessgtr b$.

Beweis. Nach §. 61, 9 α hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,(b+z)}{b\,(b+z)} = \frac{ab+az}{b\,(b+z)}$$

und

$$\frac{a+z}{b+z} = \frac{b\,(a+z)}{b\,(b+z)} = \frac{ab+bz}{b\,(b+z)}.$$

Ist nun $a \lessgtr b$, so ist $az \lessgtr bz$,

somit auch

$$(ab+az) \lessgtr (ab+bz) \quad (\S.\ 20,\ 1.)$$

folglich

$$\frac{ab+az}{b\,(b+z)} \lessgtr \frac{ab+bz}{b\,(b+z)}.$$

oder

$$\frac{a\,(b+z)}{b\,(b+z)} \lessgtr \frac{b\,(a+z)}{b\,(b+z)}.$$

oder

$$\frac{a}{b} \lessgtr \frac{a+z}{b+z} \quad (\S.\ 61,\ 9\ \beta.)$$

Z. B. $\frac{5}{7} < \frac{5+6}{7+6}$ oder $< \frac{11}{13}$; $\frac{18}{5} > \frac{18+4}{5+4}$ oder $> \frac{22}{9}$.

3) Subtrahirt man vom Zähler und Nenner eines Bruches ein und dieselbe positive Zahl, so wird der Werth des Bruches vermindert oder vergrößert, je nachdem der Bruch ein echter oder unechter ist.

Behaupt. $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a-z}{b-z}$, je nachdem $a \lessgtr b$.

Beweis. Nach 2 folgt unmittelbar

$$\frac{a-z}{b-z} \gtrless \frac{(a-z)+z}{(b-z)+z}$$

$$\lessgtr \frac{a}{b}, \text{ je nachdem } (a-z) \lessgtr (b-z)$$

oder $a \lessgtr b$ (§. 20, 1).

Z. B. $\frac{7}{9} > \frac{7-2}{9-2}$ oder $> \frac{5}{7}$; $\frac{8}{5} < \frac{8-2}{5-2}$ oder $< \frac{6}{3}$.

○ 4) Addirt man zum Zähler eines Bruches eine positive Zahl und subtrahirt dieselbe Zahl vom Nenner, so wird der Werth des Bruches vergrößert.

Behaupt. $\frac{a}{b} < \frac{a+z}{b-z}$

Beweis. Nach §. 61, 9 α hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b-z)}{b(b-z)} = \frac{ab-az}{b(b-z)},$$

$$\frac{a+z}{b-z} = \frac{b(a+z)}{b(b-z)} = \frac{ab+bz}{b(b-z)}$$

Mag nun $a \gtrless b$, also $az \gtrless bz$ sein, so ist immer

$$(ab-az) < (ab+bz)$$

also auch

$$\frac{ab-az}{b(b-z)} < \frac{ab+bz}{b(b-z)}.$$

oder

$$\frac{a(b-z)}{b(b-z)} < \frac{b(a+z)}{b(b-z)}$$

oder

$$\frac{a}{b} < \frac{a+z}{b-z} \text{ (§. 61, 9 } \beta).$$

Z. B. $\frac{5}{9} < \frac{5+4}{9-4}$ oder $< \frac{9}{5}$; $\frac{12}{7} < \frac{12+4}{7-4}$ oder $< \frac{16}{3}$.

○ 5) Subtrahirt man vom Zähler eines Bruches eine positive Zahl und addirt dieselbe Zahl zum Nenner, so wird der Werth des Bruches vermindert.

Behaupt. $\frac{a}{b} > \frac{a-z}{b+z}$

Beweis. Nach 4 folgt unmittelbar

$$\frac{a-z}{b+z} < \frac{(a-z)+z}{(b+z)-z}$$

oder $\frac{a - z}{b + z} < \frac{a}{b}$.

Z. B. $\frac{11}{15} > \frac{11 - 2}{15 + 2}$ oder $< \frac{9}{17}$.

§. 63. Aufgaben zur Uebung.

1) $(24\frac{11}{15} - 12\frac{17}{18}) + (45 - 23\frac{7}{8}) = ?$

2) $(74\frac{5}{6} + 23\frac{7}{9} + 16\frac{13}{24}) - (13\frac{5}{18} + 10\frac{2}{3} + 16\frac{4}{7}) = ?$

3) $\frac{3a}{b} + \frac{5c}{b} - \frac{6d}{b} = ?$

4) $\frac{4m}{xy} - \frac{2n}{xy} + \frac{3p}{xy} = ?$

5) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = ?$

6) $\frac{3ab}{4c} - \frac{2c}{3b^2} + \frac{3a}{8bc} = ?$

7) $\frac{5x}{3y} + \frac{7y}{4z} + \frac{3z}{2x} = ?$

8) $\frac{3ab}{5c^2} - \frac{2a}{3bc} + \frac{3}{4abc} = ?$

9) $\frac{12ab}{13\,(a + b)} + \frac{3a^2b - 5ab^2}{26\,(a^2 - b^2)} = ?$

10) $\frac{xz}{x^2 - 16b^2} + \frac{y}{x + 4b} = ?$

11) $\frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b} = ?$

12) $x + y - \frac{x^2}{x - y} = ?$

13) $\frac{3m - 4n}{5} - \frac{2m - 3n}{8} + \frac{8m - 5n}{12} - \frac{7m - 4n}{15} = ?$

14) $\frac{5a - 3b}{6a\,(a + b)} - \frac{2a - 3b}{3a\,(a - b)} = ?$

15) $\left(\frac{8a^2 - 5b}{6ab} - 5a\right) - \left(\frac{3a + 7b}{5b} - \frac{2}{3}\right) = ?$

16) $\frac{3a - 4b}{x + y} - \frac{2a - 8b}{x - y} + \frac{5ax - 2by}{x^2 - y^2} = ?$

17) $\left(\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y}\right) + \left(x + y - \frac{x^2 - y^2}{x - y}\right) = ?$

18) $\frac{5x + 2y}{3(x + y)} - \frac{2x - 3y}{4(x - y)} + \frac{5x^2 - 2y^2}{6(x^2 - y^2)} = ?$

18a) $\frac{3(x - 2y)}{5(2x + y)} - \frac{2(2x - 5y)}{3(x - 3y)} - \frac{3x^2 - 4xy + 7y^2}{30x^2 - 75xy - 45y^2} = ?$

18b) $2a^2 - a + \frac{5a^4 - 7a^3 + 3a}{a^3 - 2a^2 + 1} = ?$

---

19) a) $\frac{5}{12} \cdot 7 = ?$; b) $16\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = ?$; c) $4\frac{8}{15} \cdot 2\frac{1}{7} = ?$

20) a) $\frac{m}{n} \cdot p = ?$; b) $\frac{7y}{3y} \cdot 5a = ?$

21) a) $\frac{3ab}{5c} \cdot \frac{6a}{7bc} = ?$; b) $\frac{5a}{3bc} \cdot - \frac{2b}{3ac} = ?$

22) $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{5b}{6c} \cdot - \frac{7c}{8d} = ?$

22a) $\left(\frac{3a - 2b}{2a - 3b} - \frac{5a + 2b}{2a + 3b}\right)\left(\frac{96a - 329b}{16(a - 4b)} - \frac{80a - 9b}{16a}\right) = ?$

22b) $\frac{8x^3 + 4x^2}{x^2 + 3} \cdot \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = ?$

23) $\left(\frac{6a^2}{5b^2} + \frac{3ab}{5c} - \frac{4b^2}{3c^2} - 8b\right) \cdot - \frac{3ac}{4b} = ?$

24) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) = ?$

25) $\left(\frac{3m}{4n} - \frac{2n}{5m} + 6\right)\left(\frac{2m}{3n} - \frac{8n}{3m}\right) = ?$

26) $\left(\frac{4x}{5y} - \frac{7a}{4b}\right)\left(\frac{4x}{5y} + \frac{7a}{4b}\right) = ?$

27) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(a - b + c\right) = ?$

28) $\left(\frac{5x^2}{6y^2} - \frac{3xy}{4z} + \frac{z^2}{xy}\right)\left(\frac{xy}{z^2} - \frac{5z}{6xy}\right) = ?$

29) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2ac}{3b} - \frac{4c^2}{5b^2}\right)\left(\frac{5a^2}{2b^2} + \frac{3ac}{4b} - \frac{c^2}{2b^2}\right) = ?$

---

30) a) $3\frac{4}{5} : 7 = ?$; b) $2\frac{1}{3} : \frac{5}{8} = ?$; c) $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3} = ?$

31) a) $\frac{m}{n} : p = ?$; b) $x : \frac{y}{z} = ?$; c) $\frac{5m}{3n} : 2mn = ?$

32) $\frac{5x^2y^2}{3vz^2} : -\frac{10xy^2}{11v^2z} = ?$

33) $8ab : \frac{4a^2b}{5cd} = ?$

33a) $\frac{a^6 + 8}{a^3 - 8} : \frac{a^2 + 2}{a - 2} = ?$

34) $\left(\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m+n}\right) : \left(\frac{n}{m-n} + \frac{m}{m+n}\right) = ?$

35) $\dfrac{\frac{m+n}{m-n} - 1}{\frac{m-n}{m+n} + 1} : \frac{m+n}{m-n} = ?$

35a) $\left\{1 + \dfrac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}}{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}}\right\} : \left\{1 - \dfrac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}\right\} = ?$

35b) $\left[\frac{a^4 + 1}{a^2 + 1} - a^4\right] : \frac{1 - a^6}{1 + a^2} = ?$

36) $\left(\frac{5a}{6b} - \frac{3a}{5c} + \frac{7b}{4a}\right) : -\frac{3ab}{c} = ?$

37) $\left(-\frac{5x^2}{3y^2} + \frac{8yz}{3x} - \frac{7y^2}{4z}\right) : \frac{8xy}{7z} = ?$

38) $\left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{16a}{15c} - \frac{2b^2}{c^2}\right) : \left(\frac{3a}{4b} - \frac{5b}{2c}\right) = ?$

39) $\left(\frac{9x^2}{16y^2} - 1 + \frac{4y^2}{9x^2}\right) : \left(\frac{3x}{4y} - \frac{2y}{3x}\right) = ?$

40) $\left(\frac{8a^3}{b^3} + \frac{36a^2c}{b^2d} + \frac{54ac^2}{bd^2} + \frac{27c^3}{d^3}\right) : \left(\frac{2a}{b} + \frac{3c}{d}\right) = ?$

41) $\left(\frac{5x^2}{4b} - \frac{25b}{6} - \frac{35x}{6} + \frac{3a}{2} - \frac{5ab^2}{x^2} - \frac{7ab}{x}\right) : \left(\frac{5x}{3a} + \frac{2b}{x}\right) = ?$

42) $(1 + a) : (1 - a) = ?$

43) $(a + b) : (a - b) = ?$

○ §. 64. Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen mit positiven Gliedern durch Multiplication und Division.

1) Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, oder dividirt gibt übereinstimmend Ungleiches.

Voraussf. Es sei $a \gtrless b$,

aber $\underline{c = d;}$

Behaupt. so ist $ac \gtrless bd$ und $\frac{a}{c} \lessgtr \frac{b}{d}$.

Beweis. Setzen wir $a = b \pm z$,

also $ac = bc \pm cz$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \pm \frac{z}{c}$

wo das Zeichen $+$ dem Zeichen $>$ und das Zeichen $-$ dem Zeichen $<$ entspricht, so folgt:

$$ac \gtrless bc \text{ und } \frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{c}$$

oder da $c = d$

ist, auch $ac \gtrless bd$ und $\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{d}$.

2) Gleiches durch Ungleiches dividirt gibt nicht übereinstimmend Ungleiches.

Voraussetzung. Es sei $a = b$

$$c \gtrless d$$

Behauptung, so ist $\frac{a}{c} \lessgtr \frac{b}{d}$.

Beweis. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus §. 62, 1.

3) Ungleiches mit übereinstimmend Ungleichem multiplicirt gibt übereinstimmend Ungleiches.

Voraussetzung. Es sei $a \gtrless b$ und $c \gtrless d$

Behauptung, so ist auch $ac \gtrless bd$.

Beweis. Wir erhalten nach Obigem aus den Beziehungen:

$$a \gtrless b = b$$

$$\underline{c = c \gtrless d}$$

durch Multiplication $ac \gtrless bc \gtrless bd$

folglich ist $ac \gtrless bd$.

4) Ungleiches durch nicht übereinstimmend Ungleiches dividirt gibt mit jenem übereinstimmend Ungleiches.

Voraussf. Es sei $a \gtrless b$

und $c \lessgtr d$

Behaupt. so ist $\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{d}$.

Beweis. Aus den Beziehungen:

$$a \gtrless b = b$$

$$c = c \lessgtr d$$

erhalten wir durch Division

$$\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{c} \gtrless \frac{b}{d}$$

also auch

$$\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{d}.$$

5) Ungleiches mit nicht übereinstimmend Ungleichem multiplicirt gibt Unbestimmtes.

Voraussf. Es sei $a \gtrless b$

$c \lessgtr d$

Behaupt. so ist $ac \stackrel{>}{\stackrel{=}{<}} bd$.

Beweis. Setzen wir:

$$a = b \pm z \text{ und } c = d \mp z'$$

so folgt:

$$ac = (b \pm z)(d \mp z') = bd \pm dz - (zz' \pm bz')$$

und je nachdem nun

$$\pm dz \stackrel{>}{\stackrel{=}{<}} zz' \pm bz'$$

ist, kann sein

$$ac \stackrel{>}{\stackrel{=}{<}} bd.$$

6) Ungleiches durch übereinstimmend Ungleiches dividirt gibt Unbestimmtes.

Voraussf. Es sei $a \gtreqless b$

$c \gtreqless d$

Behaupt. so ist $\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}$.

Beweis. Setzen wir

$$a = b \pm z \text{ und } c = d \pm z',$$

so ist $$\frac{a}{c} = \frac{b \pm z}{d \pm z'} = \frac{b \pm z}{d\left(1 \pm \frac{z'}{d}\right)}$$

oder $$\frac{a}{c}\left(1 \pm \frac{z'}{d}\right) = \frac{b}{d} \pm \frac{z}{d}$$

oder $$\frac{a}{c} \pm \frac{a}{c} \cdot \frac{z'}{d} = \frac{b}{d} \pm \frac{z}{d}$$

oder $$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \pm \frac{z}{d} \mp \frac{a}{c} \cdot \frac{z'}{d}.$$

Je nachdem also

$$\frac{z}{d} \gtreqless \frac{a}{c} \cdot \frac{z'}{d}$$

ist für das obere Zeichen

$$\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}'$$

und für das untere

$$\frac{a}{c} \lesseqgtr \frac{b}{d}.$$

7) Für den Fall, daß die Glieder der Gleichungen oder Ungleichungen zum Theil negativ sind, lassen sich aus Vorstehendem und dem über die Zu- und Abnahme solcher Zahlen früher Mitgetheilten die entsprechenden Beziehungen leicht auffinden.

Ist z. B. $a > b, \; -c = -c$,

so ist $\quad -ac < -bc$ u. s. w.

§. 65. Von den unendlich groß und unendlich klein werdenden Zahlen.

1) Jede noch so kleine gegebene Zahl k muß durch fortgesetzte Vervielfältigung größer werden, als jede andere noch so

große gegebene Zahl g, und von jeder noch so großen gegebenen Zahl g läßt sich immer ein Theil angeben, der kleiner ist, als jede noch so kleine gegebene Zahl k.

Es kann also n stets so bestimmt werden, daß man hat

$$nk > g \text{ und } \frac{g}{n} < k.$$

2) Von einem Ausdrucke, dessen numerischer Werth größer werden kann, als jede noch so große angebbare Zahl, sagt man, er werde unendlich groß oder er habe das unendlich Große zur Grenze und deutet die Eigenschaft, daß derselbe bereits jeden noch so großen angebbaren Werth überschritten hat, durch das Zeichen ∞ an.

Anmerkung. Lassen wir z. B. den Zähler a eines Bruches $\frac{a}{b}$ unverändert, den Nenner b aber fort und fort abnehmen, so wird der numerische Werth des Bruches fort und fort wachsen und um so größer werden, je mehr sich der Nenner der Null nähert.

3) Im Gegensatze zu den unendlich groß werdenden Ausdrücken sagt man von einem Ausdrucke, dessen numerischer Werth fort und fort ohne Ende abnehmen, sich der Null immer mehr und mehr nähern und kleiner werden kann, als jede noch so kleine angebbare Zahl, er werde unendlich klein oder er habe die Null zur Grenze.

Ist also 0 das Symbol des unendlich klein Werdenden und bezeichnet a irgend einen endlichen Werth, so hat man:

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ und } \frac{a}{\infty} = 0.$$

Anmerkung. Da man in der Regel voraussetzt, der betreffende Ausdruck habe bereits seine Grenze erreicht, so nennt man in diesem Sinne denselben auch bezüglich unendlich groß, oder unendlich klein.

4) Eine unendlich groß werdende Zahl bleibt unverändert, wenn man zu ihr eine endliche Zahl addirt oder von ihr subtrahirt.

Beweis. Da in dem Unendlichwerden schon jede denkbare Zunahme enthalten ist, so folgt unmittelbar

$$\infty + a = \infty$$

und ebenso

$$\infty = \infty - a.$$

5) Eine endliche Zahl wird durch Hinzufügen, oder Hinwegnehmen einer unendlich klein werdenden Zahl nicht geändert.

Beweis. Eine Zu- oder Abnahme einer Zahl durch Hinzufügen oder Hinwegnehmen einer anderen Zahl ist nur dann möglich, wenn diese einen bestimmten Werth hat. Für eine unendlich klein werdende Zahl ist aber eben dieser Werth der Grenzwerth oder die Null.

6) Ist k eine noch so kleine gegebene Zahl, so kann immer eine noch kleinere Zahl w bestehen, von welcher jedes noch so große endliche Vielfache kleiner ist, als jene Zahl k.

Beweis. Da $\frac{k}{n}$ immer noch einen angebbaren Werth haben muß, so lange n endlich ist, so kann w immer so angenommen werden, daß man hat:

$$w < \frac{k}{n},$$

also

$$nw < k \quad (\S.\ 64,\ 1).$$

Zusatz.

Jedes noch so große endliche Vielfache des unendlich Kleinen ist unendlich klein.

7) Ist k eine noch so kleine gegebene Zahl, so können immer noch solche Zahlen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ bestehen, von welchen die Summe, sowie die Summe der Produkte irgend endlicher Vielfacher derselben, kleiner ist als jene Zahl k.

Beweis. Nach vorhergehendem Satze können $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ stets so angenommen werden, daß die Beziehungen bestehen:

$$w_1 < \frac{k}{n},\ w_2 < \frac{k}{n},\ w_3 < \frac{k}{n},\ \ldots\ w_n < \frac{k}{n};$$

und

$$n_1 w_1 < \frac{k}{n},\ n_2 w_2 < \frac{k}{n},\ n_3 w_3 < \frac{k}{n},\ \ldots\ n_n w_n < \frac{k}{n};$$

dann ist aber

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n < \frac{k}{n} \cdot n \text{ oder } < k,$$

und

$$n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 + \ldots + n_n w_n < k.$$

Zusatz.

Die Summe, sowie die Summe irgend endlicher Vielfacher unendlich kleiner Zahlen ist unendlich klein.

○ 8) Ist jede der zwei Differenzen

$$a_1 - b_1 \text{ und } a_2 - b_2$$

unendlich klein werdend, so ist es auch die Differenz

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2).$$

Beweis. Bezeichnet k eine noch so kleine angebbare Zahl, so kann man nach der Voraussetzung dennoch annehmen

$$a_1 - b_1 < \frac{k}{2}$$

$$a_2 - b_2 < \frac{k}{2}$$

Durch Addition erhält man aber hieraus

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) < k \text{ (§. 20, 3).}$$

Nach 3) ist somit diese Differenz unendlich klein werdend.

○ 9) Ist jede der zwei Differenzen

$$a_1 - b_1 \text{ und } a_2 - b_2$$

unendlich klein werdend, so ist es auch die Differenz

$$a_1\, a_2 - b_1\, b_2.$$

Beweis. Bezeichnen k, k_1 und k_2 noch so kleine angebbare Zahlen, so hat man

$$a_1 - b_1 < k_1 \text{ und } a_2 - b_2 < k_2$$

oder $a_1 < k_1 + b_1$ und $a_2 < k_2 + b_2$ (§. 20, 1.)

also auch

$$a_1\, a_2 < (k_1 + b_1)\,(k_2 + b_2) \text{ (§. 64, 3.)}$$

oder $a_1\, a_2 < k_1\, k_2 + b_1\, k_2 + b_2\, k_1 + b_1\, b_2$,

oder $a_1\, a_2 - b_1\, b_2 < k_1\, k_2 + b_1\, k_2 + b_2\, k_1$

Nach 7) können wir aber stets k_1 und k_2 so klein annehmen, daß

$$k_1\, k_2 + b_1\, k_2 + b_2\, k_1 < k$$

wird; dann ist also auch

$$a_1\, a_2 - b_1\, b_2 < k$$

d. h. unendlich klein werdend.

10) Fallen zwei Zahlen a_1 und a_2 fortwährend zwischen zwei andere Zahlen b_1 und b_2, je mehr man diese auch einander nähern läßt, so sind jene Zahlen einander gleich.

Beweis. Nehmen wir an, es bleibe $a_1 > a_2$, so könnte, wenn b_1 und b_2 einander sich nähern, jedenfalls einmal

$$b_1 - b_2 < a_1 - a_2$$

werden.

Da nun aber nach der Voraussetzung

$$b_1 > a_1 > b_2$$
$$b_1 > a_2 > b_2$$

also

$$b_1 > a_1$$
$$b_2 < a_2,$$

so folgt

$$b_1 - b_2 > a_1 - a_2 \quad (\text{§. } 20, 4.)$$

Es könnte somit $b_1 - b_2$ zu gleicher Zeit kleiner und größer als $a_1 - a_2$ sein, was ungereimt ist.

Die Annahme $a_1 > a_2$ ist daher unmöglich.

Ebenso läßt sich zeigen, daß a_1 nicht kleiner als a_2 sein kann; folglich muß $a_1 = a_2$ sein.

B. Von den Decimalbrüchen.

§. 66. Erklärungen.

1) Jeder Bruch, dessen Nenner 10 ist, oder durch wiederholte Multiplication der Zahl 10 mit sich erhalten werden kann, oder jede gemischte Zahl, deren gebrochener Theil die angeführte Eigenschaft besitzt, heißt ein Decimalbruch; z. B. $\frac{9}{10}$, $7\frac{37}{100}$, $16\frac{247}{1000}$.

2) Schreiben wir statt des Bruches $\frac{247}{1000}$ die Summe $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$, so ersehen wir hieraus, daß das Gesetz unseres Zahlensystems, wonach der Werth einer jeden Ziffer einer ganzen Zahl stets den zehnten Theil der zunächst links stehenden Ziffer beträgt, auch auf die Ziffern des Zählers eines Decimalbruches übertragen werden kann, so daß also auch hier der Werth einer jeden derselben aus seiner Stellung sich wird leicht erkennen lassen. Es bedeutet nämlich die erste links stehende Ziffer des Zählers Zehntel, die zweite Hundertel u. s. w.

3) Um daher einen Decimalbruch anzuschreiben, hat man nicht nöthig den Nenner besonders anzugeben, sondern nur die Ganzen von dem Zähler durch ein Zeichen zu trennen und für jede fehlende Stelle des Zählers eine Null zu setzen.

Als Trennungszeichen hat man ein Komma oder einen etwas in die Höhe gesetzten Punkt gewählt und nennt diese Zeichen Decimalzeichen. Die rechts davon stehenden Ziffern heißen dann die Decimalstellen.

Beispiele.

1) $\frac{367}{1000} = 0{,}367 = 0{\cdot}367.$

2) $45\frac{39}{100} = 45{,}39 = 45{\cdot}39.$

3) $748\frac{8}{1000} = 748{,}008 = 748{\cdot}008.$

4) $5\frac{27}{1000000} = 5{,}000027 = 5{\cdot}000027.$

5) $94\frac{7}{10000} = 94{,}0007 = 94{\cdot}0007.$

6) $\frac{307}{100000} = 0{,}00307 = 0{\cdot}00307.$

Zusätze.

a) Der Werth eines Decimalbruches bleibt unverändert, wenn man ihm rechts beliebig viele Nullen anhängt; z. B. 0,47 = 0,47000.

b) Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, ... 10^n multiplicirt, wenn man das Decimalzeichen bezüglich um 1, 2, 3, . . n Stellen gegen rechts rückt.

Beispiele.

1) $3{,}56874 \,.\, 10 = 35{,}6874.$
2) $3{,}56874 \,.\, 100 = 356{,}874.$
3) $3{,}56874 \,.\, 10000000 = 35687400.$

c) Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000, ... 10^n dividirt, wenn man das Decimalzeichen bezüglich um 1, 2, 3, . . n Stellen gegen links rückt.

Beispiele.

1) $784{,}05 : 10 = 78{,}405.$
2) $784{,}05 : 100 = 7{,}8405.$
3) $784{,}05 : 1000 = 0{,}78405.$
4) $784{,}05 : 100000 = 0{,}0078405.$

4) Ein Decimalbruch kann auf folgende drei Arten gelesen werden:

α) Man gibt zuerst die Ganzen an und bezeichnet alsdann der Reihe nach die Decimalstellen ihrem Werthe nach.

β) Man gibt nach den Ganzen die Zahl an, welche durch die Decimalstellen gebildet wird und bezeichnet darnach den dem Decimalbruch entsprechenden Nenner.

γ) Man bezeichnet zuerst die Ganzen und gibt dann der Reihe nach die aufeinanderfolgenden Decimalstellen an.

Hiernach wäre z. B. der Decimalbruch 8,2056 zu lesen:
nach α) : 8 Ganze, 2 Zehntel, 0 Hundertel, 5 Tausendtel, 6 Zehntausendtel,
„ β) : 8 Ganze, 2056 Zehntausendtel.
„ γ) : 8 Ganze, Zwei, Null, Fünf, Sechs.

Anmerkung. Am bequemsten und gebräuchlichsten ist die letzte Methode.

§. 67. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und Benennung dieser.

1) Um das bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch einzuhaltende Verfahren an einem numerischen Beispiele zu erläutern, sei $\frac{7}{8}$ der vorgelegte Bruch.

Da nun

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \,.\, 10}{8 \,.\, 10} = \frac{7 \,.\, 100}{8 \,.\, 100} = \frac{7 \,.\, 1000}{8 \,.\, 1000} = \ldots \quad (\text{§. } 61,\ 9.)$$

$$= \frac{(7 \,.\, 10) : 8}{10} = \frac{(7 \,.\, 100) : 8}{100} = \frac{(7 \,.\, 1000) : 8}{1000} = \ldots$$

(§. 61, 8. Zus.)

$$= \frac{70 : 8}{10} = \frac{700 : 8}{100} = \frac{7000 : 8}{1000} = \ldots$$

so ziehen wir hieraus folgenden Schluß:

Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, hänge man dem Zähler eine beliebige Anzahl Nullen an und dividire hierauf mit dem Nenner; der Quotient ist alsdann ein Decimalbruch, dessen Nenner aus 1 mit eben so vielen angehängten Nullen besteht, als deren dem Zähler angehängt wurden.

Hiernach wäre also:

$$\frac{7}{8} = \frac{700000 : 8}{100000} = \frac{87500}{100000} = \frac{875}{1000} = 0{,}875.$$

Aus diesem Beispiele ersieht man aber sogleich, daß die Anzahl der Nullen in einzelnen Fällen leicht größer, andernfalls auch kleiner genommen wird, als gerade nothwendig ist.

Man verfährt darum kürzer auf die Weise, daß man die Ganzen anschreibt, nach denselben das Decimalzeichen setzt, nun dem Zähler zuerst nur eine Null anhängt, hierauf durch den Nenner dividirt, dem etwa übrig bleibenden Rest alsdann wiederum eine Null anhängt, darauf nochmals durch den Nenner des Bruches dividirt u. s. f., bis man diese wiederholte Division schließt. Da man hiernach bis zum Schlusse der Division genau so viele Nullen angehängt, als man Decimalstellen bestimmt hat, so bleibt jetzt der Nenner des Decimalbruchs ganz außer Acht. Obiges Beispiel gestaltet sich also nun kürzer folgendermaßen:

$$\frac{7}{8} = 70 : 8 = 0{,}875$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline \end{array}$$

2) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß diese wiederholte Division mit dem Nenner nicht in allen Fällen aufgehen, sondern daß dieser Fall nur dann eintreten wird, wenn der Nenner des auf seine kleinste Benennung gebrachten gewöhnlichen Bruches 10 heißt, oder ein Faktor von 10, oder auch ein Produkt solcher Faktoren unter einander oder mit 10 ist.

So geht also z. B. die Division auf bei allen auf ihre kleinste Benennung gebrachten Brüchen, welche zum Nenner eine der Zahlen

2, 4, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64 . . . . .

haben.

Z. B. $\frac{5}{16} = 0{,}3125$; $\frac{7}{40} = 0{,}175$.

3) Ein Decimalbruch von einer bestimmten Anzahl Decimalstellen heißt ein *endlicher*, im andern Falle ein *unendlicher*.

4) Führt die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches auf einen unendlichen Decimalbruch, so kommt man dem wahren Werthe um so näher, je länger man die Division fortsetzt, d. h. je mehr man Decimalstellen entwickelt.

Denn ist $\frac{z}{n}$ der vorgelegte gemeine Bruch und

$$\frac{z \,.\, 10^m}{n} = a + \frac{b}{n},$$

wo $b < n$, so wird

$$\frac{z}{n} = \left(a + \frac{b}{n}\right) : 10^m \quad (\S.\ 35,\ 1.)$$

$$= \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^m.n} \quad (\S.\ 61,\ 4\ \beta.)$$

und da $\frac{b}{n} < 1,$

so ist auch $\frac{b}{10^m.n} < \frac{1}{10^m}$ (§. 64, 1.)

und wird um so kleiner, je größer m ist (§. 62, 1), d. h. $\frac{z}{n}$ nähert sich mit der Zunahme von m immer mehr und mehr dem Werthe $\frac{a}{10^m}$.

Anmerkung. Man kommt dem wahren Werthe dadurch noch etwas näher, daß man, wenn der bei der letzten Division gebliebene Rest größer als die Hälfte des Nenners des gewöhnlichen Bruches ist, die letzte Decimalstelle um Eins vergrößert.

Verwandelt man z. B. $\frac{4}{17}$ auf 4 Decimalstellen in einen Decimalbruch, so erhält man

$$\frac{4}{17} = 40 : 17 = 0{,}2352$$

```
40 : 17 = 0,2352
34
--
 60
 51
 --
  90
  85
  --
   50
   34
   --
   16
```

und da der Rest 16 größer ist als $\frac{17}{2}$, so setze man $\frac{4}{17} = 0{,}2353$.

Der erste Werth ist um $\frac{16}{170000}$ zu klein, der zweite dagegen nur um $\frac{1}{17000} = \frac{10}{170000}$ zu groß.

5) Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt werden soll, so wird durch folgendes Schema, worin q den jedesmaligen Quotienten, und r den entsprechenden Rest bezeichnet, diese Verwandlung dargestellt:

$$a \,.\, 10 : b = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \ldots.$$

$$\begin{array}{l} \underline{q_1} \\ r_1 \,.\, 10 \\ \underline{b \;\;.\; q_2} \\ \quad r_2 \,.\, 10 \end{array}$$

Da nun jeder der Reste

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_m, \ldots\ldots r_{b-1}, r_b \ldots\ldots r_n \ldots\ldots$$

offenbar kleiner ist, als der Nenner b, so muß auch der Rest immer einen der Werthe 1, 2, 3, ... (b — 1) annehmen und somit spätestens bei der (b — 1) ten Division wieder ein Rest zum Vorschein kommen, der schon durch eine der vorausgegangenen Divisionen erhalten worden war.

Angenommen nun, es wäre z. B. $r_{b-1} = r_m$, wo $m < b - 1$, so müssen die (b — 1 — m) nun folgenden Decimalstellen offenbar der Reihe nach dieselben sein, wie die durch die Division von dem m ten Reste an bis zum (b — 1) ten Rest erhaltenen. Da aber nun wieder der Rest r_m erhalten wird, werden sich dieselben Decimalstellen nochmals wiederholen u. s. f.

Es leuchtet ein, daß diese Wiederholung auch schon früher als bei der (b — 1) Decimalstelle beginnen und auch einer der Zwischenreste wieder einmal als Rest auftreten kann.

Beispiele.

1) $\frac{6}{7} = 0{,}857142857142857 \ldots\ldots$

Da bei der Division der sechste Rest wieder 6 heißt, so wiederholen sich die sechs ersten Decimalstellen von der siebenten Stelle an.

2) $\frac{5}{13} = 0{,}384615384615 \ldots\ldots$

wo also nicht erst der zwölfte Rest oder r_{12}, sondern schon der sechste Rest also r_6 wieder = 5 ist, und sich somit schon die sechs ersten Decimalstellen fort und fort wiederholen.

3) $\frac{189}{550} = 0{,}343636 \ldots\ldots$

Wir ersehen hieraus, daß der vierte Rest gleich dem zweiten, also $r_4 = r_2 = 200$ ist und sich also in diesem Falle von der zweiten Stelle an die zwei Ziffern 3 und 6 wiederholen.

6) Einen Decimalbruch, bei welchem eine, oder mehre Decimalstellen in derselben Reihenfolge wiederkehren, nennt man einen **periodischen Decimalbruch** und die sich wiederholenden Stellen die **Periode** derselben. Diese selbst wird je nach der Anzahl ihrer Ziffern ein-, zwei-, drei- u. s. w. stellig genannt. Beginnt die Periode schon mit der ersten Decimalstelle, d. i. mit den Zehnteln, so heißt der Decimalbruch ein **reinperiodischer**, im anderen Falle ein **unreinperiodischer**.

So sind z. B. die oben erhaltenen Decimalbrüche:

$$0{,}857142857\ .\ .\ .\ .\ .$$

und $0{,}384615384\ .\ .\ .\ .\ .$

reinperiodische mit sechsstelligen Perioden, dagegen ist

$$0{,}343636\ .\ .\ .\ .\ .$$

ein unreinperiodischer Decimalbruch, dessen Periode erst mit der dritten Stelle beginnt und zweistellig ist.

Häufig wird die Periode dadurch angedeutet, daß man über die erste und letzte Ziffer derselben einen Punkt setzt, z. B.

$$\frac{6}{7} = 0{,}\dot{8}5714\dot{2}$$

$$\frac{189}{550} = 0{,}34\dot{3}\dot{6};\ \frac{7}{9} = 0{,}\dot{7}.$$

Anmerkung. Bei der Rechnung mittelst Decimalbrüchen behält man gewöhnlich nur eine der Genauigkeit der vorliegenden Aufgabe entsprechende Anzahl von Decimalstellen bei und vermindert den hierdurch begangenen Fehler einigermaßen dadurch, daß man die letzte der beibehaltenen Decimalstellen um 1 vergrößert, wenn die darauf folgende Stelle größer als 5 ist, im anderen Falle aber dieselbe unverändert läßt.

Heißt z. B. ein Decimalbruch 7,62847 . . . . und wollte man nur 4 Stellen beibehalten, so wäre 7,6285, bei Gebrauch dreier Stellen dagegen 7,628 zu setzen.

§. 68. Aufgaben zur Uebung.

Nachstehende Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln:

1) $\frac{1}{2}$.	6) $\frac{17}{512}$.	11) $\frac{4}{13}$.
2) $\frac{3}{4}$.	7) $\frac{2}{3}$.	12) $\frac{5}{17}$.
3) $7\frac{11}{16}$.	8) $\frac{5}{6}$.	13) $\frac{23}{90}$.
4) $34\frac{1}{125}$.	9) $3\frac{11}{12}$.	14) $\frac{1}{1480}$.
5) $\frac{37}{160}$.	10) $14\frac{3}{7}$.	15) $\frac{2231}{11100}$.

§. 69. Verwandlung von Decimalbrüchen in gemeine Brüche.

1) Das Verfahren, welches bei der Verwandlung endlicher Decimalbrüche in gemeine Brüche zu befolgen ist, geht unmittelbar aus der Definition eines Decimalbruches hervor.

Beispiele.

1) $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

2) $7{,}625 = 7\frac{625}{1000} = 7\frac{5}{8}$.

3) $26{,}00205 = 26\frac{205}{100000} = 26\frac{41}{20000}$.

2) Um von den unendlichen Decimalbrüchen zunächst die Verwandlungsmethode reinperiodischer kennen zu lernen, wollen wir, unsere Betrachtung an ein numerisches Beispiel knüpfend, den dem gegebenen reinperiodischen Decimalbruche 0,797979 . . . . entsprechenden gewöhnlichen Bruch durch x bezeichnen, also setzen:

$$x = 0{,}797979\ldots = \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$

Durch beiderseitige Multiplication mit 100 erhalten wir hieraus:

$$100x = 79{,}797979\ldots = 79 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung

$$x = \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$

so bleibt $99x = 79$,

also wird $x = \frac{79}{99}$.

Hat die Periode überhaupt n Ziffern, und man setzt den Decimalbruch dem gemeinen Bruche x gleich, und multiplicirt beiderseits mit 10^n und subtrahirt die ursprüngliche Gleichung von der so erhaltenen, so tritt stets auf der einen Seite eine, der Periode gleiche ganze Zahl, auf der anderen Seite aber eine aus n Neunern bestehende Zahl als Faktor von x auf, welche $= 10^n - 1$ ist. Wir können darum allgemein behaupten:

Ein reinperiodischer Decimalbruch ist gleich einem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler der Periode gleich ist und dessen Nenner aus so vielen Neunern besteht als die Periode Ziffern hat.

Beispiele.

1) $0{,}33\ldots = 0{,}\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$

2) $0{,}696969\ldots = 0{,}\dot{6}\dot{9} = \frac{69}{99} = \frac{23}{33}.$

3) $0{,}045045\ldots = 0{,}\dot{0}4\dot{5} = \frac{45}{999} = \frac{5}{111}.$

3) Um das Verfahren kennen zu lernen, welches man bei der Verwandlung eines unreinperiodischen Decimalbruches in einen gewöhnlichen zu beobachten hat, wollen wir wiederum ein Zahlenbeispiel zu Grunde legen und dazu den Decimalbruch 0,734747... wählen.

Setzen wir diesen Bruch dem gewöhnlichen Bruche x gleich, also $x = 0{,}734747\ldots$

und multipliciren beiderseits mit 100, so folgt:

$$100x = 73{,}4747\ldots$$

also $$x = \frac{73{,}4747}{100}.$$

Nun ist aber nach Vorhergehendem der reinperiodische Decimalbruch $73{,}4747\ldots = 73\frac{47}{99}$,

also wird der gewöhnliche Bruch

$$x = \frac{73\frac{47}{99}}{100} = \frac{7347 - 73}{9900} = \frac{7274}{9900}.$$

Auf ähnliche Weise kann man bei der Verwandlung eines jeden unreinperiodischen Decimalbruches verfahren. Wir erhalten somit folgende Regel:

Gehen der Periode m Ziffern voraus und ist die Periode n stellig, so betrachte man die m Vorziffern als die Ganzen des neu auftretenden reinperiodischen Decimalbruches, verwandle diesen in einen gewöhnlichen und dividire nochmals durch 10^m oder durch 1 mit m angehängten Nullen.

Beispiele.

1) $0{,}4266\ldots = 0{,}42\dot{6} = \frac{42\frac{2}{3}}{100} = \frac{128}{300} = \frac{32}{75}$.

2) $3{,}25454\ldots = 3{,}2\dot{5}\dot{4} = 3\frac{2\frac{54}{99}}{10} = 3\frac{2\frac{6}{11}}{10} = 3\frac{28}{110} = 3\frac{14}{55}$.

§. 70. Aufgaben zur Uebung.

1) $0{,}675$.
2) $4{,}00125$.
3) $24{,}4275$.
4) $0{,}05625$.
5) $0{,}\dot{6}$.
6) $0{,}\dot{4}\dot{2}$.
7) $4{,}\dot{2}4\dot{3}$.
8) $147{,}\dot{0}6\dot{3}$.
9) $0{,}\dot{0}40\dot{5}$.
10) $0{,}6\dot{2}$.
11) $3{,}0\dot{3}\dot{6}$.
12) $0{,}42\dot{3}64\dot{5}$.
13) $0{,}00\dot{2}3\dot{4}$.
14) $18{,}0\dot{1}0\dot{8}$.
15) $400{,}100\dot{5}\dot{4}$.
16) $0{,}000\dot{4}\dot{5}$.

§. 71. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

Für die Addition und Subtraction der Decimalbrüche gelten natürlich dieselben Regeln, wie solche für diese Operationen bei den gemeinen Brüchen entwickelt wurden. Da aber hier die Nenner sehr leicht gleichnamig gemacht werden können, so lassen sich auch die bezeichneten Rechnungsarten viel leichter ausführen, als dieses bei den gewöhnlichen Brüchen geschehen konnte.

Um z. B. die Addition

$$3{,}76 + 25{,}684 + 274{,}0604 + 310{,}20598$$

vorzunehmen, schreibe man die gegebenen Decimalbrüche so unter-

3,76	einander, daß die Decimalzeichen, also auch
25,684	alle gleichnamigen Stellen vertikal unter-
274,0604	einander zu stehen kommen. Man ersieht
310,20598	alsdann sogleich, daß alle Summanden auf

den gemeinschaftlichen Nenner 100000 gebracht sind, sobald man dem ersten Decimalbruche 3 Nullen, dem zweiten 2 und dem dritten eine Null anhängt, dem Ansatze also folgende Form gibt:

$$\begin{array}{r} 3{,}76000 \\ 25{,}68400 \\ 274{,}06040 \\ 310{,}20598. \end{array}$$

Addiren wir nun wie bei ganzen Zahlen, indem wir die etwa in der Summe der Zehntel enthaltenen Einer zu den Einern der Ganzen zählen, so erhalten wir 613,71038 als die zu suchende Summe.

Da aber die angehängten Nullen ohne Einfluß auf das Resultat sind, so gibt man dieselben in der Regel nicht besonders an, sondern nimmt die Addition oder Subtraction schon vor, sobald die Zahlen in der oben angeführten Weise unter einander gesetzt sind.

Beispiele.

1) Addition:

	268,04
	12,3
	4,7896
	250,004
	0,26
Summe =	535,3936

2) Subtract.:

	587,68423
	29,958
Differenz =	557,72623

3) Subtract.:

	160,045
	27,36978
Differenz =	132,67522

Zusätze.

a) Subtrahirt man einen Decimalbruch, der kleiner als 10 ist, von 10, so nennt man die gefundene Differenz die **decadische Ergänzung** jenes Bruches.

So ist z. B. 6,253017 die decadische Ergänzung von 3,746983.

Anstatt nun einen solchen Decimalbruch zu subtrahiren, kann man auch die decadische Ergänzung desselben addiren und von der erhaltenen Summe wieder 10 Ganze in Abzug bringen.

Denn es ist allgemein

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Beispiel.

$$26,37945 - 4,68257 =$$
$$26,37945$$
$$+ \; 5,31743 - 10$$
$$31,69688 - 10 = 21,69688.$$

Von dieser Rechnungsweise macht man besonders bei der Bestimmung einer algebraischen Summe, in welcher die bezeichneten Decimalbrüche subtractiv auftreten, mit Vortheil Gebrauch, indem sich dadurch die Aufgabe auf eine Addition aller Glieder reducirt.

Beispiel.

27,62483 — 7,2568 + 4,742 — 6,875 + 2,47 — 3,9824 =

27,62483	
2,7432	— 10
4,742	
3,125	— 10
2,47	
6,0176	— 10

Algebr. Summe = 46,72263 — 30 = 16,72263.

Analog könnte man die algebraische Summe
84,35 — 27,682 + 817,4 — 3,56 + 8,12 — 157,94
auf folgende Weise bestimmen:

84,35	
72,318	— 100
817,4	
6,44	— 10
8,12	
842,06	— 1000

1830,688 — 1110 = 720,688.

b) Behält man bei der Addition unendlicher Decimalbrüche die n ersten Decimalstellen bei, so begeht man beim Anschreiben eines jeden Summanden einen Fehler, der kleiner ist als $\frac{1}{10^n}$ und der wahre Werth liegt offenbar zwischen der beibehaltenen Zahl und der Decimalzahl, welche erhalten wird, wenn man die nte Ziffer um eine Einheit vermehrt. Behält man z. B. von der unendlichen Decimalzahl 7,463984 . . . . die drei ersten Decimalziffern bei, so ist 7,463 um weniger als $\frac{1}{1000}$ vom wahren Werthe verschieden und dieser selbst liegt zwischen 7,463 und 7,464.

Um deshalb zu untersuchen, auf wieviel Stellen die Summe mehrer unendlichen Decimalzahlen von n Stellen genau ist, addire man die Summanden, erst wie sie gegeben sind, sodann vergrößere man die nte Decimalstelle eines jeden um 1 und addire nochmals, so liegt der wahre Werth zwischen beiden Resultaten und soweit diese mit einander übereinstimmen, soviel Decimalstellen sind jedenfalls als richtig anzunehmen.

So erhält man z. B. für

3,5783 ... + 7,3068 ... + 2,4213 ... + 6,4592 ...

3,5783		3,5784
7,3068	und	7,3069
2,4213		2,4214
6,4592		6,4593
19,7656		19,7660

Da nun 19,7656 < und 19,7660 > als der wirkliche Werth sein muß, so ist das Resultat 19,76 auf 2 Decimalstellen sicher genau.

§. 72. Aufgaben zur Uebung.

1) 6,425 + 49,73 + 968,2689 + 0,054 = ?
2) 642,0876 + 53,794 + 6,72048 + 1116,0042 + 17,63 + 94,253 = ?
3) 3,26 + 0,0075 + 25,486 + 684,087634 = ?
4) 0,02576 + 41,062 + 749,0809 + 8,2 + 97,053 + 9,9842 = ?
5) 469,78352 — 347,2894 = ?
6) 68,70608 — 39,86249 = ?
7) 0,0768 — 0,039874 = ?
8) 400 — 367,748 = ?
9) 600,807 — 418,98625 = ?
10) 7,004 — 3,7806 = ?
11) 8,425 — 3,7268 + 7,902 — 2,63 + 8,4 = ?
12) 74,06 — 2,8459 — 34,5 + 12,723 — 54,38765 + 1864,076 — 0,07 — 150,8 + 12,3 = ?

§. 73. Multiplication der Decimalbrüche.

1) Decimalbrüche werden mit einander multiplicirt, wenn man dieselben wie ganze Zahlen multiplicirt, indem man die Decimalzeichen außer Acht läßt, und vom Produkte von rechts gegen links so viele Decimalstellen abstreicht, als die Faktoren solcher zusammen haben, wobei die fehlenden Stellen durch Nullen zu ersetzen sind.

Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus §. 61, 5 und §. 66, 3 Zusatz c.

Beispiele.

1) 2,3042 . 6,062 =

2,3042	Beide Faktoren enthalten
6,062	zusammen 7 Decimalstellen,
46084	also werden vom Produkte
138252	139680604 auch 7 solcher
1382520	abgestrichen. Denn es ist:
13,9680604	

$$2{,}3042 \,.\, 6{,}062 = \frac{23042}{10000} \,.\, \frac{6062}{1000} = \frac{139680604}{10000000} \quad (\S.\ 61,\ 5.)$$

$$= 13{,}9680604 \quad (\S.66,\ 3,\ \text{Zus. c}).$$

2) 0,0324 . 0,062 =

0,0 324
0,062
648
1944
0,0020088; hiervon 7 Decimalstellen abgestrichen, gibt als Produkt = 0,0020088.

§. 74. Aufgaben zur Uebung.

1) 8,24 . 476 = ?
2) 24,758 . 3,25 = ?
3) 9,6849 . 0,723 = ?
4) 0,48763 . 0,9827 = ?
5) 8,20068 . 0,0842 = ?
6) 516,42 . 0,0008276 = ?
7) 0,00852 . 0,2768 = ?
8) 0,00042 . 0,05248 = ?
9) 824,06 . 7216,4 = ?
10) 2,00525 . 0,02707 = ?

§. 75. Abgekürzte Multiplication.

In vielen Fällen wünscht man das Produkt zweier Decimalbrüche nur auf einige Decimalstellen zu erhalten. Um nun hier im Resultate nicht mehr Stellen zu bekommen als eben gerade nothwendig sind, verfährt man nach folgender Regel:

Man setze die Einer der Ganzen des Multiplicators unter diejenige Decimalstelle des Multiplicanden, welche im Produkte noch vorkommen soll und reihe daran die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung. Hierauf multiplicire man mit jeder Ziffer des Multiplicators den Multiplicanden von derjenigen Ziffer an, welche vertikal über dem jedesmaligen Partialmultiplicator steht, schreibe die betreffenden Produkte so

unter einander, daß die zuerst erhaltene Ziffer eines jeden derselben unter die äußerste rechts stehende des unmittelbar vorhergehenden Produktes zu stehen kommt und addire hierauf.

Damit man jedoch die letzten Ziffern der Partialprodukte möglichst genau erhalte, multiplicire man mit dem betreffenden Partialmultiplicator auch noch die der entsprechenden Anfangsziffer des Multiplicanden zunächst rechts stehende, bestimme alsdann die dem Produkte nächstliegende, durch 10 theilbare Zahl und addire die Zehner dieser Zahl zu jenem Partialprodukte.

Befinden sich rechts, oder links über dem Multiplicator leere Stellen, so sind diese mit Nullen zu besetzen. Es ist klar, daß zur Linken eine Null genügt.

Beispiele.

1) Das Produkt

$$0,0425798 \;.\; 4,2768$$

auf 6 Decimalstellen zu entwickeln.

Auflösung.

0,0425798	
86724	
170319	(= 42579 . 4 + 3, wegen 8 . 4)
8516	(= 4257 . 2 + 2, „ 9 . 2)
2980	(= 425 . 7 + 5, „ 7 . 7)
255	(= 42 . 6 + 3, „ 5 . 6)
34	(= 4 . 8 + 2, „ 2 . 8)
0,182104	

2) Das Produkt

$$0,00457 \;.\; 28,604$$

auf 5 Decimalstellen zu bestimmen.

Auflösung.

0,004570	oder auch	28,60400
40682		754000
9140		11442
3656		1430
274		200
2		0,13072
0,13072		

3) Das Produkt

$$0,5246832 \;.\; 142,502$$

auf 6 Decimalstellen zu entwickeln.

Auflösung.

```
0,52468320
    205241
----------
  52468320
  20987328
   1049366
    262342
      1049
----------
 74,768405
```

§. 76. Aufgaben zur Uebung.

1) 4,92656 . 3,61782 } auf 5 Decimalstellen.
2) 87,25968 . 1,6974 }

3) 4,769837 . 0,268543 }
4) 864,30628 . 2,0608435 } auf 6 Decimalstellen.
5) 0,021642 . 0,150926 }
6) 0,059406 . 0,7005084 }

7) 0,1789 . 0,017852 auf 7 Decimalstellen.

8) 377,94792 . 54,0172 auf 4 Decimalstellen.

§. 77. Division der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden durch einander dividirt, wenn man im Divisor und Dividenden gleich viele Decimalstellen herstellt, dann das Decimalzeichen außer Acht läßt und die Division wie bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch ausführt.

Denn es ist z. B.

$$3{,}78 : 25{,}3764 = \frac{37800}{10000} : \frac{253764}{10000}$$

$$= \frac{37800}{10000} \cdot \frac{10000}{253764} \quad (\text{§. } 61,\ 8.)$$

$$= \frac{37800}{253764} = 0{,}14895\ldots \quad (\text{§. } 66.)$$

Zusatz.

Ist der Divisor eine ganze Zahl, oder enthält er weniger Decimalstellen als der Dividend, so kann man das Divisionsverfahren dadurch etwas abkürzen, daß man dem Divisor keine

Nullen anhängt, sondern kurzhin sein Decimalzeichen außer Acht läßt, im Dividenden dasselbe um so viele Stellen gegen rechts verschiebt, als im Divisor Decimalstellen vorkommen, und hierauf die Division wie gewöhnlich vornimmt, unter Berücksichtigung, daß im Quotienten das Decimalzeichen zu setzen ist, unmittelbar bevor man die höchste Stelle der Decimalen im Dividenden herunter schreibt.

Beispiele.

1) 54,72 : 17 = 3,218 . . .
51
37
34
32
17
150
136
14

2) 62,21622 : 23,54 =
6221,622 : 2354 = 2,643.
4708
15136
14124
10122
9416
7062
7062

3) 69,55 : 0,00214 =
6955000 : 214 = 32500
642
535
428
1070
1070

§. 78. Aufgaben zur Uebung.

1) 62,568 : 12 = ?
2) 0,945 : 0,45 = ?
3) 139,968 : 9,6 = ?
4) 2,958 : 1,59 = ?
5) 0,19 : 1,853 = ?
6) 9,863 : 0,001975 = ?
7) 32,105 : 0,00062 = ?
8) 0,0452 : 84,36 = ?
9) 0,027 : 845,79683 = ?
10) 32 : 0,0052 = ?

§. 79. Abgekürzte Division.

Will man den Quotienten einer vorgelegten Divisionsaufgabe nur auf einige Decimalstellen wissen, so kann man auf folgende Weise verfahren:

Man bestimme zuerst, wie viele Ziffern die Ganzen des Quotienten erhalten und schneide hierauf im Divisor von links gegen rechts so viele Ziffern ab, als der Quotient im Ganzen (Ganze und Decimalstellen) bekommen soll.

Mit diesem abgekürzten Divisor dividire man in den Dividenden, mit der gefundenen Quotientenziffer multiplicire man den Divisor, addire aber zum Produkte die corrigirten Zehner des Produktes aus dem Partialquotienten und der ersten weggelassenen Stelle des Hauptdivisors (§. 75), subtrahire alsdann, füge aber dem Reste keine neue Ziffer aus dem Dividenden bei, sondern schneide vom Divisor rechts eine Stelle ab und dividire hierauf in analoger Weise wie vorhin.

Hat der Divisor nicht so viele Ziffern als der Quotient bekommen soll, so dividire man so lange auf die gewöhnliche Weise, bis die Anzahl der gefundenen Quotientenziffern und die Anzahl der Ziffern des Divisors zusammen die Anzahl der Ziffern des zu suchenden Quotienten um eine übertreffen und dividire nun auf die oben vorgetragene Art.

Beispiele.

1) Man soll 764,52837 : 8,97654 auf 3 Decimalstellen bestimmen.

Auflösung.

Da die Ganzen des Quotienten zweiziffrig werden, so hat man fünf Quotientenziffern zu suchen. Man hat daher:

```
76452837 : 8(9(7(6(5|4 = 85,169
718123      (= 89765 . 8 + 3, wegen 4 . 8)
 46405
 44883      (= 8976 . 5 + 3, wegen 5 . 5)
  1522
   898      (= 897 . 1 + 6, wegen 6 . 1)
   624
   538      (= 89 . 6 + 4, wegen 7 . 6)
    86
    80      (= 8 . 9 + 8, wegen 9 . 9)
     6
```

2) Den Quotienten

6579,8675 : 7825,962

auf 5 Decimalstellen zu berechnen.

Auflösung.

Da wir in vorliegendem Falle 0 Ganze haben, so sind im Divisor nur 5 Ziffern abzuschneiden. Man erhält somit:

```
65798675 : 7(8(2(5(9|62 = 0,84077
626077
 31909
 31304
   605
   547
    58
    55
     3
```

3) Man soll den Quotienten

34,6972 : 6825,765

auf 5 Decimalstellen bestimmen.

Auflösung.

Da 34 : 6825 = 0,004 . . . also der ersten werthvollen Ziffer des Quotienten drei Nullen vorangehen, wovon die eine den Ganzen entspricht, so hat man nur noch drei Decimalstellen zu berechnen und die Rechnung gestaltet sich also folgendermaßen:

```
346972 : 6(8(2|5765 = 0,00508
3413
  56
  55
   1
```

4) Den Quotienten

69897,5684 : 92,5

auf 4 Decimalstellen zu berechnen.

Auflösung.

Da die Ganzen dreiziffrig werden, also im Ganzen 7 Quotientenziffern zu bestimmen sind, der Divisor aber nur dreiziffrig ist, so dividire man zuerst fünfmal auf die gewöhnliche Weise und dann nach der abgekürzten Methode wie folgt:

698975684 : 925 = 755,6493
6475
5147
4625
5225
4625
6006
5550
4568
3700
868
833
35
28
7

§. 80. Aufgaben zur Uebung.

1) 119,1345 : 16,1875 = ? (auf 4 Decimalstellen)
2) 157,808 : 1,975608 = ? („ 3 „)
3) 5811,168 : 601,100253 = ? („ 5 „)
4) 14,753 : 2,96852689 = ? („ 6 „)
5) 5,916501 : 0,795 = ? („ 4 „)
6) 0,074288 : 0,1235 = ? („ 5 „)

Anmerkung.

Vorstehende abgekürzte Divisionsmethode zeichnet sich zwar durch Kürze aus und liefert in den meisten Fällen Resultate von hinreichender Genauigkeit, allein wir halten es für zweckmäßig, hier noch in Kürze des von Fourier gelehrten und unter dem Namen „die geordnete Division“ bekannten Verfahrens zu erwähnen.

Dasselbe gründet sich auf die Thatsache, daß bei der gewöhnlichen Divisionsmethode mit einer mehrziffrigen Zahl, sich im Allgemeinen aus den Anfangsziffern des Divisors für irgend einen Theildividenden die entsprechenden Quotientenziffern bestimmen lassen, so daß die nachfolgenden Ziffern des Divisors und Theildividenden auf die betreffenden Ziffern des Quotienten ganz ohne Einfluß sind.

Das einzuhaltende Verfahren ist darum folgendes:

1) Man schreibe die Aufgabe wie gewöhnlich an und bestimme alsdann die Stelle der ersten zu berücksichtigenden Ziffer des zu suchenden Quotienten und ersetze die vorangehenden Stellen — wenn es nöthig ist — durch Nullen.

2) Ueberstreiche hierauf die erste, oder die 2, 3, . . . ersten Ziffern des Divisors und betrachte diesen überstrichenen Divisor allein als Divisor.

3) Dividire nun mit dem überstrichenen Divisor in den ersten Theildividenden (worunter man die so viel ersten Ziffern des vorgelegten Divi-

denden versteht, als zur Ausführung dieser Division erforderlich sind) und setze den entsprechenden Quotienten an die ihm zukommende Stelle.

4) Vergleiche alsdann den aus dieser Division hervorgehenden Rest mit der ersten Ziffer des Quotienten, oder bei jedem nachfolgenden Divisionsreste, mit der Summe aller schon gefundenen Quotientenziffern.

5) Ist dieser Divisionsrest nicht kleiner als die erste Ziffer, oder bei späteren Divisionen, nicht kleiner als die Summe aller schon gefundenen Quotientenziffern, so hat man, — wenn wie gewöhnlich die nächste Ziffer des gegebenen Dividenden dem Rest angehängt ist, — damit, um den nächsten Theildividenden zu bilden, bevor man zur neuen Division durch den überstrichenen Divisor schreitet, folgende Correction vorzunehmen:

> Man schreibe alle auf den überstrichenen Divisor folgenden Ziffern des vorgelegten Divisors der Reihe nach unter einander, neben an aber, von oben herunter, die schon gefundenen Quotientenziffern in umgekehrter Reihenfolge wie sie bestimmt werden, subtrahire die Summe der Produkte dieser neben einander stehenden Zahlen von jenem durch eine Ziffer ergänzten Reste, so bleibt der zweite Theildividend.

Dividirt man nun diesen durch den überstrichenen Divisor, so resultirt die nächstfolgende Ziffer des zu bestimmenden Quotienten.

6) Mit dem neuen Divisionsreste verfahre man alsdann analog wie mit dem vorhergehenden, vorausgesetzt, daß er nicht kleiner ist als die Summe der bereits gefundenen Quotientenziffern.

7) Wird der Divisionsrest einmal kleiner als die Summe der schon gefundenen Quotientenziffern, so kann die oben angeführte Correction nicht vorgenommen werden und es geht daraus hervor, daß der seither benutzte überstrichene Divisor nicht mehr genügt. Man lasse darum die zuletzt vorgenommene Zwischendivision ganz außer Acht, überstreiche einen um eine Stelle vermehrten Theil des Divisors und nehme mit dem schon verbesserten letzten Theildividenden in Bezug auf den neuen überstrichenen Divisor eine abermalige Correction vor, indem man die nächstfolgende Ziffer des gegebenen Dividenden dem Reste anhängt und nun die oben angeführte Correction vornimmt u. s. w.

Nachstehendes Beispiel mag zur Erläuterung des angegebenen Verfahrens dienen:

768,3532 : $\overline{32, 5}$|64 = 23,595.
650 (= 325 . 2)
118. (Da nun 118 > 2, so ist 2 genau und man hat
1183 nach Herabsetzung der 3. Nun ist aber
6 . 2 = 12
4 . 0 = 0, folglich die Produktensumme =
12 subtrahirt bleibt:
1171 : 325 = 3 als zweite Quotientenziffer.
975 (= 325 . 3)
196. Da wieder 196 > (2 + 3), so ist 3 genau und man hat
1965 nach Herabziehung der 5. Nun ist aber
6 . 3 = 18
4 . 2 = 8 also die Produktensumme =
26 subtrahirt, bleibt
1939 : 325 = 5 als dritte Quotientenziffer.
1625 (= 325 . 5)
314. Aber 314 > (2 + 3 + 5), also 5 genau und man hat
3143 nach Herabziehung der 3. Nun ist aber
6 . 5 = 30
4 . 3 = 12
0 . 2 = 0, also die Produktensumme =

```
  42 subtrahirt, bleibt
3101 : 325 = 9 als vierte Quotientenziffer.
2925 (= 325 . 9)
 176. Aber 176 > (2 + 3 + 5 + 9) also 9 genau und
1762 nach Herabsetzung der 2. Nun ist
        6 . 9 = 54
        4 . 5 = 20, also die Produktensumme =
  74 subtrahirt, bleibt
1688 : 325 = 5
1625
  63. Aber 63 > (2 + 3 + 5 + 9 + 5), also auch 5 noch genau.
```

Läßt man das zur Erläuterung Dienende weg, so nimmt vorstehendes Beispiel folgende kürzere Gestalt an:

```
768,3532 : 32,5|64 = 23,595
650
1183
  12
1171
 975
 1965
   26
 1939
 1625
  3143
    42
  3101
  2925
   1762
     74
   1688
   1625
     63
```

In diesem Beispiele genügte also der überstrichene Divisor 325 während der ganzen Division.

Um nun auch für den Fall ein Beispiel zu lösen, wo während der Division der überstrichene Divisor um eine Stelle vermehrt werden muß, nehmen wir in der vorgelegten Aufgabe

5,7683249 : 345,724

zuerst den überstrichenen Divisor (3) einziffrig und dividiren damit in 5. Der Quotient 1 muß, wie sich leicht ersehen läßt, an die Stelle der Hundertel gesetzt werden.

Wir haben somit:

```
5,7683249 : 3|4|5,|724 = 0,01668
3
2. Da 2 > 1, so ist 1 genau und man hat
27 nach Herabziehung der 7. Das Produkt
        4 . 1 =
 4 subtrahirt, bleibt:
23 : 3 = 7. Aber 7 . 3 =
```

21 und der Rest
2 $< (1 + 7)$; folglich ist die Quotientenziffer 7 zu verwerfen und der überstrichene Divisor um eine Stelle zu vergrößern, also 34 als solcher anzunehmen, vorher aber an den Rest 23 die nächstfolgende Dividendenziffer 6 anzuhängen. Man hat alsdann
236 zu vermindern um das Produkt
$5 \,.\, 1 =$
5 gibt
231 : 34 = 6 und 34 . 6 =
204 subtrahirt bleibt
27 $> (1 + 6)$, also 6 als nächste Quotientenziffer.
Man hat daher
278 nach Herabsetzung der 8 und hiervon
$\left.\begin{matrix} 5 \,.\, 6 = 30 \\ 7 \,.\, 1 = 7 \end{matrix}\right\}$ zusammen =
37 subtrahirt gibt
241 : 34 = 7. Aber 34 . 7 =
238 und die Differenz
3 $< (1 + 6 + 7)$, somit die Quotientenziffer 7 unbrauchbar. Vergrößert man nun wieder den überstrichenen Divisor um eine Stelle, nimmt also dafür 345 an, und hängt dem Rest 241 die nächstfolgende Dividendenziffer 3 an, so folgt
2413 und hiervon die Produktensumme
$\left.\begin{matrix} 7 \,.\, 6 \\ 2 \,.\, 1 \end{matrix}\right\} =$
44 subtrahirt, gibt
2369 : 345 = 6
2070
299 $> (1 + 6 + 6)$. Darum
2992 vermindert um
$\left.\begin{matrix} 7 \,.\, 6 \\ 2 \,.\, 6 \\ 4 \,.\, 1 \end{matrix}\right\} =$
58
2934 : 345 = 8
2760
174 $> (1 + 6 + 6 + 8)$, also 8 genau u. s. w.

Man überzeugt sich leicht, daß von dieser sinnreichen Divisionsmethode stets mit Vortheil dann Gebrauch gemacht wird, wenn der Divisor vielziffrig ist.

Die nähere Begründung des Verfahrens würde uns zu weit führen und es mag genügen, mit der Methode bekannt geworden zu sein.

C. Von den Kettenbrüchen.

§. 81. Von den Kettenbrüchen im Allgemeinen.

1) Ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl, dessen Nenner aber eine gemischte Zahl ist, deren angehängter Bruch wiederum ebenso beschaffen sein kann u. s. f., heißt ein **Kettenbruch** (§. 60, 8).

Die allgemeine Form eines Kettenbruches ist somit:

$$\cfrac{z_1}{n_1 + \cfrac{z_2}{n_2 + \cfrac{z_3}{n_3 + \cfrac{z_4}{n_4 + \ldots}}}}$$

Die einzelnen Brüche $\frac{z_1}{n_1}$, $\frac{z_2}{n_2}$, $\frac{z_3}{n_3}$, ... heißen Partialbrüche oder Glieder, z_1, z_2, z_3, ... die Partialzähler, n_1, n_2, n_3, ... die Partialnenner desselben.

2) Ist die Anzahl der Glieder eines Kettenbruches eine begrenzte oder endliche, so heißt derselbe ein endlicher, im anderen Falle ein unendlicher.

3) Ein Kettenbruch, dessen Partialzähler alle gleich der Einheit sind, der also die Form hat:

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \ldots.}}}}$$

heißt ein einfacher oder gemeiner, jeder andere dagegen ein allgemeiner. — Von besonderer Wichtigkeit sind nur die gemeinen Kettenbrüche, weshalb wir auch nur solche bei unseren nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde legen wollen.

4) Wiederholt sich bei einem unendlichen Kettenbruche ein Glied, oder eine Reihe von Gliedern in einer bestimmten Aufeinanderfolge, so heißt derselbe ein periodischer und die sich wiederholenden Glieder bilden dessen Periode.

Z. B. $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}}$ $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}}}}$

§. 82. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen gemeinen Kettenbruch.

1) Es sei $\frac{623}{785}$ der vorgelegte gewöhnliche Bruch.

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Bruches durch den Zähler, so folgt:

$$\frac{623}{785} = \frac{1}{\frac{785}{623}} = \frac{1}{1 + \frac{162}{623}}.$$

Verfährt man nun mit dem Bruche $\frac{162}{623}$ auf analoge Weise und dividirt also Zähler und Nenner durch 162 u. s. f. bei allen nachfolgenden Brüchen, so erhält man

$$\frac{623}{785} = \frac{1}{1 + \frac{162}{623}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{137}{162}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{25}{137}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \frac{12}{25}}}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{12}}}}}}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind die Partialnenner 1, 3, 1, 5, 2, 12 nichts anderes als die auf einander folgenden Quotienten, welche man findet, wenn man nach §. 50 das größte gemeinschaftliche Maaß zu dem Zähler und Nenner des vorgelegten Bruches $\frac{623}{785}$ aufsucht.

Wir gelangen darum zu dem verlangten Kettenbruche rascher auf folgende Weise:

Man verfahre analog wie bei der Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zu dem Zähler und Nenner des gegebenen gewöhnlichen Bruches und bilde alsdann einen Kettenbruch, dessen Partialzähler alle = 1 sind, und dessen Partialnenner der Reihe nach durch die aufeinanderfolgenden Quotienten, welche durch die wiederholten Divisionen resultiren, gebildet werden. Für obiges Beispiel gestaltet sich somit das Rechnungsverfahren folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 2 & & 12 & \\
785 & : & 623 & : & 162 & : & 137 & : & 25 & : & 12 & : & 1 \\
623 & & 486 & & 137 & & 125 & & 24 & & 12 & & \\
\overline{162} & & \overline{137} & & \overline{25} & & \overline{12} & & \overline{1} & & \overline{} & &
\end{array}$$

und wenn man nun die Quotienten 1, 3, 1, 5, 2, 12 der Reihe nach als Partialnenner einführt und alle Zähler = 1 setzt, so erhält man wieder obigen Kettenbruch.

2) Soll ein Decimalbruch in einen gemeinen Kettenbruch verwandelt werden, so verwandle man denselben zuerst in einen gewöhnlichen Bruch (§. 69) und diesen in einen Kettenbruch.

Beispiele.

1) Den Decimalbruch 0,573 in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Nach §. 69, 1 ist

$$0{,}573 = \frac{573}{1000}.$$

Ferner hat man:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 2 & & 1 & & 12 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
1000 & : & 573 & : & 427 & : & 146 & : & 135 & : & 11 & : & 3 & : & 2 & : & 1 \\
573 & & 427 & & 292 & & 135 & & 132 & & 9 & & 2 & & & & \\
\overline{427} & & \overline{146} & & \overline{135} & & \overline{11} & & \overline{3} & & \overline{2} & & \overline{1} & & & &
\end{array}$$

Es ist somit

$$0{,}573 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

2) Es sei $68{,}\dot{5}8\dot{7}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Nach §. 69, 2 hat man

$$68{,}\dot{5}8\dot{7} = 68\frac{587}{999} \text{ und}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & \overset{1}{} & & \overset{1}{} & & \overset{2}{} & & \overset{2}{} & & \overset{1}{} & & \overset{4}{} & & \overset{1}{} & & \overset{1}{} & & \overset{1}{} & & \overset{3}{} & \\
999 & : & 587 & : & 412 & : & 175 & : & 62 & : & 51 & : & 11 & : & 7 & : & 4 & : & 3 & : & 1 \\
\underline{587} & & \underline{412} & & \underline{350} & & \underline{124} & & \underline{51} & & \underline{44} & & \underline{7} & & \underline{4} & & \underline{3} & & \underline{3} & & \\
412 & & 175 & & 62 & & 51 & & 11 & & 7 & & 4 & & 3 & & 1 & & & &
\end{array}
$$

folglich ist

$$68,\dot{5}8\dot{7} = 68 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}}}}}$$

§. 83. Aufgaben zur Uebung.

Nachstehende Brüche in gemeine Kettenbrüche zu verwandeln:

1) $\frac{5}{12}$. 2) $\frac{47}{37}$. 3) $87\frac{798}{877}$.

4) 7,875. 5) 0,0173. 5a) $0,\dot{6}2\dot{1}$.

6) $0,4\dot{4}\dot{5}$ 6a) $0,023\dot{2}5\dot{2}$. 7) $\frac{875}{9867}$.

8) $\frac{78577}{98725}$.

§. 84. Verwandlung endlicher Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche.

1) Ein endlicher Kettenbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die gemischte Zahl, welche durch den letzten Partialbruch und den vorletzten Partialnenner gebildet wird, einrichtet, mit dem eingerichteten Werthe in den vorletzten Partialzähler dividirt und auf diese Weise fortfährt zu operiren, bis man schließlich zu dem gewünschten gewöhnlichen Bruche gelangt.

Beispiel.

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{7}}} = \cfrac{1}{2 + \frac{7}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Anmerkung. Eine kürzere Methode lehrt §. 86.

§. 85. Aufgaben zur Uebung.

In gewöhnliche Brüche zu verwandeln, wenn die Kettenbruchsnenner der Reihe nach sind:

1) 2, 1, 1, 2, 3, 2.
2) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4.
3) 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 2.
4) 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6.
4a) 1, 1, 1, 5, 2, 7, 2, 4, 3, 4.
4b) 213, 6, 5, 1, 3, 2.

§. 86. Von den Näherungswerthen gegebener Kettenbrüche.

1) Verwandelt man nicht den ganzen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch, sondern betrachtet man bei dieser Operation den Kettenbruch der Reihe nach durch den ersten, zweiten, dritten rc. Partialnenner begrenzt und verwandelt jeden der so erhaltenen kleineren Kettenbrüche in einen gewöhnlichen Bruch, so erhält man eine Reihe von Brüchen, deren Werthe dem wahren Werthe des Kettenbruches um so näher kommen, je näher der begrenzende Partialnenner des entsprechenden Kettenbruches dem letzten Partialnenner liegt. Man nennt solche darum auch die Näherungswerthe jenes Kettenbruches und unterscheidet gerade und ungerade Näherungswerthe, je nachdem der ihn begrenzende Partialnenner ein gerad- oder ungeradstelliger ist.

Um die Näherungswerthe eines Kettenbruches auf ihre Uebereinstimmung mit dem wahren Werthe desselben zu prüfen, verwandelt man sowohl diesen als auch jene in Decimalbrüche, und beurtheilt aus der Anzahl der übereinstimmenden Decimalstellen die Genauigkeit.

Anmerkung. Der Kürze halber werden wir in der Folge die Ausdrücke „Näherungswerth" und „wahrer Werth" bezüglich durch die Zeichen N. W. und W. W. ersetzen.

Beispiel.

Die Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12}}}}}}$$

zu bestimmen.

Auflösung.

Erster N. W. $= \frac{1}{1} = 1.$

Zweiter N. W. $= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

Dritter N. W. $= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

Vierter N. W. $= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{6}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{6}{23}}$

$= \frac{23}{29} = 0{,}793103\ \ldots\ .$

Fünfter N. W. $= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11}}}}$

$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{11}{13}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{13}{50}} = \frac{50}{63} = 0{,}79365\ldots$

W. W. $= \frac{623}{785} = 0{,}79363\ \ldots\ .$ (§. 82.)

Man ersieht hieraus, daß der Bruch $\frac{23}{29}$ auf 3 und $\frac{50}{63}$ auf 4 Decimalstellen mit dem wirklichen Werthe des vorgelegten Kettenbruches übereinstimmt.

2) Um ein allgemeines Gesetz für die Bildung der aufeinander folgenden Näherungswerthe ausfindig zu machen, bestimmen wir für die allgemeine Form

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \ldots}}}}$$

der Reihe nach die Näherungswerthe wie oben angegeben wurde und erhalten

als ersten N. W. $= \frac{1}{n_1}$

als zweiten N. W. $= \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1 n_2 + 1}$

als dritten N. W. $= \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{n_3}{n_2 n_3 + 1}} =$

$$\frac{n_2 n_3 + 1}{n_3 (n_1 n_2 + 1) + n_1}$$

als vierten N. W. $= \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4}}}} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{n_4}{n_3 n_4 + 1}}}$

$$= \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{n_3 n_4 + 1}{n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4}} = \frac{n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4}{n_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_3 n_4 + 1}$$

$$= \frac{n_4 (n_2 n_3 + 1) + n_2}{n_4 [n_3 (n_1 n_2 + 1) + n_1] + n_1 n_2 + 1} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnen wir die Zähler dieser Näherungswerthe der Reihe nach durch $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots . Z_n$ und die zugehörigen Nenner bezüglich durch $N_1, N_2, N_3, \ldots . N_n$, so erhalten wir aus vorstehenden Ausdrücken

für den ersten N. W. oder $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{n_1}$

" " zweiten " " $\frac{Z_2}{N_2} = \frac{n_2 Z_1}{n_2 N_1 + 1}$

" " dritten " " $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{n_3 Z_2 + Z_1}{n_3 N_2 + N_1}$

" " vierten " " $\frac{Z_4}{N_4} = \frac{n_4 Z_3 + Z_2}{n_4 N_3 + N_2}$

also allgemein

für den n ten N. W. oder $\frac{Z_n}{N_n} = \frac{n_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{n_n N_{n-1} + N_{n-2}}$

d. h. der Zähler des nten N. W. wird gefunden, wenn man den nten Partialnenner mit dem Zähler des (n — 1) ten N. W. multiplicirt und zu dem Produkte den Zähler des (n — 2) ten N. W. addirt; der Nenner des nten N. W. wird erhalten, wenn man den nten Partialnenner mit dem Nenner des (n — 1) ten N. W. multiplicirt und zu dem Produkte den Nenner des (n — 2) ten N. W. addirt.

Die allgemeine Giltigkeit dieses Satzes läßt sich leicht mittelst des Schlusses von n auf n + 1 nachweisen. Nehmen wir zu diesem Ende an, der gefundene Ausdruck

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{n_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{n_n N_{n-1} + N_{n-2}}$$

sei richtig und zeigen, daß dann auch der hiernach für den nächstfolgenden N. W. gebildete Ausdruck

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{n_{n+1} Z_n + Z_{n-1}}{n_{n+1} N_n + N_{n-1}}$$

richtig sein muß.

Nun ist aber in der That der (n + 1) te N. W. oder

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \dots + \cfrac{1}{n_n + \cfrac{1}{n_{n+1}}}}}$$

$$= \frac{\left(n_n + \frac{1}{n_{n+1}}\right) Z_{n-1} + Z_{n-2}}{\left(n_n + \frac{1}{n_{n+1}}\right) N_{n-1} + N_{n-2}}$$

$$= \frac{(n_n n_{n+1} + 1) Z_{n-1} + n_{n+1} Z_{n-2}}{(n_n n_{n+1} + 1) N_{n-1} + n_{n+1} N_{n-2}}$$

$$= \frac{n_{n+1} (n_n Z_{n-1} + Z_{n-2}) + Z_{n-1}}{n_{n+1} (n_n N_{n-1} + N_{n-2}) + N_{n-1}}$$

$$= \frac{n_{n+1} Z_n + Z_{n-1}}{n_{n+1} N_n + N_{n-1}}.$$

Ist somit obiger Satz für den $n$ten N. W. richtig, so ist er es auch für den $(n+1)$ten N. W. Nun haben wir aber dargethan, daß er für $n = 1, 2, 3$ und 4 Giltigkeit hat, folglich bleibt er auch für $n = 5$, somit wieder für $n = 6$ u. s. f., also allgemein giltig.

Berücksichtigt man, daß beim zweiten N. W. im Zähler 0, dagegen im Nenner 1 addirt wird, so läßt sich aus obigem Verfahren nachstehende Anschreibweise entnehmen:

Partialnenner	n_1	n_2	n_3 . . . . .
Zähler 0	1	$n_2 . 1 + 0$	$n_3 (n_2 . 1 + 0) + 1 \ldots$
Nenner 1	n_1	$n_2 . n_1 + 1$	$n_3 (n_2 . n_1 + 1) + n_1 \ldots$

Zusatz.

Zähler und Nenner des $m$ten Näherungswerthes sind kleiner als Zähler und Nenner des $(m+1)$ten.

Beispiel.

Wählen wir als Anwendung obigen gemeinen Kettenbruch (§. 82), dessen Partialnenner der Reihe nach

1, 3, 1, 5, 2, 12

waren, so erhalten wir

	1	3	1	5	2	12
0	1	3	4	23	50	623
1	1	4	5	29	63	785

also der Reihe nach die Näherungswerthe

$$1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{32}{29}, \frac{50}{63}$$

und als wahren Werth $\frac{623}{785}$.

§. 87. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Näherungswerthe zu finden

a) von $\frac{778}{1015}$; b) von $\frac{3571}{7960}$; c) von 0,57682.

2) Der Durchmesser eines Kreises verhält sich zu dessen Peripherie wie 1 zu 3,1415926535 . . . . ; wie kann dieses Verhältniß durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden?

3) Die Länge eines badischen Fußes beträgt 0,923533 pariser Fuß; wie läßt sich dieses Verhältniß durch kleinere Zahlen ausdrücken?

4) Ein Zollpfund hat 0,892857 baierische Pfund; welche Verhältnisse drücken dieses in kleineren Zahlen aus?

§. 88. Allgemeine Sätze über die Näherungswerthe.

1) Die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe eines Kettenbruches sind abwechselnd größer und kleiner als dessen wahrer Werth und kommen diesem immer näher und näher.

Beweis. Bezeichnen wir den letzten Partialnenner durch n_n, so folgt:

$$\text{W. W.} = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{n_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{n_n N_{n-1} + N_{n-2}} \quad (\S.\ 86,\ 2.)$$

oder wenn man beiderseits mit $N_n\ (n_n N_{n-1} + N_{n-2})$ multiplicirt (§. 22, 1)

$$Z_n n_n N_{n-1} + Z_n N_{n-2} = N_n n_n Z_{n-1} + N_n Z_{n-2}$$

oder wenn man beiderseits $Z_n N_{n-2} + N_n n_n Z_{n-1}$ subtrahirt (§. 8, 1)

$$Z_n n_n N_{n-1} - N_n n_n Z_{n-1} = N_n Z_{n-2} - Z_n N_{n-2}$$

oder $n_n\ (Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1}) = N_n Z_{n-2} - Z_n N_{n-2}$ (§. 31, 1) also, wenn man beiderseits durch $Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1}$ dividirt, (§. 35, 2)

$$n_n = \frac{N_n Z_{n-2} - Z_n N_{n-2}}{Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch N_n dividirt (§. 61, 9)

$$n_n = \frac{Z_{n-2} - \frac{Z_n}{N_n} N_{n-2}}{\frac{Z_n}{N_n} N_{n-1} - Z_{n-1}}.$$

Nun ist aber offenbar stets $n_n > 1$, folglich auch absolut genommen

$$Z_{n-2} - \frac{Z_n}{N_n} N_{n-2} > \frac{Z_n}{N_n} N_{n-1} - Z_{n-1}$$

oder, wenn man beiderseits durch N_{n-1} dividirt,

$$\frac{Z_{n-2} - \frac{Z_n}{N_n} N_{n-2}}{N_{n-1}} > \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} \quad (\text{§. } 64,\ 1).$$

Nach §. 86 Zusatz ist aber

$$N_{n-1} > N_{n-2},$$

also um so mehr

$$\frac{Z_{n-2} - \frac{Z_n}{N_n} N_{n-2}}{N_{n-2}} > \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$$

oder $$\frac{Z_{n-2}}{N_{n-2}} - \frac{Z_n}{N_n} > \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$$

Aus dieser Ungleichung geht aber hervor, daß der wahre Werth $\frac{Z_n}{N_n}$ stets zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungswerthen $\frac{Z_{n-2}}{N_{n-2}}$ und $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ liegt, von welchen immer der spätere $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ der genauere ist.

Zusatz.

Da $$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{n_1}$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}}$$

aber $$n_1 < n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_n}}}$$

und $$n_1 + \frac{1}{n_2} > n_1 + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_n}$$

so ist $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{n_1} > \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_n}}}$

und $\frac{Z_2}{N_2} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} < \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_n}}}.$

Dieses in Verbindung mit dem obigen Satze führt zu dem Schlusse:

Jeder ungeradstellige N. W. eines Kettenbruches ist größer, jeder geradstellige dagegen kleiner als der wahre Werth.

Anmerkung. Man nennt aus diesem Grunde auch alle ungeraden, so wie alle geraden Näherungswerthe Näherungswerthe derselben Art.

2) **Die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungswerthe ist gleich dem Quotienten aus $\pm$ 1 durch das Produkt der Nenner der zwei Näherungswerthe, je nachdem der Subtrahend ein ungerad-, oder ein geradstelliger Näherungswerth ist.**

Behaupt. $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{\pm 1}{N_n N_{n+1}}$.

Beweis. $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n}{N_n N_{n+1}} \quad \ldots \quad (\alpha)$

und nach §. 86, 2:

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_{n+2}}{N_{n+2}} = \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{n_{n+2} Z_{n+1} + Z_n}{n_{n+2} N_{n+1} + N_n}$$
$$= \frac{Z_{n+1}\, N_n - Z_n\, N_{n+1}}{N_{n+1}\,(n_{n+2} N_{n+1} + N_n)}$$
$$= \frac{Z_{n+1}\, N_n - Z_n\, N_{n+1}}{N_{n+1}\, N_{n+2}} \quad \ldots \quad (\beta)$$

Aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke (α) und (β) ersehen wir, daß immer von drei unmittelbar auf einander folgenden Näherungswerthen die Zähler der Differenzen je zweier auf einander folgenden einander gleich aber entgegengesetzt sind.

Nun ist aber

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{n_1} - \frac{n_2}{n_1 n_2 + 1} = \frac{1}{n_1(n_1 n_2 + 1)} = \frac{+1}{N_1 N_2}$$

und

$$\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3} = \frac{n_2}{n_1 n_2 + 1} - \frac{n_2 n_3 + 1}{n_3(n_1 n_2 + 1) + n_1}$$

$$= \frac{-1}{(n_1 n_2 + 1)\,[n_3(n_1 n_2 + 1) + n_1]} = \frac{-1}{N_2 N_3}$$

Da also der Zähler der Differenz des ersten und zweiten N. W. + 1 und der Zähler der Differenz des zweiten und dritten N. W. — 1 heißt, so folgt aus Obigem, daß allgemein sein wird

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{\pm 1}{N_n N_{n+1}}$$

je nachdem $\frac{Z_n}{N_n}$ ein ungerad- oder geradstelliger Näherungswerth ist.

Zusatz.

Die Differenzen zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen werden um so kleiner, je mehr Kettenbruchsglieder denselben entsprechen (§. 86, Zusatz).

3) **Die Differenz zwischen dem wahren Werthe und einem Näherungswerthe ist immer kleiner als der Quotient aus 1 durch das Quadrat des Nenners jenes Näherungswerthes.**

Voraussf. Der Kettenbruch habe n Glieder und es sei $m < n$.

Behaupt. so ist $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_m}{N_m} < \frac{1}{N_m^2}$.

Beweis. Es ist

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_n N_m - Z_m N_n}{N_n N_m}.$$

Da aber (nach 2) $\frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} = \frac{\pm 1}{N_m N_{m+1}}$

und $\frac{Z_n}{N_n}$ zwischen $\frac{Z_m}{N_m}$ und $\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}}$ liegt (nach 1), so ist absolut genommen

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_m}{N_m} < \frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}}$$

oder $$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_m}{N_m} < \frac{1}{N_m N_{m+1}}$$

also um so mehr

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_m}{N_m} < \frac{1}{N_m N_m} \text{ oder } < \frac{1}{N_m^2}.$$

○ 4) Zähler und Nenner eines Näherungswerthes $\frac{Z_m}{N_m}$ sind stets relative Primzahlen.

Beweis. Wären dieselben keine Primzahlen zu einander, so müßten sie einen gemeinschaftlichen Faktor z. B. a haben und die Produktendifferenz

$$Z_m N_{m+1} - Z_{m+1} N_m$$

wäre somit durch a theilbar (§. 43, 2).

Nun ist aber nach Obigem (s. 2)

$$N_m N_{m+1} - Z_{m+1} N_m = \pm 1$$

also durch a nicht theilbar. Folglich können Z_m und N_m keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und sind daher relative Primzahlen.

○ 5) Jeder, dem Werthe nach zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen $\frac{Z_m}{N_m}$ und $\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}}$ liegende Bruch $\frac{Z}{N}$ hat einen größeren Nenner als jene.

Beweis. Ohne Rücksicht auf das Richtungszeichen hat man

$$\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} - \frac{Z}{N} < \frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}}$$

und $$\frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z}{N} < \frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}}$$

oder nach §. 88, 2

$$\frac{Z_{m+1} N - Z N_{m+1}}{N N_{m+1}} < \frac{1}{N_m N_{m+1}}$$

und $$\frac{Z_m N - Z N_m}{N N_m} < \frac{1}{N_m N_{m+1}}$$

oder, wenn man beiderseits die erste Ungleichung mit $N N_{m+1}$, die zweite mit $N N_m$ multiplicirt:

$$Z_{m+1} N - Z N_{m+1} < \frac{N}{N_m}$$

und $$Z^m N - Z N_m < \frac{N}{N_{m+1}}$$

Da nun aber den Ausdrücken $Z_{m+1} N - Z N_{m+1}$ und $Z_m N - Z N_m$ ganze Zahlen entsprechen, so müssen offenbar $\frac{N}{N_m}$ und $\frac{N}{N_{m+1}}$ unechte Brüche sein.

Es ist somit $N > N_m$ und $N > N_{m+1}$.

○ 6) Irgend ein Näherungswerth $\frac{Z_m}{N_m}$ kommt dem wahren Werthe $\frac{Z_n}{N_n}$ näher als jeder andere Bruch $\frac{Z}{N}$ mit kleinerem Nenner.

Beweis. Käme $\frac{Z}{N}$ dem wahren Werthe $\frac{Z_n}{N_n}$ näher als $\frac{Z_m}{N_m}$, so müßte derselbe jedenfalls zwischen $\frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}$ und $\frac{Z_m}{N_m}$ fallen, und somit nach 5. einen größeren Nenner als diese haben, was gegen die Voraussetzung wäre.

Anmerkung. Dieser Eigenschaft ist der Name „Näherungswerthe" entnommen.

○ 7) Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungswerthe derselben Art $\frac{Z_m}{N_m}$ und $\frac{Z_{m+2}}{N_{m+2}}$ lassen sich immer so viele, ebenfalls dem wahren Werthe immer näher kommende Brüche derselben Art einschalten, als der Zähler der Differenz beider Näherungswerthe Einheiten hat, weniger einen.

Beweis. Man hat

$$\frac{Z_{m+2}}{N_{m+2}} - \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_{m+2} N_m - N_{m+2} Z_m}{N_m N_{m+2}}$$

$$= \frac{N_m (n_{m+2} Z_{m+1} + Z_m) - Z_m (n_{m+2} N_{m+1} + N_m)}{N_m N_{m+2}} \quad (\S.\ 86,\ 2)$$

$$= \frac{n_{m+2} (N_m Z_{m+1} - N_{m+1} Z_m)}{N_m N_{m+2}}$$

$$= - n_{m+2} \cdot \frac{(Z_m N_{m+1} - N_m Z_{m+1})}{N_m N_{m+2}} \quad (\S.\ 88,\ 2)$$

$$= - n_{m+2} \cdot \frac{\pm 1}{N_m N_{m+2}}$$

$$= \frac{\mp n_{m+2}}{N_m N_{m+2}}.$$

Um nun die Brüche zu erhalten, welche zwischen die zwei N. W. $\frac{Z_m}{N_m}$ und $\frac{Z_{m+2}}{N_{m+2}}$ eingeschoben werden können, setze man in der Gleichung

$$\frac{Z_{m+2}}{N_{m+2}} = \frac{n_{m+2}\ Z_{m+1} + Z_m}{n_{m+2}\ N_{m+1} + N_m} \quad (\S.\ 86,\ 2)$$

der Reihe nach

$$n_{m+2} = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots (n_{m+2} - 1).$$

Man erhält alsdann für die einzuschaltenden Brüche bezüglich

$$\frac{Z_{m+1} + Z_m}{N_{m+1} + N_m},\ \frac{2\,Z_{m+1} + Z_m}{2\,N_{m+1} + N_m},\ \ldots\ \frac{(n_{m+2} - 1)\ Z_{m+2} + Z_m}{(n_{m+2} - 1)\ N_{m+2} + N_m}$$

Je nachdem die gegebenen N. W. größer oder kleiner sind als der W. W., sind es bezüglich auch die eingeschobenen Brüche. Diese sind also mit jenen von derselben Art und kommen dem W. W. immer näher und zwar durch Zu- oder Abnahme, je nachdem $\frac{Z_m}{N_m} \lessgtr$ W. W. ist

Nachstehend wollen wir diesen Satz durch ein numerisches Beispiel näher erläutern.

Ist
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12}}}}}}$$

der vorgelegte Kettenbruch, so sind dessen N. W. nach §. 86, 1 Beisp. der Reihe nach

$$1;\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{23}{29};\ \frac{50}{63}$$

oder
$$1;\ 0{,}75;\ 0{,}8;\ 0{,}793103;\ 0{,}79365$$

und W. W. $= \frac{623}{785} = 0{,}79363\ \ldots$

Nun ist $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, also läßt sich zwischen 1 und $\frac{4}{5}$ kein Näherungsbruch einschieben, da $1 - 1 = 0$ ist.

Ferner wird

$$\frac{3}{4} - \frac{23}{29} = \frac{87 - 92}{116} = \frac{-5}{116}.$$

Nach $\frac{4}{5}$ lassen sich somit noch $5 - 1 = 4$ Näherungsbrüche einschalten, die alle kleiner als $\frac{623}{785}$ sein werden, weil $\frac{23}{29}$ ein geradstelliger N. W. ist.

Nach obigem sind diese vier Näherungsbrüche der Reihe nach:

$$\frac{1 \,.\, 4 + 3}{1 \,.\, 5 + 4} = \frac{7}{9} = 0{,}777 \,\ldots\,.$$

$$\frac{2 \,.\, 4 + 3}{2 \,.\, 5 + 4} = \frac{11}{14} = 0{,}785 \,\ldots\,.$$

$$\frac{3 \,.\, 4 + 3}{3 \,.\, 5 + 4} = \frac{15}{19} = 0{,}789 \,\ldots\,.$$

$$\frac{4 \,.\, 4 + 3}{4 \,.\, 5 + 4} = \frac{19}{24} = 0{,}791 \,\ldots\,.$$

Weiter ist $\frac{4}{5} - \frac{50}{63} = \frac{252 - 250}{315} = \frac{2}{315}$,

folglich kann man nach $\frac{23}{29}$ noch $2 - 1 = 1$ Bruch einschalten, als der W. W. und

$$= \frac{1 \,.\, 23 + 4}{1 \,.\, 29 + 5} = \frac{27}{34} = 0{,}794$$

ist. Endlich haben wir

$$\frac{23}{29} - \frac{623}{785} = \frac{18055 - 18067}{29 \,.\, 785} = \frac{-12}{29 \,.\, 785}.$$

Zwischen $\frac{50}{63}$ und den W. W. $\frac{623}{785}$ lassen sich also $12 - 1 = 11$ Näherungsbrüche einschieben.

Dieselben sind der Reihe nach

$$\frac{1 \,.\, 50 + 23}{1 \,.\, 63 + 29} = \frac{73}{92} = 0{,}79347 \,\ldots\,.$$

$$\frac{2 \,.\, 50 + 23}{2 \,.\, 63 + 29} = \frac{123}{155} = 0{,}79354 \,\ldots\,.$$

$$\frac{3 \,.\, 50 + 23}{3 \,.\, 63 + 29} = \frac{173}{218} = 0{,}79357 \,\ldots\,.$$

$$\frac{4 \,.\, 50 + 23}{4 \,.\, 63 + 29} = \frac{223}{281} = 0{,}79359 \,\ldots\,.$$

$$\frac{5 \,.\, 50 + 23}{5 \,.\, 63 + 29} = \frac{273}{344} = 0{,}79360 \,\ldots\,.$$

$$\frac{6 \,.\, 50 + 23}{6 \,.\, 63 + 29} = \frac{323}{407} = 0{,}793611 \,\ldots$$

$$\frac{7\,.\,50 + 23}{7\,.\,63 + 29} = \frac{373}{470} = 0{,}793617\;\ldots\,.$$

$$\frac{8\,.\,50 + 23}{8\,.\,63 + 29} = \frac{423}{533} = 0{,}793621\;\ldots\,.$$

$$\frac{9\,.\,50 + 23}{9\,.\,63 + 29} = \frac{473}{596} = 0{,}793624\;\ldots\,.$$

$$\frac{10\,.\,50 + 23}{10\,.\,63 + 29} = \frac{523}{659} = 0{,}793626\;\ldots\,.$$

$$\frac{11\,.\,50 + 23}{11\,.\,63 + 29} = \frac{573}{722} = 0{,}793628\;\ldots\,.$$

Sämmtliche Näherungswerthe des vorgelegten Kettenbruches sind daher:

$$1,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \left(\frac{7}{9},\ \frac{11}{14},\ \frac{15}{19},\ \frac{19}{24}\right),\ \frac{23}{29},\ \left(\frac{27}{34}\right),\ \frac{50}{63},\ \left(\frac{73}{92},\ \frac{123}{155},\ \frac{173}{218},\right.$$

$$\left.\frac{223}{281},\ \frac{273}{344},\ \frac{323}{407},\ \frac{373}{470},\ \frac{423}{533},\ \frac{473}{596},\ \frac{523}{659},\ \frac{573}{722}\right),$$

wo die in Klammern stehenden eingeschaltete Brüche sind.

Vierter Abschnitt.

Von den Potenzen.

---

§. 89. Von den Potenzen im Allgemeinen.

1) Statt eines Produktes von n gleichen positiven oder negativen Faktoren, deren jeder gleich a ist, schreibt man bekanntlich kurzhin a^n. Einen solchen Ausdruck nennt man eine Potenz des betreffenden Faktors und liest denselben: „a in der nten." Der Faktor a heißt die Basis, Grundzahl oder Wurzel, die rechts oben beigefügte Zahl n, welche angibt, wie viel mal a als Faktor zu nehmen sei, der Exponent der Potenz und das Geschäft der Multiplication gleicher Faktoren das Potenziren.

2) Je nachdem der Exponent gerade oder ungerade ist, unterscheidet man gerade und ungerade Potenzen.

3) Die zweite Potenz einer Zahl heißt auch das Quadrat, die dritte der Kubus und die vierte das Biquadrat jener Zahl.

Hiernach wird z. B. a^2b^3 gelesen: „aQuadrat, bKubus."

4) Gleiche Potenzen sind solche, bei welchen sowohl die Grundzahlen als auch die Exponenten unter einander gleich sind; gleichbasig heißen sie, wenn sie nur einerlei Grundzahlen und gleichnamig, wenn sie nur einerlei Exponenten haben.

A. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 90. Vom Potenziren eines Produktes und eines Bruches.

1) Ein Produkt wird potenzirt, indem man das Produkt der Potenzen der einzelnen Faktoren bildet.

Behauptung. $(abc)^3 = a^3b^3c^3$.

Beweis. Man hat

$$(abc)^3 = abc \, . \, abc \, . \, abc$$
$$= aaa \, . \, bbb \, . \, ccc = a^3b^3c^3.$$

Allgemein ist

$$(abc \ldots)^n = a^nb^nc^n \ldots .$$

denn

$$(abc \ldots .)^n = \overset{1}{\breve{abc}} \ldots . . \overset{2}{\breve{abc}} \ldots . . \overset{n}{\breve{abc}} \ldots$$
$$= \overset{1}{\breve{a}}\overset{2}{\breve{a}}\overset{3}{\breve{a}} \ldots \overset{n}{\breve{a}} \, . \, \overset{1}{\breve{b}}\overset{2}{\breve{b}}\overset{3}{\breve{b}} \ldots \overset{n}{\breve{b}} \, . \, \overset{1}{\breve{c}}\overset{2}{\breve{c}}\overset{3}{\breve{c}} \ldots \overset{n}{\breve{c}} \ldots$$
$$= a^nb^nc^n \ldots$$

Zusatz.

Ein Produkt von Potenzen mit gleichen Exponenten ist gleich einer Potenz, deren Grundzahl durch das Produkt der Grundzahlen jener Potenzen gebildet wird und deren Exponent dem gemeinschaftlichen Exponenten gleich ist.

So ist z. B. $a^nb^nc^nd^n = (abcd)^n$.

Anmerkung. Bei einem Produkte von Zahlen, welche zum Theil Exponenten bei sich haben, bezieht sich der Exponent stets nur auf diejenige Zahl, welche zunächst vor ihm steht.

So ist z. B. $3 \, . \, 4^3 = 3 \, . \, 64 = 192.$
$(3 \, . \, 4)^3 = 12^3 = 1728.$

2) Ein Bruch wird potenzirt, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner potenzirt.

Behaupt. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}.$

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}$

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß allgemein

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Zusatz.

Jede Potenz eines eigentlichen Bruches ist wiederum ein Bruch (§. 51, 10).

§. 91. Vom Potenziren negativer Zahlen.

Da sich jede negative Zahl in ein Produkt zweier Faktoren zerlegen läßt, wovon der eine gleich dieser Zahl, positiv genommen, der andere aber $= -1$ ist (z. B. $-a = +a \,.\, -1$), so erstreckt sich die Untersuchung über die Potenzirung negativer Zahlen nur auf die Betrachtung der Potenzen von -1.

Nun ist aber

$$(-1)^1 = -1$$
$$(-1)^2 = (-1) \,.\, (-1) = +1$$
$$(-1)^3 = (-1)^2 \,.\, (-1) = (+1) \,.\, (-1) = -1$$
$$(-1)^4 = (-1)^2 \,.\, (-1)^2 = (+1) \,.\, (+1) = +1$$

u. s. w.

woraus wir ersehen, daß -1 in jeder geraden Potenz $+1$, dagegen in jeder ungeraden -1 gibt.

Bezeichnet also n irgend eine ganze positive Zahl, so ist allgemein:

$$(-a)^{2n} = (a \,.\, -1)^{2n} = a^{2n} \,.\, (-1)^{2n} = a^{2n} \,.\, (+1) = a^{2n}$$
$$(-a)^{2n\pm 1} = (a \,.\, -1)^{2n\pm 1} = a^{2n\pm 1} \,.\, (-1)^{2n\pm 1} = a^{2n\pm 1} . (-1)$$
$$= -a^{2n\pm 1}.$$

Um daher eine negative Zahl zu potenziren, potenzire man die absolute Zahl und nehme das Resultat positiv oder negativ, je nachdem der Potenzexponent gerade oder ungerade ist.

z. B. $(\ a)^{15} = -a^{15}$ und $\left(-\frac{a}{b}\right)^{12} = \frac{a^{12}}{b^{12}}$.

§. 92. Addition und Subtraction der Potenzen.

Sowohl für gleiche als ungleiche Potenzen gelten genau die früher für die Addition und Subtraction allgemeiner Zahlzeichen angegebenen Regeln.

Beispiele.

1) $3a^4 + 7a^4 = 10a^4$.
2) $5a^2b^3 + 7a^2b^3 = 12a^2b^3$.
3) $14x^8 - 3x^8 = 11x^8$.

4) $6m^3n^3 - 14m^3n^3 = -8m^3n^3$.

5) $4a^m - 3b^n + 8a^m - 7b^n = 12a^m - 10b^n$.

6) $(3a^3 - 4b^5 + c^2) + (8a^3 - 7b^5 + 4c^2) + (5a^3 + 9b^5 - 12c^2) =$

$$\begin{array}{rrr} 3a^3 & - 4b^5 & + c^2 \\ 8a^3 & - 7b^5 & + 4c^2 \\ 5a^3 & + 9b^5 & - 12c^2 \\ \hline 16a^3 & - 2b^5 & - 7c^2. \end{array}$$

§. 93. Aufgaben zur Uebung.

1) $5^3 + 7^4 = ?$

1a) $5 \,.\, 3^5 - 2 \,.\, 3^5 + 8 \,.\, 3^5 - 6 \,.\, 3^5 = ?$

1b) $(5 \,.\, 3)^2 - (2 \,.\, 3)^2 + (8 \,.\, 3)^2 - (6 \,.\, 3)^2 = ?$

2) $3^4 - 8^2 + 5^5 - 6^3 = ?$

3) $(3ab)^3 + (5ab)^3 - (4ab)^3 = ?$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = ?$

5) $\frac{3}{8} \,.\, 5^3 - 2 \,.\, 6^2 + \frac{(4 \,.\, 2)^4}{64} - 5\left(\frac{3}{4}\right)^3 = ?$

5a) $\left(\frac{3}{8} \,.\, 5\right)^3 - (2 \,.\, 6)^2 + \left(\frac{4 \,.\, 2}{64}\right)^4 - \left(5 \,.\, \frac{3}{4}\right)^3 = ?$

6) $4a^m + 5a^m - 6a^m = ?$

7) $8x^3 - 7y^4 + 9x^3 + 12y^4 = ?$

8) $(15a^3 + 7b^8 - 9c^5 + 8d^4) - (6a^3 - 3b^8 - 9c^5 - 7f^6) = ?$

9) $[(6a^5 - 7b^6 - 8c^3) + (4a^5 - 9b^6 - 18c^3)] - [(3a^5 - 4b^6 - 7c^3) + (2a^5 + b^6 - 3c^3)] = ?$

10) $(\frac{3}{5}a^m - b^n + 8\frac{3}{4}c^q) + \frac{2}{3}a^m - \frac{7}{8}b^n - 3\frac{1}{2}c^q) + (4\frac{7}{10}a^m - \frac{7}{12}b^n + \frac{5}{8}c^q) = ?$

§. 94. Multiplication der Potenzen.

1) Das Produkt zweier oder mehrer Potenzen mit einerlei Basis wird erhalten, wenn man die Exponenten der Faktoren addirt, die Basis aber unverändert läßt.

Behauptung. $a^2 \,.\, a^4 = a^{2+4} = a^6$.

Beweis. Man hat

$$a^2 \,.\, a^4 = aa \,.\, aaaa = aaaaaa = a^6.$$

Allgemein ist

$$a^m \cdot a^n = \overset{1\,2\,3}{aaa} \ldots \overset{m}{a} \cdot \overset{1\,2\,3}{aaa} \ldots \overset{n}{a} =$$

$$\overset{1\,2\,3}{aaa} \ldots \quad \overset{m+n}{a} = a^{m+n}$$

und

$$a^m\, a^n\, a^p\, a^q = a^{m+n+p+q}.$$

2) Was die Multiplication von Aggregaten von Potenzen mit einer Potenz oder mit einem anderen Aggregat, sowie das Ausscheiden von Faktoren und die Zerlegung eines Aggregates in ein Produkt zweier oder mehrer Faktoren betrifft, so gelten hierfür die früher für die betreffenden Fälle angeführten Regeln.

Beispiele.

1) $4a^6 \cdot 3a^8 \cdot 2a = 24a^{6+8+1} = 24a^{15}$.

2) $\frac{3}{4}\, a^2b^4c^5 \cdot \frac{5}{2}\, a^3bc^7d^4 = \frac{15}{8}\, a^5b^5c^{12}d^4$.

3) $\frac{4a^2bc^5}{5d^7f^2} \cdot 2ab^4c^5 = \frac{8a^3b^5c^{10}}{5d^7f^2}$.

4) $\frac{2(a+b)^m c^n}{3(f+g)^p} \cdot \frac{5(a+b)^q c^r}{7(f+g)^s} = \frac{10(a+b)^{m+q} c^{n+r}}{21(f+g)^{p+s}}$.

5) $(3a^2b^3 - 7ab^4 + 4a^5b^2) \cdot -3a^7b^4 = -9a^9b^7 + 21a^8b^8 - 12a^{12}b^6$.

6) $(4a^2b^3 - 6ab^5 - 3a^3b^8)(2a^2b^3 - 4ab^5 + 7a^3b^8) =$

$$\begin{array}{llllll}
8a^4b^6 & -\,12a^3b^8 & -\,6a^5b^{11} & & & \\
 & -\,16a^3b^8 & & +\,24a^2b^{10} & +\,12a^4b^{13} & \\
 & & +\,28a^5b^{11} & & -\,42a^4b^{13} & -\,21a^6b^{16} \\
\hline
8a^4b^6 & -\,28a^3b^8 & +\,22a^5b^{11} & +\,24a^2b^{10} & -\,30a^4b^{13} & -\,21a^6b^{16}
\end{array}$$

§. 95. Aufgaben zur Uebung.

1) $3a^4 \cdot 5a^7 = ?$

1a) $7a^3 \cdot -5a^6 = ?$

1b) $6x^3y^4 \cdot 4x^5y^7 = ?$

2) $2a^3b^5 \cdot 6a^8b^4 \cdot 5a^3b^2 = ?$

3) $\frac{3}{4}a^5b^3c^2 \cdot -\frac{2}{3}a^3b^4c^5 = ?$

3a) $\frac{5a^3b^4}{c^5} \cdot 7ab^5 = ?$

4) $\frac{7a^3}{5b^2} \cdot -\frac{3a^4}{4b^5} = ?$

5) $\frac{7a^m b^n}{3c^{3m}} \cdot \frac{5a^nb^p}{2c^{4m}d^3} = ?$

5a) $4(a^2 - b^3)^5 \,.\, 3(a^2 - b^3)^4 = ?$

5b) $\frac{3(x^6 + y^3)^p}{5a^r} \,.\, \frac{2(x^6 + y^3)^q}{7a^s b^u} = ?$

6) $\frac{5x^{m+4} y^{3n+2} z^4}{7a^{3+4m} b^{2n}} \,.\, -\frac{2x^{7+3m} y^{5m} z^p}{7a^m b^{n+p}} = ?$

7) $(5a^3b^8 - 7ab^6 + 8a^3bc^4 - 2b^4c^2)\, 3a^3b^2c^5 = ?$

8) $\left(\frac{3a^4}{5b^2} - \frac{7a^3}{8b^3} + \frac{5f^3}{4b^4d}\right) \,.\, -\frac{3af^3}{8d} = ?$

9) $\left(\frac{7a^{m+2} b^{3n+4}}{5c^{4p+7} d} - \frac{2a^5b^{2n+2}}{3c^{7p} d^{3q}}\right) \frac{5a^{5m+4}b^{2n+5}}{6c^{3p+2} d^{2q+1}} = ?$

10) $(6a^2 - 3ab + 4b^3)(5a^2b - 3a^3) = ?$

11) $(2a + b - 3c)(3a + 2b - c)(a - 4b + 2c) = ?$

11a) $(8a^2 + 20ab + 50b^2)(2a - 5b) = ?$

11b) $(8m^2 - 12mn + 18n^2)(6m^2 + 9mn) = ?$

11c) $(27x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 8x + 5\tfrac{1}{3})(9x^5 + 6x^4) = ?$

12) $(2a - 3b + 4c)^2 (5a^2 - 4b^2 + 2c^2) = ?$

13) $(x^6 - 5x^4y^2 + 3x^2y^4)(8x^4 - 7x^2y^2 + y^4) = ?$

14) $(4m^3n^2 - 8m^2p^3q + 3q^4)(4m^3n^2 + 8m^2p^3q - 3q^4) = ?$

15) $(5x^{3m+2}y^{4p} - 7y^{4m+5}z^{5q})(5x^{3m+2}y^{4p} + 7y^{4m+5}z^{5q}) = ?$

16) $(2a^{3m+2n}b^{3p+4} - 3a^{3n+2}b^{5m+2p})(3a^{3n+5}b^{2m+3} +$
$4a^{3m}b^{2p+4}) = ?$

16a) $\left(\frac{3a^3b^4}{4c^5} - \frac{5ab^3}{2c^2} + \frac{6a^3b^2}{5c^4}\right)\left(\frac{3a^3b^4}{4c^5} + \frac{5ab^3}{2c^2} + \frac{6a^3b^2}{5c^4}\right) = ?$

§. 96. Division der Potenzen.

1) Soll a^m durch a^n dividirt werden, so sind zunächst drei Fälle zu unterscheiden.

Es ist nämlich entweder

α) $m = n$, β) $m > n$, oder γ) $m < n$.

α) Ist $m = n$, so wird nach §. 35, 3

$$a^m : a^n = 1.$$

β) Ist $m > n$, z. B. $m = n + x$

also $x = m - n$,

so wird

$$a^m : a^n = a^{n+x} : a^n = (a^n a^x) : a^n$$
$$= a^x = a^{m-n}.$$

γ) Ist $m < n$, z. B. $n = m + y$
also $y = n - m$
so wird

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+y} = a^m : (a^m a^y)$$
$$= \frac{a^m}{a^m a^y} = \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Aus der Betrachtung der erhaltenen Resultate für die drei bezeichneten Fälle ziehen wir folgende Sätze:

a) Gleiche Potenzen in einander dividirt geben stets 1 als Quotient.

b) Zwei gleichbasige Potenzen werden in einander dividirt, wenn man den kleineren Exponenten von dem größeren subtrahirt und der gemeinschaftlichen Basis diese Differenz als Exponent gibt, dann ist entweder diese Potenz, oder der reciproke Werth derselben der verlangte Quotient, je nachdem bezüglich der Exponent des Dividenden, oder der des Divisors der größere ist.

Beispiele.

1) $z^9 : z^9 = 1.$

2) $x^8 : x^5 = x^{8-5} = x^3.$

3) $y^7 : y^{12} = \frac{1}{y^{12-7}} = \frac{1}{y^5}.$

4) $12a^5b^3c^4 : 3a^2b^7c^4 = \frac{4a^3}{b^4}.$

2) Wie wir in 1, α gesehen haben, ist

$$a^m : a^m = 1.$$

Wenden wir aber auf diese Divisionsaufgabe das für 1, β gefundene Verfahren an, so resultirt

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Wir schließen hieraus, daß die Zahleneinheit zugleich als Symbol der nullten Potenz irgend einer endlichen Zahl angesehen werden kann, und umgekehrt.

3) Was die Division eines Aggregates durch eine Zahl, oder durch ein anderes Aggregat betrifft, so gelten dafür genau die in §. 42—44 angeführten Regeln.

Beispiele.

1) $(15a^8 - 3a^7 + 18a^9) : 3a^3 = 5a^5 - a^4 + 6a^6$.

2) $(8x^6 - 36x^4 + 54x^2 - 27) : (2x^2 - 3) = 4x^4 - 12x^2 + 9$

$$\begin{array}{l} 8x^6 - 12x^4 \\ \hline \quad - 24x^4 + 54x^2 - 27 \\ \quad - 24x^4 + 36x^2 \\ \hline \qquad\qquad 18x^2 - 27 \\ \qquad\qquad 18x^2 - 27 \\ \hline \end{array}$$

3) $(16a^4 - 81b^4) : (2a - 3b) = 8a^3 + 12a^2b + 18ab^2 + 27b^3$.

$$\begin{array}{l} 16a^4 - 24a^3b \\ \hline \quad 24a^3b - 81b^4 \\ \quad 24a^3b - 36a^2b^2 \\ \hline \qquad 36a^2b^2 - 81b^4 \\ \qquad 36a^2b^2 - 54ab^3 \\ \hline \qquad\quad 54ab^3 - 81b^4 \\ \qquad\quad 54ab^3 - 81b^4. \\ \hline \end{array}$$

4) $(a^4 - b^4) : (a - b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

$$\begin{array}{l} a^4 - a^3b \\ \hline \quad a^3b - b^4 \\ \quad a^3b - a^2b^2 \\ \hline \qquad a^2b^2 - b^4 \\ \qquad a^2b^2 - ab^3 \\ \hline \qquad\quad ab^3 - b^4 \\ \qquad\quad ab^3 - b^4. \\ \hline \end{array}$$

5) Allgemein findet man für die aufgehende Division der Form:

$(a^n - b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n$

$$\begin{array}{l} a^n - a^{n-1}b \\ \hline \quad a^{n-1}b - b^n \\ \quad a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 \\ \hline \qquad a^{n-2}b^2 - b \\ \qquad a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 \\ \hline \qquad\quad a^{n-3}b^3 \ldots\ldots \end{array}$$

§. 97. Aufgaben zur Uebung.

1) $24a^7b^5c^8 : 6a^3b^4c^5 = ?$

1a) $\frac{3a^3b^5}{4} : 2ab^3 = ?$

1b) $\frac{2x^7y^4}{5} : \frac{3x^2y^3}{4} = ?$

2) $25a^8b^4c^3d^5 : 5a^2b^4c^2d^2 = ?$

3) $\frac{7a^3b^2}{5c^4} : 6a^8b^4c^5 = ?$

4) $4x^3y^2 : \frac{2x^4y^2}{3z^5} = ?$

4a) $15\,(a^2 - b^3)^7 : 3\,(a^2 - b^3)^4 = ?$

4b) $24x^{3m} : 6x^m = ?$

5) $30a^{4m}b^{2n} : 6a^{3m}b^n = ?$

6) $\frac{4a^{9m}b^{8n}}{5c^{10p}} : \frac{7a^{5m}c^{6p}}{b^{10n}} = ?$

6a) $12\,(a^m - 3b^n)^8 : 4\,(a^m - 3b^n)^5 = ?$

7) $(8a^6b^4 - 7a^2b^5 + 9a^5b^8c^2) : 2a^5b^5 = ?$

7a) $(15m^{4x}n^{8y} - 3m^{6x}n^{7y} + 6m^{10x}n^{4y}) : 3m^{3x}n^{2y} = ?$

8) $\left(\frac{5x^2y^2}{7z^4} - \frac{3x^3y^3}{4z^5} + \frac{9x^8y}{z}\right) : -\frac{2x^4y^3}{3z^5} = ?$

9) $(25a^6b^4 - 30a^5b^6 + 9a^4b^8) : (5a^3b^2 - 3a^2b^4) = ?$

10) $(10a^6 - 26a^3b^2c^3 - 21a^5c^4 + 12b^4c^6 + 7a^2b^2c^7 - 10a^4c^8) : (2a^3 - 4b^2c^3 - 5a^2c^4) = ?$

11) $(4a^{2m+6}b^{6n} + 16a^6b^{3n}c^{3n} + 16a^{6-2m}c^{6n}) : (2a^{m+3}b^{3n} + 4a^{3-m}c^{3n}) = ?$

12) $(x^6 - 16x^3y^3 + 64y^6) : (x^2 - 4xy + 4y^2) = ?$

12a) $(56a^5 - 124a^4b - 94a^3b^2 + 366a^2b^3 - 278ab^4 + 114b^5) : (38b^2 - 14a^2 - 4ab) = ?$

12b) $(32a^6 - ab^5) : (2a^2 - ab) = ?$

12c) $(x^5 - y^5) : (x - y) = ?$

13) $\left(\frac{9x^4y^8}{16z^6} - \frac{25x^6}{9z^2} - \frac{80x^5yz^2}{3} - 64x^4y^2z^6\right) : \left(\frac{3x^2y^4}{4z^3} + \frac{5x^3}{3z} + 8x^2yz^3\right) = ?$

14) $(9a^{2m}b^{2n} - 12a^{m+2}b^{n+1} + 18a^{m+n}b^{m+n} + 4a^4b^2 - 12a^{n+2}b^{m+1} + 9a^{2n}b^{2m}) : (3a^mb^n - 2a^2b + 3a^nb^m) = ?$

14a) $(16a^6b^4 - 64a^4c^6d^2 + 48a^2c^3d^5 - 9d^8) : (4a^3b^2 + 8a^2c^3d - 3d^4) = ?$

14b) $\left(\frac{9m^6n^8}{16p^{10}} - \frac{25m^2n^6}{4p^4} - \frac{6m^4n^5}{p^6} - \frac{36m^6n^4}{25p^8}\right) : \left(\frac{3m^3n^4}{4p^5} - \frac{5mn^3}{2p^2} + \frac{6m^3n^2}{5p^4}\right) = ?$

14c) $(729a^{12} - 486a^{10} + 243a^8 - 108a^6 + 27a^4 - 6a^2 + 1) : (1 - 3a^2 + 9a^4 - 27a^6) = ?$

B. Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.

§. 98. Erklärungen.

1) Für den Fall, daß $m < n$, z. B.

$$n = m + y,$$

also

$$y = n - m$$

ist, war $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^y}$ (§. 96, 1, γ)

Führen wir aber die vorstehende Division nach derjenigen Regel aus, welche unter der Voraussetzung hergeleitet wurde, daß der Exponent des Dividenden größer als der des Divisors sei, so erhalten wir

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)} = a^{-y}.$$

Die Vergleichung der beiden Resultate führt zu folgendem Schlusse:

Jede Potenz mit negativem Exponenten ist als der reciproke Werth der Potenz für dieselbe Basis mit dem nämlichen, aber positiven Exponenten aufzufassen.

Beispiele.

1) $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$.

2) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

3) $\frac{1}{a^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{a^4}} = a^4$.

2) Umgekehrt kann jede reciproke Potenz mit positivem Exponenten als Potenz mit negativem Exponenten dargestellt werden.

Beispiele.

1) $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$

2) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

§. 99. Rechnung mit Potenzen mit negativen Exponenten.

Alle Sätze, welche wir früher für die verschiedenen Rechnungsoperationen mit Potenzen mit positiven Exponenten entwickelt

haben, gelten auch für die Potenzen mit negativen Exponenten, wie wir nachstehend in Kürze zeigen wollen.

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} b^{-m} \text{ (vergl. §. 90, 1).}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} \text{ (vergl. §. 90, 2).}$$

$$\left.\begin{array}{l}
a^m \,.\, a^{-n} = a^m \,.\, \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}. \\
a^{-m} \,.\, a^n = \frac{1}{a^m} \,.\, a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n} \\
a^{-m} \,.\, a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}
\end{array}\right\} \text{(§. 94, 1.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \,.\, a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)} \\
a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \,.\, a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} \\
\qquad = a^{-m-n} \\
a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-(m-n)} \\
\qquad = a^{-m+n} = a^{(-m)-(-n)}
\end{array}\right\} \text{(§. 96.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{a^{2n}} = a^{-2n} \\
(-a)^{-(2n+1)} = \frac{1}{(-a)^{2n+1}} = \frac{1}{-a^{2n+1}} = -\frac{1}{a^{2n+1}} = -a^{-(2n+1)}
\end{array}\right\} \text{(§. 91.)}$$

Wir können somit jetzt die früher für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aufgestellten Sätze als allgemein für ganze Exponenten giltig ansehen und sagen:

Sollen gleichbasige Potenzen multiplicirt werden, so addire man ihre Exponenten; sollen dieselben dividirt werden, so subtrahire man den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden.

Eine negative Zahl auf eine Potenz erhoben, gib ein positives oder negatives Resultat, je nachdem der Exponent gerade oder ungerade ist.

Anmerkung. Bei der Division kann man also auch sämmtliche Exponenten des Divisors in die entgegengesetzten verwandeln nnd dann nach den Regeln der Multiplication verfahren.

Zusatz.

Kommen im Zähler und Nenner eines Bruches Faktoren mit negativen Exponenten vor, so kann man diese dadurch beseitigen, daß man solche Faktoren aus dem Zähler in den Nenner und umgekehrt versetzt, dabei aber das Zeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

Beispiel.

$$\frac{3a^{-m}b^p}{4c^{-q}\,d^r} = \frac{3b^pc^q}{4a^m\,d^r};$$

denn man hat

$$\frac{3a^{-m}b^p}{4c^{-q}d^r} = \frac{3b^p}{4d^r} \cdot a^{-m} \cdot \frac{1}{c^{-q}} = \frac{3b^p}{4d^r} \cdot \frac{1}{a^m} \cdot c^q = \frac{3b^p\,c^q}{4a^m\,d^r}$$

§. 100. Aufgaben zur Uebung.

1) In nachstehenden Ausdrücken die negativen Exponenten zu beseitigen:

a) $5a^{-3}b^4c^{-2}$.

b) $\dfrac{4x^{-m}\,(y + z)^{-p}\,c^q}{a^{-r}\,b^s}$

c) $\dfrac{3^{-4}\,a^2b^{-4}\,(c + d)^{-5}}{4^{-7}\,c^{-8}\,d^2f^{-7}}$

1a) $2^{-5} \,.\, 2^3 = ?$

2) $3a^{-7}\,b^6c^{-5} \,.\, 5a^3\,b^{-9}\,c^7 = ?$

2a) $3\,(a^2 - b)^{-4} \,.\, 2\,(a^2 - b)^{-5} = ?$

2b) $a^{-5}\,b^3 \,.\, a^7b^{-9} = ?$

2c) $3^{-2}\,x^{-5}\,y^2z^{-8} \,.\, 2^{-3}\,x^5y^{-2}\,z^8 = ?$

2d) $\dfrac{4a^{-7}\,b^6}{5c^{-3}} \cdot \dfrac{3a^5c^2}{4b^7} = ?$

2e) $\dfrac{5a^{-3}\,(b^{-2} - c^3)^{-4}}{8d^{-6}} \,.\, 4a^{-3}\,(6^{-2} - c^3)^6\,d^{-3} = ?$

3) $\dfrac{5a^{-6}\,(b + c)^3\,d^9}{6f^{-5}\,g^9} \cdot \dfrac{3a^{-1}\,(b + c)^{-4}\,d^{-8}}{8f^{-7}\,g^{12}} = ?$

3a) $6^{-3} : 3^{-4} = ?$

3b) $12x^{-7} : 6x^3 = ?$

3c) $24y^3\,z^{-8} : 3y^{-4}\,z^3 = ?$

4) $15a^{-12}\,b^3\,x^{-5} : 3a^8\,b^{-4}\,x^{-5}\,y^{-4} = ?$

4a) $\frac{8x^{-7}y^{-5}}{3z^{-4}} : 2x^5y^{-8}z^2 = ?$

4b) $\frac{3a^{-3}b^{-1}}{4c^2} : \frac{4a^3c^{-3}}{5b^{-4}d^3} = ?$

5) $\frac{3(x+y)^{-7}z^{-4}}{5u^8v^{-4}} : \frac{4u^{-8}z^{-9}}{5(x+y)^3v^{-1}} = ?$

6) $(4a^{-8}b^7 + 3a^2b^{-5} - 7b^8c^{-4})\,6a^3b^{-7}c^4 = ?$

7) $(5m^8n^{-7} - 6m^{-4}n^8 + 15am^{-7}n^{-2}) : 3m^2n^{-5}p^6 = ?$

8) $\left(\frac{2a^{-7}}{3b^4} + \frac{8a^2}{b^{-5}} + 4a^3b^{-6}\right)\left(\frac{5}{6a^7b^4} + 7a^2b^5 - \frac{6a^3}{b^6}\right) = ?$

9) $\left(\frac{15a^{-2}y^4}{4x^{-6}z^4} - \frac{6bc^{-4}y^2}{x^{-3}} + \frac{6a^{-1}x^5}{7y^3} - \frac{25c^3x^3z^{-4}}{6a^6b^4y^{-10}} + \frac{20a^{-4}y^8}{3b^3c} - \frac{20b^{-4}c^3}{21a^5x^{-2}y^{-3}}\right) : \left(\frac{3x^3y^2}{4a^2} - \frac{5a^{-6}}{6b^4c^{-3}y^{-8}}\right) = ?$

10) $\left(\frac{1}{a^{-4}} - \frac{16}{b^{-4}}\right) : \left(a + \frac{2}{b^{-1}}\right) = ?$

C. Wiederholte Potenzirung.

§. 101. Potenzirung von Monomien.

1) Wird eine Potenz mehrmals mit sich multiplicirt, so erhält man eine **Potenz von einer Potenz.**

2) **Um Potenzen nochmals zu potenziren, lasse man die Basis unverändert und mache deren Exponenten gleich dem Produkte der einzelnen Exponenten.**

Behaupt. $(a^3)^4 = a^{3\cdot4} = a^{12}$.

Beweis. Es ist

$(a^3)^4 = a^3 \,.\, a^3 \,.\, a^3 \,.\, a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot4} = a^{12}$

und allgemein

$$(a^m)^n = \overset{1}{a^m} \,.\, \overset{2}{a^m} \,.\, \overset{3}{a^m} \ldots\ldots \overset{n}{a^m}$$

$$= a^{\overset{1}{m} + \overset{2}{m} + \overset{3}{m} + \cdots + \overset{n}{m}} = a^{mn}.$$

Beispiele.

1) $((a^3)^2)^4 = (a^{3\cdot2})^4 = a^{3\cdot2\cdot4} = a^{24}$

2) $(((a^m)^n)^p)^q = a^{mnpq}$.

3) Der eben ausgesprochene Satz gilt nicht nur wenn die Exponenten positiv, sondern auch wenn sie theilweise, oder alle negativ sind.

Denn es ist z. B.

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m \cdot -n}$$

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = \frac{1}{a^{-mn}} =$$

$$= a^{mn} = a^{-m \cdot -n}.$$

§. 102. Aufgaben zur Uebung.

1) $(a^2)^3 = ?$ 1a) $(a^p b^q)^r = ?$
2) $((2^3)^2)^4 = ?$ 2a) $(a^p b^q c^{-r})^{-s} = ?$
3) $((3^2)^{-1})^3 = ?$ 4) $((a^m)^{-n})^p = ?$
5) $((a^2b^{-3})^{-1})^{-4} = ?$ 6) $((-a^3)^2)^5 = ?$
7) $\left(\left(-\frac{2a^4b^{-2}}{3c^{-3}}\right)^{-1}\right)^3 = ?$ 8) $\left(\left(\left(-\frac{a^2b^{-3}c^{-5}}{d^{-4}f^7}\right)^3\right)^{-1}\right)^5 = ?$
9) $((3^{-2}(a^3-b)^4)^{-3} = ?$ 10) $(((x^2-y^{-2})^{-1})^3)^{-2} = ?$

§. 103. Quadrirung eines Binoms.

Das Quadrat eines Binoms besteht:
1) aus dem Quadrate des ersten Gliedes,
2) aus dem doppelten Produkte der zwei Glieder,
3) aus dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Beweis. Nach §. 30, 2, Beispiel 1 und 2 ist:

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$$
$$= a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Hiernach läßt sich nun leicht das Quadrat eines jeden Binoms bestimmen.

Beispiele.

1) $(2a^2 + 3b^3)^2 = (2a^2)^2 + 2 \cdot 2a^2 \cdot 3b^3 + (3b^3)^2$
$= 4a^4 + 12a^2b^3 + 9b^6.$

2) $\left(\frac{4m^2n^3}{3p^4} - \frac{3m^4p}{5n^3}\right)^2 = \left(\frac{4m^2n^3}{3p^4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4m^2n^3}{3p^4} \cdot \frac{3m^4p}{5n^3} +$
$\left(\frac{3m^4p}{5n^3}\right)^2 = \frac{16m^4n^6}{9p^8} - \frac{8m^6}{5p^3} + \frac{9m^8p^2}{25n^6}.$

$$3)\ \left(\frac{3a^2}{4b^3} - \frac{2b^6}{3a^3}\right)^{-2} = \left(\frac{9a^5 - 8b^9}{12a^3b^3}\right)^{-2} = \left(\frac{12a^3b^3}{9a^5 - 8b^9}\right)^2$$

$$= \frac{144a^6b^6}{81a^{10} - 144a^5b^9 + 64b^{18}}.$$

§. 104. Quadrirung eines Polynoms.

Das Quadrat eines Polynoms besteht:

1) aus der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder,
2) aus der Summe der doppelten Produkte eines jeden Gliedes in die Summe aller vorhergehenden.

Behaupt. $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2$.

Beweis. Setzen wir

$$a + b = m,$$

so folgt

$$(a + b + c)^2 = (m + c)^2 = m^2 + 2cm + c^2$$
$$= (a + b)^2 + 2c\,(a + b) + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2.$$

Ebenso wird

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2;$$

denn fassen wir wieder $a + b + c$ als eine Zahl auf, so folgt:

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2$$
$$= (a + b + c)^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2,$$

oder nach dem vorstehenden Beispiele

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2.$$

Auf gleiche Weise läßt sich die Richtigkeit obiger Behauptung für das Quadrat eines Polynoms von beliebig vielen Gliedern darthun.

Beispiel.

$$(2a^2 - 3b^5 + 4c^3)^2 = (2a^2)^2 - 2\,.\,2a^2\,.\,3b^5\,. + (3b^5)^2 + 2\,.\,4c^3\,(2a^2 - 3b^5) + (4c^3)^2$$
$$= 4a^4 - 12a^2b^5 + 9b^{10} + 16a^2c^3 - 24b^5c^3 + 16c^6.$$

Anmerkung. Auch bei der Quadrirung von Zahlen kann von obigen Regeln mit Vortheil Gebrauch gemacht werden, wie nachstehende Beispiele zeigen.

1) $85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2$
$= 6400 + 800 + 25 = 7225.$

2) $374^2 = (300 + 70 + 4)^2 = 300^2 + 70^2 + 4^2 + 2 \cdot 300 \cdot 70 + 2 \cdot 300 \cdot 4 + 2 \cdot 70 \cdot 4$
$= 90000 + 4900 + 16 + 42000 + 2400 + 560$
$= 139876.$

§. 105. Aufgaben zur Uebung.

1) $(x + 2y)^2 = ?$
2) $(2a - 5b)^2 = ?$
3) $(3m^3 - 4n^5)^2 = ?$
4) $\left(\frac{3a^2}{b} + 2b^3\right)^2 = ?$
4a) $\left(\frac{2a^3}{3b^2} - \frac{4a^2}{5b}\right)^2 = ?$
5) $\left(\frac{2a^2}{5b^3} + \frac{3b^2}{4a^3}\right)^2 = ?$
6) $\left(\frac{3x^{-3}y^2}{2z^5} - \frac{4y^{-4}z^2}{3x^{-4}}\right)^2 = ?$
7) $(2x - y + 3z)^2 = ?$
8) $(4m^2 - 2n^3 - 3p^4)^2 = ?$
9) $\left(\frac{3a^2}{2b} - \frac{4b^3}{5a} - a^3b^4\right)^2 = ?$
10) $(2a^{-3} + 3b^4 - 5c^3 - 2d^{-2})^2 = ?$
11) $(a + b + c + d + f)^2 = ?$
12) $(2a^8 - 4a^6 + 8a^4 - 14a^2 + 22)^2 = ?$

§. 106. Kubirung eines Binoms.

Der Kubus eines Binoms besteht:
1) aus dem Kubus des ersten Gliedes,
2) aus dem dreifachen Produkte des Quadrats vom ersten Gliede in das zweite,
3) aus dem dreifachen Produkte des ersten Gliedes in das Quadrat des zweiten Gliedes,
4) aus dem Kubus des zweiten Gliedes.

Behaupt. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

Beweis. $(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2 (a \pm b)$
$= (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b)$
$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

Beispiele.

1) $(4x^2+2y^3)^3 = (4x^2)^3 + 3(4x^2)^2 . 2y^3 + 3 . 4x^2 . (2y^3)^2 + (2y^3)^3$
$= 64x^6 + 96x^4y^3 + 48x^2y^6 + 8y^9.$

2) $\left(\frac{2m^2}{3n^3} - \frac{4n^3}{5m^7}\right)^3 = \left(\frac{2m^2}{3n^3}\right)^3 - 3\left(\frac{2m^2}{3n^3}\right)^2 . \left(\frac{4n^3}{5m^7}\right) + 3 . \left(\frac{2m^2}{3n^3}\right) . \left(\frac{4n^3}{5m^7}\right)^2 - \left(\frac{4n^3}{5m^7}\right)^3$
$= \frac{8m^6}{27n^9} - \frac{16}{15m^3n^3} + \frac{32n^3}{25m^{12}} - \frac{64n^9}{125m^{21}}.$

3) $94^3 = (90+4)^3 = 90^3 + 3 . 90^2 . 4 + 3 . 90 . 4^2 + 4^3$
$= 729000 + 97200 + 4320 + 64$
$= 830584.$

§. 107. Kubirung eines Polynoms.

Der Kubus eines Polynoms besteht:

1) aus der Summe der Kuben aller Glieder,
2) aus dem dreifachen Produkte eines jeden Gliedes in das Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder,
3) aus dem dreifachen Produkte des Quadrats eines jeden Gliedes in die Summe aller vorangehenden Glieder.

Behaupt. $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3.$

Beweis. Setzen wir

$$a + b = m$$

so ist

$$(a+b+c)^3 = (m+c)^3 = m^3 + 3cm^2 + 3c^2m + c^3$$
$$= (a+b)^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3.$$

Ebenso wird

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3 + 3d(a+b+c)^2 + 3d^2(a+b+c) + d^3.$$

Denn fassen wir wieder $a + b + c$ als eine Zahl auf, so folgt

$(a + b + c + d)^3 = (a + b + c)^3 + 3d\,(a + b + c)^2$
$\qquad + 3d^2\,(a + b + c) + d^3,$

oder nach vorstehendem Beispiele

$(a + b + c + d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 +$
$\quad 3c\,(a + b)^2 + 3c^2\,(a + b) + c^3 +$
$\quad 3d\,(a + b + c)^2 + 3d^2\,(a + b + c) + d^3.$

§. 108. Aufgaben zur Uebung.

1) $(2x^3 - 3y^2)^3 = ?$
1a) $(3x^2 - 2yz)^3 = ?$
2) $\left(\frac{4m^3}{3n^2} - \frac{2n}{3m^4}\right)^3 = ?$
2a) $\left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{4x}{9a}\right)^3 = ?$
3) $(3a^2 - 2ab + b^2)^3 = ?$
3a) $(a - 2a^2 + 3a^3)^3 = ?$
4) $(2x - 3y + z - 4v)^3 = ?$

○ §. 109. Höhere Potenzen.

Die in den letzten Paragraphen entwickelten Regeln für Quadrirungen und Kubirungen setzen uns in den Stand einen Ausdruck auch auf höhere Potenzen als die dritte zu erheben, sobald der gegebene Exponent keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthält.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung des dabei zu beobachtenden Verfahrens hier folgen:

1) $(a + b)^4 = ((a + b)^2)^2$ (§. 101, 2)
$\qquad = (a^2 + 2ab + b^2)^2$
$\qquad = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

2) $(a + b)^6 = ((a + b)^3)^2$
$\qquad = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)^2$
$\qquad = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4$
$\qquad + 6ab^5 + b^6.$

§. 110. Aufgaben zur Uebung.

1) $(x - y)^4 = ?$
1a) $(x + 1)^6 = ?$

1b) $(1 - a)^8 = ?$

1c) $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y\right)^4 = ?$

2) $(m + n + y)^4 = ?$

3) $(a + b + c)^6 = ?$

4) $(a + b + c + d)^4 = ?$

○ §. 111. Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch Potenzirung.

a) Für positive Grundzahlen und Exponenten.

1) Die Potenzen aller Zahlen, die größer als 1 sind, wachsen gleichzeitig mit den Exponenten.

Beweis. Bezeichnet m irgend eine positive Zahl, so ist

$$1 < 1 + m$$

und wenn man nun beiderseits diese Ungleichung nach und nach mit

$$(1 + m),\ (1 + m)^2,\ (1 + m)^3,\ \ldots\ (1 + m)^n$$

multiplicirt, so erhält man nach §. 64, 1

$$(1+m) < (1+m)^2 < (1+m)^3 < \ldots < (1+m)^n < (1+m)^{n+1}.$$

2) Ungleiche positive Zahlen auf einerlei positive Exponenten erhoben, geben übereinstimmend ungleiche Potenzen.

Vorauss. Es sei $a > b$,

Behaupt. so ist $a^n > b^n$.

Beweis. Setzen wir $a = b + m = b\left(1 + \frac{m}{b}\right)$ so wird

$$a^n = \left[b\left(1 + \frac{m}{b}\right)\right]^n = b^n\left(1 + \frac{m}{b}\right)^n \quad (\text{§. } 90,\ 1).$$

Da nun $\frac{m}{b}$ positiv ist, so muß offenbar

$$a^n > b^n$$

sein.

Zusatz.

Sind die Exponenten zweier gleichen Potenzen einander gleich, so sind auch die Grundzahlen einander gleich.

3) Die Potenzen eines echten Bruches nehmen ab, wenn der Exponent wächst, bleiben aber stets positiv.

Beweis.

Um die Richtigkeit dieses Satzes zu beweisen, bezeichne m irgend eine positive Zahl, dann ist $\frac{1}{1+m}$ ein echter Bruch und

$$1 > \frac{1}{1+m} > 0.$$

Multiplicirt man sämmtliche Glieder dieser Ungleichungen zugleich nach und nach mit

$$\frac{1}{1+m}, \left(\frac{1}{1+m}\right)^2, \left(\frac{1}{1+m}\right)^3, \ldots \left(\frac{1}{1+m}\right)^n$$

so erhält man nach §. 64, 1

$$\frac{1}{1+m} > \left(\frac{1}{1+m}\right)^2 > \left(\frac{1}{1+m}\right)^3 > \ldots > \left(\frac{1}{1+m}\right)^n > \left(\frac{1}{1+m}\right)^{n+1} > 0.$$

Zusatz.

Ein echter Bruch auf ungleiche Exponenten erhoben gibt also nicht übereinstimmende ungleiche Potenzen.

4) Ungleiche Zahlen, welche größer als 1 sind, auf übereinstimmend ungleiche Exponenten erhoben, geben übereinstimmend ungleiche Potenzen.

Voraus s. Es sei $a > b > 1$ und $m > n$,

Behaupt. so ist $a^m > b^n$.

Beweis. Es ist offenbar

$$\begin{array}{ll} & a^m > a^n \\ \text{und nach 2)} & a^n > b^n \\ \hline \text{also auch} & a^m > b^n. \end{array}$$

5) Ungleiche echte Brüche auf nicht übereinstimmend ungleiche Exponenten erhoben, geben mit den Brüchen übereinstimmend ungleiche Potenzen.

Voraussetzung. Es sei $b > a$, $d > c$ und $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ferner $m < n$

Behauptung. so ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

Beweis. Man hat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

und

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n > \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

folglich

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

6) Ungleiche Zahlen, die $\gtrless 1$, bezüglich auf nicht übereinstimmend und übereinstimmend ungleiche Potenzen erhoben, geben Unbestimmtes.

Ist 1) $a > b > 1$, $m < n$, so ist

$$a^m \gtreqless b^n.$$

Ist 2) $a < b < 1$, $m < n$, so kann ebenfalls sein

$$a^m \gtreqless b^n.$$

b) Für den Fall, daß die Grundzahlen oder der Exponent, oder auch beide zugleich negativ sind.

Für jede der hier vorkommenden Fragen läßt sich das Resultat leicht auf dieselbe Weise entwickeln, wie in vorhergehendem Falle, wenn man nur berücksichtigt, daß negative Zahlen einen um so kleineren Werth haben, je größer sie absolut genommen sind.

Ist z. B. $a = b$, $m > n$, so wird

$$a^m > b^n,$$

folglich wenn m und n ungerade sind, $(-a)^m < (-b)^n$ u. s. f.

Fünfter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

---

§. 112. Erklärungen.

1) Wie man durch die Multiplication unmittelbar durch Umkehrung der Frage auf die Divisionsaufgabe geführt wurde, so zieht auch die in vorhergehendem Abschnitte behandelte Potenzirung folgende Aufgaben nach sich.

a) Aus dem gegebenen Werthe einer Potenz und ihrem Exponenten die Basis zu finden.

b) Aus dem gegebenen Werthe einer Potenz und ihrer Basis den entsprechenden Exponenten zu bestimmen.

Die erste dieser Aufgaben führt uns auf das Radiciren oder Wurzelausziehen, die zweite auf das Logarithmiren oder Exponentiiren.

Das Geschäft des Radicirens wird durch das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ angedeutet, welches man vor den gegebenen Potenzwerth setzt und in dessen Oeffnung der gegebene Exponent eingeschrieben wird.

Ist z. B. $x = a$

und sind n und a gegeben, während die Basis x bestimmt werden soll, so wird diese Aufgabe ausgedrückt durch

$$x = \sqrt[n]{a}$$

und ist dafür zu lesen: „x ist die nte Wurzel aus a."

Der Exponent n heißt nun der Wurzelexponent oder Radicator, die Zahl a der Radicand.

2) Da hiernach die Aufgabe des Wurzelausziehens in der Aufsuchung einer Zahl besteht, welche zum Wurzelexponenten potenzirt den Radicanden als Resultat liefert, so läßt sich die Richtigkeit einer jeden vollzogenen Wurzelausziehung auf dem bezeichneten Wege stets leicht prüfen.

So ist z. B. $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[3]{512} = 8$
weil umgekehrt $3^4 = 81$ und $8^3 = 512$.

3) Ist der Radicand ein Aggregat, so setzt man dieses in Klammern, oder dehnt das Wurzelzeichen über den ganzen Ausdruck hin aus.

Z. B. $\sqrt[n]{}\,(a^3 - 4a^2b - 3b^5)$ oder $\sqrt[n]{a^3 - 4a^2b - 3b^5}$.
Um jedem Irrthume vorzubeugen, verbindet man auch häufig beide Bezeichnungsarten und schreibt also:

$$\sqrt[n]{(a^3 - 4a^2b - 3b^5)}.$$

4) Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurzhin $\sqrt{a}$ und liest: „Quadratwurzel aus a." Ebenso nennt man auch die dritte Wurzel Kubikwurzel.

5) Jeder Ausdruck, vor welchem sich ein Wurzelzeichen befindet, heißt ein Wurzelausdruck. Haben mehre Wurzelausdrücke gleiche Wurzelexponenten, so sagt man, dieselben seien gleichnamig, sind aber außerdem auch die Radicanden gleich, so nennt man sie gleich.

Z. B. $\sqrt[5]{a^4}$ und $\sqrt[5]{b^2}$ sind gleichnamige, dagegen $\sqrt[7]{x}$ und $\sqrt[7]{x}$ sind gleiche Wurzelausdrücke.

6) Nach §. 91 sind die Potenzen negativer Zahlen positiv oder negativ, jenachdem der Potenzexponent gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt aber durch Umkehrung unmittelbar, daß jede Wurzel mit einem ungeraden Wurzelexponenten aus einem negativen Radicanden wiederum negativ ist, mit einem geraden Wurzelexponenten dagegen weder negativ noch positiv sein kann.

So ist z. B.

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ denn } (-4)^3 = -64,$$

dagegen $\sqrt[4]{-256}$ weder $+4$ noch -4, weil $(\pm 4)^4 = +256$ ist.

Man nennt aus diesem Grunde jeden Wurzelausdruck, dessen Radicand negativ und dessen Wurzelexponent gerade ist, einen

imaginären oder eingebildeten, zum Unterschiede von allen übrigen Zahlenwerthen, welche im Gegensatze zu den imaginären reell heißen.

Die allgemeine Form eines imaginären Ausdruckes ist also

$$\sqrt[2n]{-a}.$$

Ein Binom von der Form

$$a + \sqrt{-b}$$

heißt eine complexe Zahl und $\sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Man bezeichnet diese gewöhnlich durch i.

7) Da sowohl $(+a)^{2n}$ als auch $(-a)^{2n} = a^{2n}$ ist (§. 91), so wird auch umgekehrt $\sqrt[2n]{a^{2n}}$ sowohl $+a$ als $-a$ sein können. Wir schließen hieraus, daß einer jeden Wurzel mit geradem Exponenten wenigstens zwei Werthe entsprechen, und werden hierdurch unmittelbar zu der Frage gedrängt, ob nicht jedem Wurzelausdrucke mehre Werthe zukommen und wenn dieses der Fall sein sollte, wie viel solcher Werthe sich in jedem besonderen Falle angeben lassen.

Da die Erörterung dieser Frage jedoch erst einem späteren Theile der Arithmetik angehört und dieselbe zu dem Schlusse führt, daß jeder Wurzel so viele Werthe entsprechen, als der Wurzelexponent Einheiten hat, wovon jedoch, im Falle der Exponent gerade ist, nur zwei reell und einander gleich und entgegengesetzt sind, und wenn er ungerade ist, nur eine reell ausfällt, alle übrigen Werthe aber in beiden Fällen imaginär, für unsere Zwecke somit zunächst ganz werthlos sind; so mag hier nur noch bemerkt werden, daß wir im Nachfolgenden nur die reellen Werthe und von diesen, bei geraden Wurzeln, nur die positiven berücksichtigen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

Wir setzen darum

$$\sqrt{64} = 8,\ \sqrt[3]{27} = 3,\ \sqrt[5]{-32} = -2 \text{ ꝛc.}$$

§. 113. Allgemeine Sätze über die Rechnung mit Wurzelausdrücken.

1) Potenzirt man einen Wurzelausdruck zum Wurzelexponenten, so erhält man den Radicanden, und radicirt

man eine Potenz durch den Potenzexponenten, so resultirt die Basis.

Beweis. Aus dem Begriffe des Radicirens fließen unmittelbar die Gleichungen

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \text{ und } \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Zusatz.

Jede Zahl kann als eine Potenz, oder als eine Wurzel dargestellt werden.

2) Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl kann niemals ein eigentlicher Bruch sein.

Beweis. Denn wäre $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ einen nicht reducirbaren Bruch und a eine ganze Zahl bedeutet, so müßte $a = \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$ sein, was nach dem Zusatze zu §. 90, 2 unmöglich ist.

Zusätze.

a) Eine Wurzel aus einem eigentlichen Bruche ist nie eine ganze Zahl.

b) Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl steht nach obigem Satze, wenn sie nicht wieder eine ganze Zahl ist, mit der Zahleneinheit in keinem genau angebbaren Verhältnisse und ist also mit dieser incommensurabel (§. 46, 8).

Man nennt solche Zahlen, die sich weder durch ganze Zahlen noch durch Brüche genau darstellen lassen, irrationale Zahlen, zum Unterschiede von den rationalen Zahlen, zu welchen alle bisher betrachteten Zahlen, oder alle Wurzeln gerechnet werden, deren Radicanden durch Potenziren zum Wurzelexponenten erhalten werden können. Stellt ein Wurzelausdruck eine rationale Zahl vor, so sagt man auch: „die betreffende Wurzel geht auf.“

3) Dem wahren Werthe einer Irrationalzahl kann man so nahe kommen, daß der Fehler kleiner ist, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

Beweis. Ist $\sqrt[m]{a}$ eine Irrationalzahl, deren Werth zwischen die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen z und z + 1 fällt, und bezeichnet n eine beliebige noch so große ganze Zahl, so

muß offenbar a zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende der nachstehenden Potenzen fallen:

$$z^m, \left(z+\frac{1}{n}\right)^m, \left(z+\frac{2}{n}\right)^m, \left(z+\frac{3}{n}\right)^m, \ldots \left(z+\frac{r}{n}\right)^m, \left(z+\frac{r+1}{n}\right)^m,$$
$$\ldots \left(z+\frac{n-1}{n}\right)^m, (z+1)^m.$$

Denn könnte eine dieser Potenzen $= a$ sein, so wäre $\sqrt[m]{a}$ rational.

Angenommen nun es läge a zwischen

$$\left(z+\frac{r}{n}\right)^m \text{ und } \left(z+\frac{r+1}{n}\right)^m,$$

so wäre

$$\left(z+\frac{r}{n}\right)^m < a < \left(z+\frac{r+1}{n}\right)^m,$$

oder
$$z+\frac{r}{n} < \sqrt[m]{a} < z+\frac{r+1}{n}$$

oder
$$z+\frac{r}{n} < \sqrt[m]{a} < z+\frac{r}{n}+\frac{1}{n}.$$

Da nun aber der Unterschied der beiden äußeren Glieder dieser Ungleichung $= \frac{1}{n}$ ist und n beliebig groß angenommen werden kann, so kann auch $\frac{1}{n}$ beliebig klein werden, so daß man also dem wahren Werthe von $\sqrt[m]{a}$ beliebig nahe kommen kann.

Zusatz.

Aus vorstehendem Satze geht klar hervor, daß wir auch die Irrationalzahlen denselben Rechnungsoperationen unterwerfen dürfen wie die Rationalzahlen.

○ Anmerkung. Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich jedoch auch für die einzelnen Rechnungsoperationen auf folgende Art strenge nachweisen:

1) Bei der Addition von Irrationalzahlen ist die Aufeinanderfolge der Summanden willkürlich.

Beweis. Es seien $z_1, z_2, z_3, \ldots$ mehre Irrationalzahlen und z_1 liege zwischen a_1 und a_2, z_2 zwischen b_1 und b_2 2c., so daß also

$$a_1 > z_1 > a_2$$
$$b_1 > z_2 > b_2$$
$$c_1 > z_3 > c_2 \text{ 2c.}$$

Nach §. 20, 3 hat man alsdann

$$a^1 + b_1 + c_1 + \ldots > z_1 + z_2 + z_3 + \ldots > a_2 + b_2 + c_2 + \ldots$$

oder auch

$$a_1 + c_1 + b_1 + \ldots > z_1 + z_3 + z_2 + \ldots > a_2 + c_2 + b_2 + \ldots$$

Nun ist aber nach §. 5

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = a_1 + c_1 + b_1 + \ldots.$$
$$a_2 + b_2 + c_2 + \ldots = a_2 + c_2 + b_2 + \ldots.$$

und es fallen demnach die beiden Summen

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots \text{ und } z_1 + z_3 + z_2 + \ldots$$

stets zwischen dieselben Werthe.

Die Summen

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots \text{ und } a_2 + b_2 + c_2 + \ldots$$

können aber einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden, folglich muß nach §. 65, 10 auch

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = z_1 + z_3 + z_2 + \ldots$$

sein.

Auf gleiche Weise läßt sich der aufgestellte Satz für jede andere Ordnung der Aufeinanderfolge beweisen.

2) Bei der Multiplication zweier Irrationalzahlen dürfen stets Multiplicand und Multiplicator mit einander vertauscht werden.

Beweis. Behalten wir obige Voraussetzung bei, so bekommen wir nach §. 64, 3

$$a_1\, b_1 > z_1\, z_2 > a_2\, b_2,$$

und

$$b_1\, a_1 > z_2\, z_1 > b_2\, a_2.$$

Nun ist aber (§. 25)

$$a_1\, b_1 = b_1\, a_1 \text{ und } a_2\, b_2 = b_2\, a_2;$$

ferner können

$$a_1\, b_1 \text{ und } a_2\, b_2, \text{ sowie } b_1\, a_1 \text{ und } b_2\, a_2$$

einander immer mehr und mehr genähert werden; folglich ist nach §. 65, 10 auch

$$z_1\, z_2 = z_2\, z_1.$$

3) Da sich alle übrigen Rechnungsoperationen auf die Addition und Multiplication zurückführen lassen, so ist hiermit obige Behauptung allgemein bewiesen.

4) Ein negativer Wurzelexponent eines Wurzelausdruckes wird in einen positiven verwandelt, indem man den Exponenten des Radicanden in den entgegengesetzten umändert.

Behaupt. $\sqrt[-m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}}$.

Beweis. Da

$$\left(\sqrt[m]{a^{-n}}\right)^{-m} = \left(\left(\sqrt[m]{a^{-n}}\right)^{m}\right)^{-1} \quad (\text{§. } 101.)$$
$$= (a^{-n})^{-1} \quad (\text{§. } 113,\ 1.)$$
$$= a^{n} \quad (\text{§. } 101.)$$

so ist nach Satz 1 vorstehende Behauptung richtig.

Zusatz.

Eine negative Wurzel aus einem Bruche ist gleich derselben Wurzel aus dem reciproken Werthe des Bruches.

11*

So ist z. B.

$$\sqrt[-m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{b}{a}},$$

denn

$$\sqrt[-m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} = \sqrt[m]{\frac{a^{-1}}{b^{-1}}} = \sqrt[m]{\frac{b}{a}} \quad (\S.\ 99.)$$

5) Gleiche Wurzelausdrücke werden addirt oder subtrahirt, wenn man deren Coefficienten bezüglich addirt oder subtrahirt.

Beispiele.

$$1)\ 5\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} = 12\sqrt[3]{x}.$$

$$2)\ 9\sqrt[m]{a} - 6\sqrt[m]{a} = 3\sqrt[m]{a}.$$

$$3)\ 5\sqrt[n]{y} - 12\sqrt[n]{y} + 2\sqrt[n]{y} + 18\sqrt[n]{y} - 4\sqrt[n]{y} = 9\sqrt[n]{y}$$

6) Ein Produkt wird durch eine Zahl radicirt, wenn man jeden einzelnen Faktor durch diese Zahl radicirt.

Behaupt. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$

Beweis. $\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n}$ (§. 113, 1)

$= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n}$ (§. 90, Zus.)

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (§. 113, 1)

Allgemein wird daher sein:

$$\sqrt[n]{(abcd)} \ldots = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \ldots .$$

Zusätze.

a) Läßt sich der Radicand eines Wurzelausdruckes in zwei oder mehre solcher Faktoren zerlegen, daß die betreffende Wurzel aus einzelnen derselben aufgeht, so kann man diese radiciren und das Produkt der gewonnenen Resultate als Coefficient vor das Wurzelzeichen setzen.

Beispiele.

1) $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \,.\, 2)} = \sqrt{9} \,.\, \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) $\sqrt[3]{(a^5b^4)} = \sqrt[3]{(a^3b^3 \,.\, a^2b)} = \sqrt[3]{a^3} \,.\, \sqrt[3]{b^3} \,.\, \sqrt[3]{(a^2b)} = ab\sqrt[3]{(a^2b)}$.

b) Vorstehender Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, in vielen Fällen gleichnamige Wurzelausdrücke in gleiche zu verwandeln, was insbesondere bei vorkommenden Additionen und Subtractionen oft bedeutende Abkürzungen erlaubt.

Beispiele.

1) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} = \sqrt{(4 \,.\, 6)} + \sqrt{(9 \,.\, 6)} - \sqrt{(16 \,.\, 6)}$
$= 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$
$= \sqrt{6}$.

2) $8\sqrt{45} - 3\sqrt{80} = 8\sqrt{(9 \,.\, 5)} - 3\sqrt{(16 \,.\, 5)}$
$= 8\sqrt{9} \,.\, \sqrt{5} - 3\sqrt{16} \,.\, \sqrt{5}$
$= 24\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$.

3) $9\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{192} =$
$9\sqrt[3]{(8 \,.\, 2)} + 5\sqrt[3]{(27 \,.\, 3)} - 4\sqrt[3]{(27 \,.\, 2)} - 3\sqrt[3]{(64 \,.\, 3)} =$
$9\sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{64} \,.\, \sqrt[3]{3} =$
$18\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{3} =$
$6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$.

7) Das Produkt zweier oder mehrer gleichnamigen Wurzelausdrücke wird erhalten, wenn man das Produkt der Radicanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radicirt.

Beweis. Die Richtigkeit folgt durch Umkehrung des Satzes 6.

Beispiele.

1) $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

2) $3\sqrt[3]{2} \,.\, 4\sqrt[3]{3} \,.\, 2\sqrt[3]{5} = 24\sqrt[3]{30}$.

8) Ein vor einem Wurzelausdruck stehender Coefficient wird als Faktor unter das Wurzelzeichen gebracht, wenn man ihn mit dem Wurzelexponenten potenzirt.

Behaupt. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^nb)}$.

Beweis. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b}$ (§. 113, 1)

$= \sqrt[n]{(a^n b)}$

Beispiele.

1) $3\sqrt{5} = \sqrt{(3^2 \cdot 5)} = \sqrt{(9 \cdot 5)} = \sqrt{45}$.

2) $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(4^3 \cdot 2)} = \sqrt[3]{128}$.

9) Ein Bruch wird durch eine Zahl radicirt, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner durch diese Zahl radicirt.

Behaupt. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Beweis. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}}$ (§. 113, 1)

$= \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n}$ (§. 90, 2)

$= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§. 113, 1)

Beispiele.

1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{6}{7}$.

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

Zusätze.

a) Um einen monomischen Nenner eines Bruches rational zu machen, multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches mit einer solchen Zahl, daß die betreffende Wurzel aus dem im Nenner entstehenden Produkte aufgeht.

Beispiele.

1) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{30}{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

2) $\sqrt[3]{\frac{7}{4}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{14}{8}} = \frac{\sqrt[3]{14}}{2}$.

b) Obiger Satz macht es uns ferner möglich, in manchen Fällen gleichnamige Wurzelausdrücke mit gebrochenen Radicanden in gleiche zu verwandeln.

Beispiel.

$$3\sqrt{\frac{2}{5}} + 9\sqrt{\frac{5}{2}} = 3\sqrt{\frac{10}{25}} + 9\sqrt{\frac{10}{4}}$$
$$= 3\,\frac{\sqrt{10}}{5} + 9\,\frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$= \frac{3}{5}\sqrt{10} + \frac{9}{2}\sqrt{10} = \frac{51}{10}\sqrt{10}.$$

10) Der Quotient zweier gleichnamigen Wurzelausdrücke wird erhalten, wenn man den Quotienten des Radicanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radicirt.

Beweis. Dieser ergibt sich unmittelbar aus vorhergehendem Satze durch Umkehrung.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

2) $24\sqrt[4]{42} : 6\sqrt[4]{7} = \frac{24}{6}\sqrt[4]{\frac{42}{7}} = 4\sqrt[4]{6}.$

Zusätze.

a) Ist der Divisor ein Binom, in welchem Quadratwurzeln vorkommen, so wird die Auflösung am bequemsten durch Rationalmachung des Divisors auf folgende Weise bewerkstelligt:

Man schreibe die Aufgabe in Form eines Bruches und multiplicire hierauf Zähler und Nenner mit der Summe oder Differenz der zwei Glieder des Nenners, jenachdem dieser bezüglich eine Differenz oder Summe darstellt.

Dadurch erhält man im Nenner eine Differenz zweier Quadrate (§. 30, 2, Beispiel 3) und derselbe wird somit rational.

Beispiele.

1) $\sqrt{3} : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3 - 2} = 3 + \sqrt{6}.$$

2) $(G\sqrt{G}-g\sqrt{g}):(\sqrt{G}-\sqrt{g}) = \frac{(G\sqrt{G}-g\sqrt{g})}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} =$

$\frac{(G\sqrt{G}-g\sqrt{g})(\sqrt{G}+\sqrt{g})}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})(\sqrt{G}+\sqrt{g})} = \frac{G^2-g\sqrt{Gg}+G\sqrt{Gg}-g^2}{G-g} =$

$\frac{(G-g)(G+g)+(G-g)\sqrt{Gg}}{G-g} = \frac{(G-g)(G+\sqrt{Gg}+g)}{G-g} =$

$G+\sqrt{Gg}+g.$

b) Ist der Divisor ein Trinom, in welchem Quadratwurzeln vorkommen, so wiederhole man obiges Verfahren, indem man zunächst zwei Glieder des Divisors als ein einziges auffaßt.

Beispiel.

$$3:(2+\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$$

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3(2+\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{5}+\sqrt{2})(2+\sqrt{5}-\sqrt{2})} =$$

$$\frac{6+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{(2+\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{6+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{5}} = \frac{(6+3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(7-4\sqrt{5})}{(7+4\sqrt{5})(7-4\sqrt{5})}$$

$$= \frac{-18-3\sqrt{5}-21\sqrt{2}+12\sqrt{10}}{49-80}$$

$$= \frac{-18-3\sqrt{5}-21\sqrt{2}+12\sqrt{10}}{-31}$$

$$= \frac{18}{31}+\frac{3}{31}\sqrt{5}+\frac{21}{31}\sqrt{2}-\frac{12}{31}\sqrt{10}.$$

11) Eine Potenz, deren Exponent ein ganzes Vielfaches des Wurzelexponenten ist, wird durch eine Zahl radicirt, wenn man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividirt und die Basis der Potenz zu dem Quotienten potenzirt.

Voraussetzung. Es sei n durch m theilbar und $n = mx$,

Behaupt. so ist $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^x$.

Beweis. Man hat

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{mx}} = \sqrt[m]{(a^x)^m} \quad (\text{§. } 101,\ 2)$$

$$= a^x = a^{\frac{n}{m}} \quad (\text{§. } 113,\ 1).$$

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

2) $\sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b^{15}} = a^{\frac{10}{5}}\, b^{\frac{15}{5}} = a^2b^3$.

12) Ein Wurzelausdruck wird potenzirt, wenn man den Radicanden potenzirt, den Wurzelexponenten aber unverändert läßt.

Behaupt. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

Beweis. Setzen wir

$$\sqrt[m]{a} = x, \text{ alſo } a = x^m$$

und $$(\sqrt[m]{a})^n = x^n,$$

ſo iſt

$$a^n = (x^m)^n = (x^n)^m,$$

alſo $$x^n = \sqrt[m]{a^n},$$

folglich auch

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Zuſatz.

Jede Wurzel aus einer Potenz kann als Potenz eines Wurzelausdruckes dargeſtellt werden.

Beiſpiele.

1) $\sqrt[5]{a^3} = (\sqrt[5]{a})^3$.

2) $\sqrt[p]{a^q} = (\sqrt[p]{a})^q$.

13) Anſtatt aus einem Wurzelausdrucke nochmals die Wurzel zu ziehen, kann man auch den Radicanden durch das Produkt der Wurzelexponenten radiciren.

Behaupt. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Beweis. Setzen wir

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x,$$

ſo iſt

$$\sqrt[n]{a} = x^m$$

$\sqrt[m]{a} = x^m$

und $$a = (x^m)^n = x^{mn}$$

also umgekehrt

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Allgemein hat man

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}.$$

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$

2) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[24]{a}.$

Zusätze.

a) Soll ein Wurzelausdruck nochmals radicirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Aufeinanderfolge dieses geschieht.

So ist z. B. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

denn beide Ausdrücke sind nach obigem Satze $= \sqrt[mn]{a}$.

b) Läßt sich der Wurzelexponent eines Wurzelausdruckes in Faktoren zerlegen, so kann man auch in beliebiger Aufeinanderfolge durch diese Faktoren radiciren.

Z. B. $\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}$ u. s. w.

$$\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}.$$

14) Der Werth eines Wurzelausdruckes bleibt unverändert, wenn man Wurzelexponent und Potenzexponent mit einer und derselben Zahl multiplicirt.

Behaupt. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$

Beweis. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}}\right)^p$ (§. 113, 1)

$$= \sqrt[p]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p} \quad (§.\ 113,\ 12)$$

$$= \sqrt[p]{\sqrt[m]{a^{np}}} = \sqrt[mp]{a^{np}} \quad (§.\ 113,\ 13).$$

15) Der Werth eines Wurzelausdruckes bleibt unverändert, wenn man Wurzel- und Potenzexponent durch ein gemeinschaftliches Maaß beider dividirt.

Vorauss. Es seien m und n durch p theilbar.

Behaupt. so ist $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$.

Beweis. Setzen wir $\frac{m}{p} = x$ und $\frac{n}{p} = y$,
also $m = px$ und $n = py$,
so folgt:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[px]{a^{py}} = \sqrt[p]{\sqrt[x]{a^{py}}} \quad (13.\ \text{Zus. b})$$

$$= \sqrt[p]{\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^p} \quad (12.\ \text{Zusatz})$$

$$= \sqrt[x]{a^y} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}} \quad (§.\ 113,\ 1).$$

Zusatz.

Enthalten Wurzelexponent und Potenzexponent einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man diesen außer Acht lassen, ohne daß dadurch der Werth des Wurzelausdruckes eine Aenderung erleidet.

So ist z. B. $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$.

Anmerkung.

Die Sätze 14 und 15 sind nach der in §. 112, 7 gemachten Bemerkung nur dann richtig, wenn man auf die Anzahl der Werthe

des betreffenden Wurzelausdruckes keine Rücksicht nimmt. Ueberhaupt ist bei Anwendung jener Sätze große Vorsicht nöthig.

So darf man z. B. nicht unbedingt setzen

$$\sqrt{a^2} = \sqrt[4]{a^4}$$

da diesem Ausdrucke die vier Werthe:

$$+ a, \; - a, \; + \sqrt{- a^2} \text{ und } - \sqrt{- a^2},$$

jenem dagegen nur die 2 Werthe + a und — a entsprechen.

Ebenso darf nicht gesetzt werden

$$\sqrt{- a^2} = \sqrt[4]{(-a^2)^2} = \sqrt[4]{a^4},$$

da bekanntlich dem Ausdrucke $\sqrt{- a^2}$ gar keine reelle Wurzel entspricht, dagegen $\sqrt[4]{a^4}$ deren zwei hat.

Ferner hüte man sich vor ähnlichen Schlußfolgerungen wie folgende:

Da $$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[6]{a^6}$$

und $\sqrt[6]{a^6}$ die zwei reellen Werthe + a und — a hat, so ist auch

$$\sqrt[3]{a^3} = \pm a.$$

16) **Zwei oder mehre ungleichnamige Wurzelausdrücke werden gleichnamig gemacht, wenn man zu den Wurzelexponenten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten) bestimmt und mit dem Quotienten aus diesem und jedem einzelnen Wurzelexponenten sowohl Wurzel- als Potenzexponent des betreffenden Wurzelausdruckes multiplicirt.**

Wären z. B. $\sqrt[m]{a^p}$ und $\sqrt[n]{b^q}$ gleichnamig zu machen, so hat man, da mn der gemeinschaftliche Wurzelexponent ist:

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{np}} \text{ und } \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{b^{mq}}.$$

Anmerkung. Auch hier gilt natürlich obige Bemerkung in Bezug auf die Aenderung der Anzahl der Werthe eines Wurzelausdruckes.

Zusatz.

Von vorstehendem Satze macht man insbesondere bei der Multiplication und Division ungleichnamiger Wurzelausdrücke Anwendung.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[12]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(b^3)^3} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{b^9} = \sqrt[12]{a^8 b^9}.$

2) $(\sqrt{3} - 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[4]{3}) \cdot 2\sqrt[3]{4} =$

$\sqrt[6]{3^3} \cdot 2\sqrt[6]{4^2} - 3\sqrt[3]{5} \cdot 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[12]{3^3} \cdot 2\sqrt[12]{4^4} =$

$2\sqrt[6]{27 \cdot 16} - 6\sqrt[3]{5 \cdot 4} + 4\sqrt[12]{27 \cdot 256} =$

$2\sqrt[6]{432} - 6\sqrt[3]{20} + 4\sqrt[12]{6912}.$

3) $12\sqrt[3]{a^2} : 4\sqrt[5]{a^3} = 12\sqrt[15]{(a^2)^5} : 4\sqrt[15]{(a^3)^3}$

$= 12\sqrt[15]{a^{10}} : 4\sqrt[15]{a^9} = 3\sqrt[15]{a}.$

4) $\sqrt{6} : \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{36} : \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{2}.$

§. 114. Aufgaben zur Uebung.

a) Ueber das Radiciren von Monomien.

1) $\sqrt[3]{a^9b^6c^3} = ?$

1a) $\sqrt{4^2a^4b^{-8}} = ?$

1b) $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3}{c^9}} = ?$

2) $\sqrt[5]{\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{25}}} = ?$

3) $\sqrt[m]{\frac{a^{3m}b^{-4m}}{c^{-2m}d^{8m}}} = ?$

3a) $\sqrt{4\sqrt{a^8}} = ?$

3b) $\sqrt{2a^2\sqrt{2b^4\sqrt{4c^8}}} = ?$

4) $\sqrt{16a^{4m}\sqrt[3]{a^{12n}b^{6p}}} = ?$

4a) $\sqrt[3]{3^3(a - 2b)^6} = ?$

5) $\sqrt[4]{\frac{16(a^2 + 4b^5)^{8m}}{81(x + 2y^2)^{12n}}} = ?$

5a) $\sqrt[n]{\frac{a^{3n}(b - c)^{-5n}}{d^{6n}(g + h)^{-8n}}} = ?$

6) $\sqrt[5]{\frac{8^{-10}(a - 3b)^{15m}(2x + y^2)^{-20n}}{4^{-20}(c^2 + 3d)^{-5-10n}}} = ?$

b) Ueber die Addition und Subtraction.

7) $3\sqrt[p]{a^m} - 7\sqrt[p]{a^m} + 12\sqrt[p]{a^m} = ?$

8) $5\sqrt{\tfrac{7}{3}} + 3a\sqrt{\tfrac{7}{3}} - 8\sqrt{\tfrac{7}{3}} - 2a\sqrt{\tfrac{7}{3}} = ?$

9) $(8\sqrt[m]{a} - 12\sqrt[p]{b} + 5\sqrt[q]{c}) - (4\sqrt[m]{a} - 9\sqrt[p]{b} - 3\sqrt[q]{c}) = ?$

9a) $(\sqrt[5]{a})^5 - 2\sqrt[5]{a^5} + 8\sqrt[5]{a^5} - 6(\sqrt[5]{a})^5 = ?$

9b) $5\sqrt[3]{x^3} - 3(\sqrt[4]{y})^4 + 6\sqrt{z^2} - 3(\sqrt[3]{x})^3 - 5(\sqrt{z})^2 = ?$

10) $2\sqrt{175} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{28} + 10\sqrt{63} - 3\sqrt{112} = ?$

10a) $15\sqrt{320} - 8\sqrt{45} + 7\sqrt{20} - 10\sqrt{125} + 14\sqrt{180} - 3\sqrt{625} + 20\sqrt{500} = ?$

10b) $10\sqrt{275} + 4\sqrt{396} - 9\sqrt{11} + 14\sqrt{891} - 15\sqrt{176} + 8\sqrt{704} - 18\sqrt{1331} - 5\sqrt{539} + 9\sqrt{1100} = ?$

11) $8\sqrt{45} - 12\sqrt{12} + 10\sqrt{48} - 5\sqrt{80} + 9\sqrt{125} = ?$

11a) $5\sqrt{12} - 6\sqrt{8} - 2\sqrt{27} + 8\sqrt{32} + 8\sqrt{48} = ?$

11b) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{54} + 7\sqrt{45} + 10\sqrt{180} - 8\sqrt{24} - 4\sqrt{96} + 11\sqrt{320} - 9\sqrt{150} - 3\sqrt{216} + 5\sqrt{405} = ?$

11c) $6\sqrt[3]{256} - 2\sqrt[3]{108} + 8\sqrt[3]{500} - 7\sqrt[3]{864} + 19\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{32} = ?$

12) $12\sqrt{\tfrac{5}{9}} - 8\sqrt{45} - \tfrac{7}{3}\sqrt{125} + 7\sqrt{\tfrac{9}{5}} = ?$

12a) $\sqrt{\frac{47}{18}} - 5\sqrt{376} + \frac{55}{6}\sqrt{846} - 3\sqrt{\frac{47}{32}} = ?$

13) $4\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{81} + 10\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{375} + 15\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}} = ?$

13a) $6\sqrt[3]{a^3b^3} - 2\sqrt[4]{16a^4b^4} + 3\sqrt[5]{243a^5b^5} = ?$

13b) $(3a+6b)\sqrt{(a+b)(a-b)} - (2a-7b)\sqrt{(a^2-b^2)} = ?$

14) $\sqrt{48a^5b^3} - 2\sqrt{12a^7b} + 5\sqrt{27ab} = ?$

15) $6a\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} - 4b\sqrt[3]{\frac{y^2z^3}{x}} + 3c\sqrt[3]{\frac{y^8}{x^7}} = ?$

15a) $\frac{x-y}{2xy}\sqrt{\frac{8x^3y^3}{2x^2-4xy+2y^2}} = ?$

15b) $\sqrt[3]{(a^7b^{11} - 2a^8b^{10}c + a^7b^9c^2)} = ?$

16) $\sqrt[4]{\left(\frac{a^9b^{11}}{c^{15}} + \frac{a^7b^{13}}{c^{17}}\right)} = ?$

16a) $\frac{20 + 4x}{45 - 9x}\sqrt{\frac{50 - 20x + 2x^2}{75 + 30x + 3x^2}} = ?$

17) $\frac{x + y}{x - y}\sqrt{\frac{x - y}{x + y}} - \frac{x - y}{x + y}\sqrt{\frac{x + y}{x - y}} = ?$

17a) $\sqrt[3]{\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2}} - \frac{a - b}{a + b}\sqrt[3]{\frac{a - b}{a + b}} = ?$

18) $\frac{a^3}{b^2}\sqrt[3]{\frac{a^{8m-6}\,b^{5n-7}}{c^{9-6n}}} + \frac{b^4}{a^7\,c^3}\sqrt[3]{\frac{b^{8n-4}\,c^{6n}}{a^{9-11m}}} = ?$

18a) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9^6}{16^3}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^4}{27^2}}} + \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{27^4}{64^4}}} = ?$

18b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{8^{16}}}} - \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{4^{15}}}} + \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{60}}}} -$

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{27^{10}}}} = ?$

c) Ueber die Multiplication.

19) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{ab} = ?$

20) $\sqrt[m]{a^{2m} b^3} \cdot \sqrt[m]{a^{4m} b^n} = ?$

20a) $5\sqrt[3]{(a + 2b)^2} \cdot 3\sqrt[3]{(a + 2b)^2} = ?$

21) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{8} = ?$

21a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[5]{d} = ?$

22) $2 \cdot 5\sqrt[3]{3} \cdot 3\sqrt[3]{4} = ?$

23) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{6} = ?$

24) $3\sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot 2\sqrt[3]{\tfrac{4}{5}} = ?$

25) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2 b^2}{c}} \cdot \frac{c}{a}\sqrt[4]{\frac{c^3}{a^3\,b^5}} = ?$

25a) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}} \cdot \sqrt[12]{\frac{b^{11}}{a^{11}}} = ?$

26) $7\sqrt[5]{6} \cdot 8\sqrt[3]{4} = ?$

27) $3\sqrt[3]{5} \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, 3\sqrt[4]{5} = ?$

28) $\frac{x^{m+2}\,y^3}{z^{4n-5}}\sqrt[5]{\frac{x^{-12}y^{m-6}}{z^{8-3n}}} \,.\, \frac{x^4y^{2-4m}}{z^8}\sqrt[5]{\frac{x^3\,y^{-4m}}{z^{-8n}}} = ?$

29) $3\sqrt{24} \,.\, 5\sqrt{28} = ?$

30) $2\sqrt{16} \,.\, 3\sqrt{5} \,.\, \sqrt{24} = ?$

31) $(3\sqrt{5} - 8\sqrt{7} + 5\sqrt{12})\, 4\sqrt{8} = ?$

32) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[4]{5})\, 3\sqrt[3]{2} = ?$

33) $(3\sqrt{3} - 4\sqrt[4]{4} + 5\sqrt[5]{5})\, 2\sqrt{2} = ?$

34) $(2 + 8\sqrt{3})\,(4 - 5\sqrt{3}) = ?$

34a) $(3 - 5\sqrt{3})^2 = ?$

34b) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = ?$

34c) $(\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 = ?$

34d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,(2\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) = ?$

34e) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})\,(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \sqrt{2}) = ?$

35) $(18 - 3\sqrt{5})\,(5 + 2\sqrt{5}) = ?$

36) $(3\sqrt{3} - 5\sqrt{7})\,(6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) = ?$

37) $(7\sqrt{6} - 4\sqrt{5})\,(3\sqrt{6} + 8\sqrt{5}) = ?$

38) $(6\sqrt{7} + 8\sqrt{11})\,(6\sqrt{7} - 8\sqrt{11}) = ?$

38a) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}} - b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(b\sqrt{\frac{a}{b}} + a\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = ?$

38b) $\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right) = ?$

38c) $(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b})^2 = ?$

38d) $[(x - y)\sqrt{x^2 + y^2} - (x + y)\sqrt{x^2 - y^2}]^2 = ?$

39) $(7\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\,(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = ?$

40) $(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{5})\,(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{5}) = ?$

41) $(\sqrt{24} + 2\sqrt{54} - 8\sqrt{96})\,(2\sqrt{6} - 4\sqrt{24} + 4\sqrt{150}) = ?$

42) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})\,(4\sqrt{3} - 5\sqrt{5})\,(2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}) = ?$

43) $(4\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{3})\,(3\sqrt{5} + 8\sqrt[3]{3}) = ?$

44) $(2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{5})\,(3\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{3}) = ?$

44a) $(2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt{3})\,(5\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3}) = ?$

45) $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{25})\,(\sqrt{2} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[5]{125}) = ?$

45a) $a\sqrt{\left(9b^2+\frac{12b^3}{a}+\frac{4b^4}{a^2}\right)} \cdot 3b\sqrt{\left(a^2-\frac{4ab}{3}+\frac{4b^2}{9}\right)}=?$

46) $\sqrt[3]{(a-b\sqrt{c})} \cdot \sqrt[3]{(a+b\sqrt{c})} = ?$

47) $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = ?$

48) $\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})} \cdot \sqrt[4]{(2\sqrt{15}+4)} = ?$

d) Ueber die Division.

49) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{3} = ?$

50) $15\sqrt[4]{8} : 3\sqrt[4]{4} = ?$

51) $15\sqrt[8]{27a^4b^5} : 5\sqrt[8]{9a^3b^2} = ?$

52) $\sqrt{5} : \sqrt[3]{2} = ?$

53) $54\sqrt[7]{16} : 9 = ?$

54) $3a^2b^3 : 2\sqrt[3]{a^2b} = ?$

55) $6 : 4\sqrt[4]{24} = ?$

55a) $12\sqrt[7]{(3a+5b)^8} : 4\sqrt[7]{(3a+5b)^3} =$

56) $(10\sqrt{12} : 2\sqrt{18}) : 4\sqrt{8} = ?$

57) $(4 : 2\sqrt{3}) : 2\sqrt{5} = ?$

58) $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = ?$

59) $16\sqrt[3]{a^2bc^2} : 8\sqrt[4]{a^3b^2c} = ?$

60) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}} : \frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}} = ?$

61) $8\sqrt{5} : 2\sqrt[3]{4} = ?$

62) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a^{-3}b}{c^{-2}}} : \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{a^3b^{-6}}{c^8}} = ?$

63) $\sqrt[4]{(a^3-2b)^3} : \sqrt{(a^3-2b)} = ?$

64) $(\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{6}) : \sqrt{2} = ?$

65) $(16\sqrt{15}-75+32\sqrt{50}) : 8\sqrt{5} = ?$

66) $(9\sqrt{54} + 18\sqrt{12} + 27\sqrt{15}) : 3\sqrt{3} = ?$

67) $(2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[4]{5}) : 4\sqrt[4]{3} = ?$

68) $(15\sqrt{8} + 10\sqrt{7} - 8\sqrt{2} + 5) : -4\sqrt{5} = ?$

69) $58 : (8 + \sqrt{35}) = ?$

70) $24 : (2\sqrt{7} - 6) = ?$

71) $90 : (5\sqrt{3} - \sqrt{30}) = ?$

72) $38\sqrt{2} : (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = ?$

73) $\sqrt{12} : (3 - \sqrt{5}) = ?$

74) $(3\sqrt{5} - 8\sqrt{2}) : (3\sqrt{3} - 4\sqrt{5}) = ?$

75) $(7\sqrt{12} - 4\sqrt{27}) : (8\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = ?$

76) $(7\sqrt{5} - 6\sqrt{3}) : (4\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) = ?$

77) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) : (8\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = ?$

78) $47 : (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = ?$

79) $12 : (3 - \sqrt{2} + \sqrt{6}) = ?$

79a) $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) : (5\sqrt{8} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = ?$

79b) $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) : (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) = ?$

80) $8\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})} : 4\sqrt[4]{(5 + 3\sqrt{3})} = ?$

§. 115. Sätze über die Rechnung mit imaginären Ausdrücken.

1) Da $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{-1}$ (§. 113, 6)

und $\sqrt[2n]{-1} = \sqrt[n]{\sqrt{-1}}$ (§. 113, 13. Zus. b.)

so reducirt sich die Untersuchung in Bezug auf die Rechnung mit imaginären Ausdrücken schließlich auf die der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$. Wir bezeichnen dieselbe in der Regel durch i, und die Form einer complexen Zahl ist hiernach $a + bi$, wenn a und b irgend reelle Zahlen bedeuten.

Die complexe Zahl ist zugleich die allgemeinste Form aller bisher vorgekommenen Zahlen. Denn je nachdem wir in dem Ausdrucke

$$a + bi$$

b oder a gleich Null setzen, geht derselbe in eine reelle oder imaginäre Zahl über.

Zwei complexe Zahlen von der Form

$$a + bi \text{ und } a - bi$$

heißen zugeordnete oder conjugirte complexe Zahlen.

2) Ist eine complexe Zahl Null, so muß jedes Glied derselben Null sein.

Vorauss. Es sei $a + bi = 0$

Behaupt. so ist $a = 0$ und $b = 0$.

Beweis. Aus $a + bi = 0$

folgt $a = - bi$

und hieraus $a^2 + b^2 = 0$.

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn a und b zugleich Null sind.

3) Die Summe zweier conjugirten complexen Zahlen ist reell, die Differenz dagegen imaginär.

Beweis. $(a + bi) + (a - bi) = 2a$.

$(a + bi) - (a - bi) = 2bi$.

4) Sind zwei complexe Zahlen einander gleich, so müssen die reellen, sowie die imaginären Werthe unter einander gleich sein.

Vorauss. Es sei $a + bi = c + di$,

Behaupt. so ist $a = c$ und $bi = di$ oder $b = d$.

Beweis. Aus der Gleichung

$$a + bi = c + di$$

folgt $bi - di = c - a$

oder $(b - d)\, i = c - a$

und hieraus, wenn man beiderseits quadrirt:

$$-(b - d)^2 = (c - a)^2$$

oder $0 = (c - a)^2 + (b - d)^2$.

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn gleichzeitig $b = d$ und $c = a$ ist.

5) Die positive imaginäre Einheit wird zu jedem geraden ganzen Exponenten potenzirt $+ 1$ oder $- 1$, je nachdem dieser durch 4 theilbar ist oder 2 als Rest läßt, und zu jedem ungeraden $+ i$ oder $- i$, je nachdem dieser durch 4 dividirt 1 oder 3 als Rest läßt.

Behaupt. $i^{4n} = + 1$, $i^{4n+1} = + i$

$i^{4n+2} = - 1$, $i^{4n+3} = - i$.

Beweis. $i^0 = i^{n-n} = \frac{i^n}{i^n} = + 1$

$i^1 = + i$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = - 1$

also $i^3 = i^2 \,.\, i = -1 \,.\, i = -i$

$i^4 = i^{4\cdot 2} = i^{4\cdot 3} = \ldots = i^{4n} = +1$

$i^5 = i^{4\cdot 1+1} = i^{4\cdot 2+1} = \ldots = i^{4n+1} = +i$

$i^6 = i^{4\cdot 1+2} = i^{4\cdot 2+2} = \ldots = i^{4n+2} = -1$

$i^7 = i^{4\cdot 1+3} = i^{4\cdot 2+3} = \ldots = i^{4n+3} = -i.$

Zusatz.

Für die Potenzirung der positiven imaginären Einheit auf ganze negative Exponenten erhält man hieraus:

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} = \frac{1}{1} = +1$$

$$i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-(4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i^2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-(4n+3)} = \frac{1}{i^{4n+3}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = \frac{i}{1} = +i.$$

Auf ähnliche Weise findet man die Potenzen der negativen imaginären Einheit.

6) Die Summe mehrer complexen Zahlen besteht aus der Summe der reellen und der Summe der imaginären Glieder.

So ist z. B.

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)\, i.$$

Hieraus geht unmittelbar hervor, daß die Aufeinanderfolge der Summanden ohne Einfluß auf die Summe ist.

7) Was die Multiplication und Division imaginärer Zahlen unter einander oder mit reellen betrifft, so geschehen diese Operationen genau nach den früher für die reellen Ausdrücke angegebenen Regeln.

8) Das Produkt zweier conjugirten complexen Zahlen ist reell und gleich der Summe der Quadrate der zwei reellen Theile.

Beweis. Man findet unmittelbar:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Anmerkung. Den absoluten Werth von $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ nennt man den Modul der beiden conjugirten complexen Zahlen.

Beispiele.

1) $5\sqrt{-7} + 3\sqrt{-7} - 2\sqrt{-7} = 6\sqrt{-7}$.

2) $3\sqrt{-5} \,.\, 4\sqrt{-3} = 3\,i\sqrt{5} \,.\, 4\,i\sqrt{3} = 12\,i^2\sqrt{15}$
$= -12\sqrt{15}$.

3) $6\sqrt{6} \,.\, 5\sqrt{-7} = 6\sqrt{6} \,.\, 5\,i\sqrt{7} = 30\,i\sqrt{42}$
$= 30\sqrt{-42}$.

4) $3\sqrt{-8} \,.\, 5\sqrt{-8} = 3\,i\sqrt{8} \,.\, 5\,i\sqrt{8} = 15\,i^2\,(\sqrt{8})^2$
$= -15 \,.\, 8 = -120$.

5) $2\sqrt{10} \,.\, 4\sqrt{-10} = 2\sqrt{10} \,.\, 4\,i\sqrt{10} = 8\,i\,(\sqrt{10})^2 =$
$8\,i \,.\, 10 = 80\,i = 80\sqrt{-1}$.

6) $24\sqrt{-12} : 3\sqrt{-6} = 24\,i\sqrt{12} : 3\,i\sqrt{6} = 8\sqrt{2}$.

7) $16\sqrt{8} : 4\sqrt{-2} = 16\sqrt{8} : 4\,i\sqrt{2} =$
$\frac{4}{i}\sqrt{4} = \frac{8}{i} = \frac{8\,i}{i^2} = -8\,i = -8\sqrt{-1}$.

8) $12 : \sqrt{-24} = \sqrt{144} : i\sqrt{24} = \frac{1}{i}\sqrt{6}$
$= \frac{i\sqrt{6}}{i^2} = -i\sqrt{6} = -\sqrt{-6}$.

9) $4\sqrt{-2} : (5\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5} = \frac{4\,i\sqrt{2}}{5\,i\sqrt{3} - 2\,i\sqrt{5}}$
$= \frac{4\sqrt{2}\,(5\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}{(5\sqrt{3} - 2\sqrt{5})\,(5\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}$ (§. 113,10. Zus.)
$= \frac{20\sqrt{6} + 8\sqrt{10}}{75 - 20} = \frac{20\sqrt{6} + 8\sqrt{10}}{55}$
$= \frac{4}{11}\sqrt{6} + \frac{8}{55}\sqrt{10}$.

§. 116. Aufgaben zur Uebung.

1) $5\sqrt{-11} - 12\sqrt{-11} + 13\sqrt{-11} - 4\sqrt{-11} = ?$

2) $7\sqrt{-16} + 18\sqrt{-1} - 5\sqrt{-16} + 10\sqrt{-16} = ?$

3) $2\sqrt{-5} \,.\, 3\sqrt{-7} = ?$

4) $6\sqrt{8} \,.\, -5\sqrt{-3} = ?$

5) $(3\sqrt{-3} \,.\, 2\sqrt{3}) - (5\sqrt{-2} \,.\, 3\sqrt{2}) = ?$

6) $(5\sqrt{-2} - 7\sqrt{-3} + 4\sqrt{-5})\,3\sqrt{-3} = ?$

7) $(7\sqrt{-3} + 8)\,(3 - 4\sqrt{-3}) = ?$

8) $(5\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5})\,(3\sqrt{-3} - 4\sqrt{-5}) = ?$

9) $(6\sqrt{-7} - 3\sqrt{-9})\,(6\sqrt{-7} + 3\sqrt{-9}) = ?$

10) $(4\sqrt{-2} + 2\sqrt{-3})^3 = ?$

10a) $(\sqrt{-1})^7 + (\sqrt{-1})^5 + (\sqrt{-1})^{14} - (\sqrt{-1})^{16} + (\sqrt{-1})^{21} = ?$

10b) $i^{20} - i^{30} + i^{47} - i^{53} + i^{67} - i^{95} + i^{100} - i^{111} = ?$

10c) $(\sqrt{-4} + \sqrt{-3} + \sqrt{-5} + \sqrt{-6})^2 = ?$

11) $28\sqrt{-12} : 7\sqrt{-3} = ?$

12) $16\sqrt{-6} : 2\sqrt{3} = ?$

13) $20\sqrt{15} : 4\sqrt{-3} = ?$

14) $8 : 3\sqrt{-16} = ?$

15) $12\sqrt{-6} - 3\sqrt{-3} + 15\sqrt{-9} - 21\sqrt{-15}) : 3\sqrt{-3} = ?$

16) $36 : (\sqrt{-12} - \sqrt{-4}) = ?$

17) $24\sqrt{-2} : (2\sqrt{-3} + 3\sqrt{-2}) = ?$

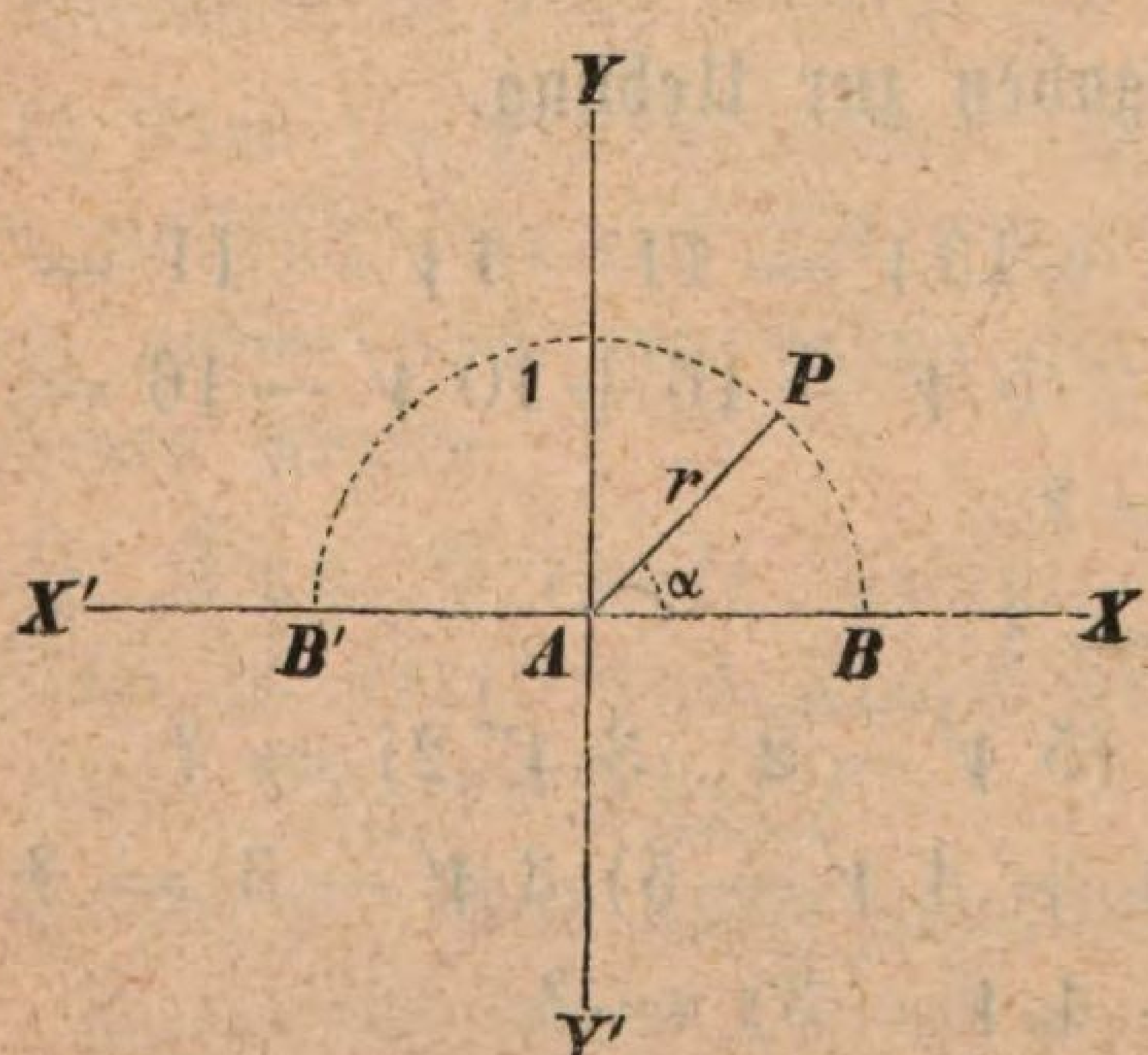
18) $(4\sqrt{-3} + 2\sqrt{-5}) : (3\sqrt{-4} - 4\sqrt{-2}) = ?$

19) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{-3}) : (3\sqrt{-2} - \sqrt{3}) = ?$

○ §. 116a. Graphische Darstellung der imaginären Zahlen und der Grundoperationen mittelst derselben.

Unsere früheren Untersuchungen beschränkten sich nur auf solche Zahlen, welche alle in einer und derselben Geraden darstellbar sind. Jedem Punkt der Geraden entspricht in Bezug auf den darin angenommenen Nullpunkt irgend eine positive oder negative (ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) Zahl. Ebenso wird nun auch jedem Punkte der Ebene, welche diese Gerade enthält, in Bezug auf denselben Nullpunkt, irgend eine Zahl entsprechen.

Fig. 3.



Bezeichnet X' X (Fig. 3) unsere frühere Gerade, in welcher die Entfernung eines jeden Punktes vom Nullpunkt A irgend eine reelle Zahl repräsentirt, und steht YY' im Nullpunkt A senkrecht auf X'X, so ist jeder in der durch die zwei Geraden X' X und YY' bestimmten Ebene *) liegende Punkt P vollkommen bestimmt, wenn man dessen Entfernung AP vom Nullpunkt, so wie den Winkel PAX kennt, welchen AP mit dem die positiven Zahlen abbildenden Strahle AX bildet.

*) Vergl. Eb. G. §. 6. 4b.

Nehmen wir an, die Strecke A B stelle die Zahl $+ r$ vor, so wird das Produkt $+ r . - 1 = - r$ graphisch dargestellt, indem wir AB um einen Winkel von $\pm 180^0$ in der Ebene YAX, also nach AB' drehen (§. 23, Anmerk. 2) und ebenso das Produkt $- r . - 1 = + r$, wenn wir diese Drehung von AB' aus in gleichem Sinne nochmals um 180^0 fortsetzen, also bis in die Lage AB. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß der Punkt B bei seiner Umdrehung um $\pm 360^0$ in jeder beliebigen Lage, z. B. in P durch seine Entfernung AP vom Nullpunkt und die Größe der Drehung der Strecke AP irgend eine Zahl graphisch repräsentiren wird. Nennen wir eine solche Zahl eine allgemeine Richtungszahl, und bezeichnen die Entfernung AP durch r, den (positiven oder negativen) Winkel PAX durch α, so können wir die durch den Punkt P abgebildete Zahl allgemein bezeichnen durch r_α.

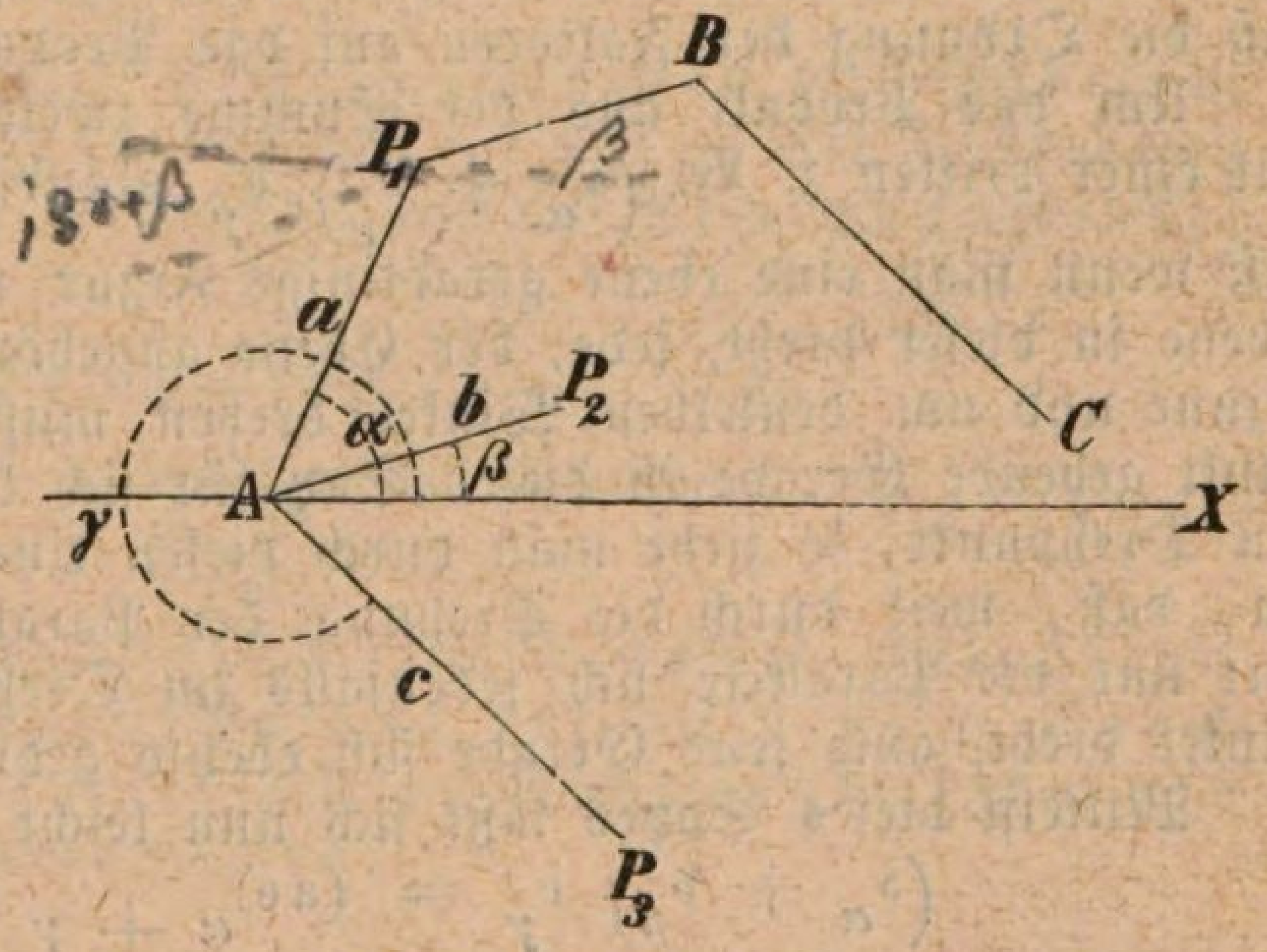
Da der Strahl durch Umdrehung um $\alpha + n . 360^0$ (wo n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet) in dieselbe Lage kommt, wie bei einer Drehung um den Winkel α, so ist $r_\alpha = r_{\alpha + n . 360^0}$.

Nachstehend wollen wir nun die verschiedenen Rechnungsoperationen mit solchen allgemeinen Richtungszahlen graphisch darstellen.

1. Addition.

Nach der im §. 10 verallgemeinerten Definition der Addition wird die Summe der den Punkten P_1, P_2, P_3 (Fig. 4) entsprechenden Richtungszahlen a_α, b_β, c_γ . . . oder $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma + \ldots$ erhalten, wenn man vom Endpunkte P_1 der Strecke a aus parallel und im Sinne mit AP_2 eine Strecke $P_1B = b$ und vom neuen Endpunkte B aus parallel und im Sinne mit AP_3 eine Strecke $BC = c$ u. s. w. construirt. Die Entfernung des letzten Endpunktes vom Nullpunkte A stellt alsdann die verlangte Summe der Größe und Richtung nach dar.

Fig. 4.



Auch hier ist die Ordnung in der Aufeinanderfolge der Summanden willkürlich. Denn für zwei Summanden a_α und b_β folgt unmittelbar, daß

$$a_\alpha + b_\beta = b_\beta + a_\alpha$$

ist, da man für beide Ausdrücke ein und dasselbe Parallelogramm erhält, in welchem die von dem Nullpunkte ausgehende Diagonale die Summe ausdrückt. Hieraus läßt sich alsdann in analoger Weise, wie früher, die Richtigkeit für drei und somit für jede beliebige Anzahl von Summanden nachweisen.

2. Subtraction.

Um die Differenz $a_\alpha - b_\beta$ constructiv darzustellen, ziehe man vom Endpunkte P_1 der die Zahl a_α versinnlichenden Strecke aus im entgegengesetzten Sinne zu der die Zahl b_β ausdrückenden Strecke eine parallele Strecke $= b$,

so drückt die Entfernung des Endpunktes dieser Strecke vom Nullpunkt die verlangte Differenz aus.

Aus den beiden vorstehenden Operationen ergibt sich nun unmittelbar die Darstellungsweise eines Aggregats von allgemeinen Richtungszahlen. Ein solches Aggregat läßt sich stets als Summe ausdrücken, indem man nämlich setzen kann:

$$a_\alpha - b_\beta + c_\gamma - d_\delta = a_\alpha + b_{\beta + 180^0} + c_\gamma + d_{\delta + 180^0}.$$

3. Multiplication.

Führen wir diese Operation genau nach der in §. 21, 1 gegebenen Definition aus, so heißt also $a_\alpha \cdot b_\beta$, eine Zahl suchen, welche aus a_α ebenso hervorgeht, wie b_β aus $+1$. Nun erhält man aber b_β aus 1, wenn man die Strecke 1 um den Winkel β in der durch sein Vorzeichen bedingten Richtung dreht und auf dem hierdurch bestimmten Strahle vom Nullpunkt aus die Einheit b mal aufträgt; also wird das Produkt $a_\alpha \cdot b_\beta$ gefunden, indem man a_α um den Winkel β in gleichem Sinne dreht und in dieser Lage a mit b multiplicirt (§. 23, Anmerk. 2).

Es ist daher $$a_\alpha \cdot b_\beta = (ab)_{\alpha + \beta}.$$

Das Produkt zweier allgemeinen Richtungszahlen wird also erhalten, wenn man das Produkt der absoluten Zahlen in die durch die algebraische Summe der entsprechenden Winkel ausgedrückte Lage bringt.

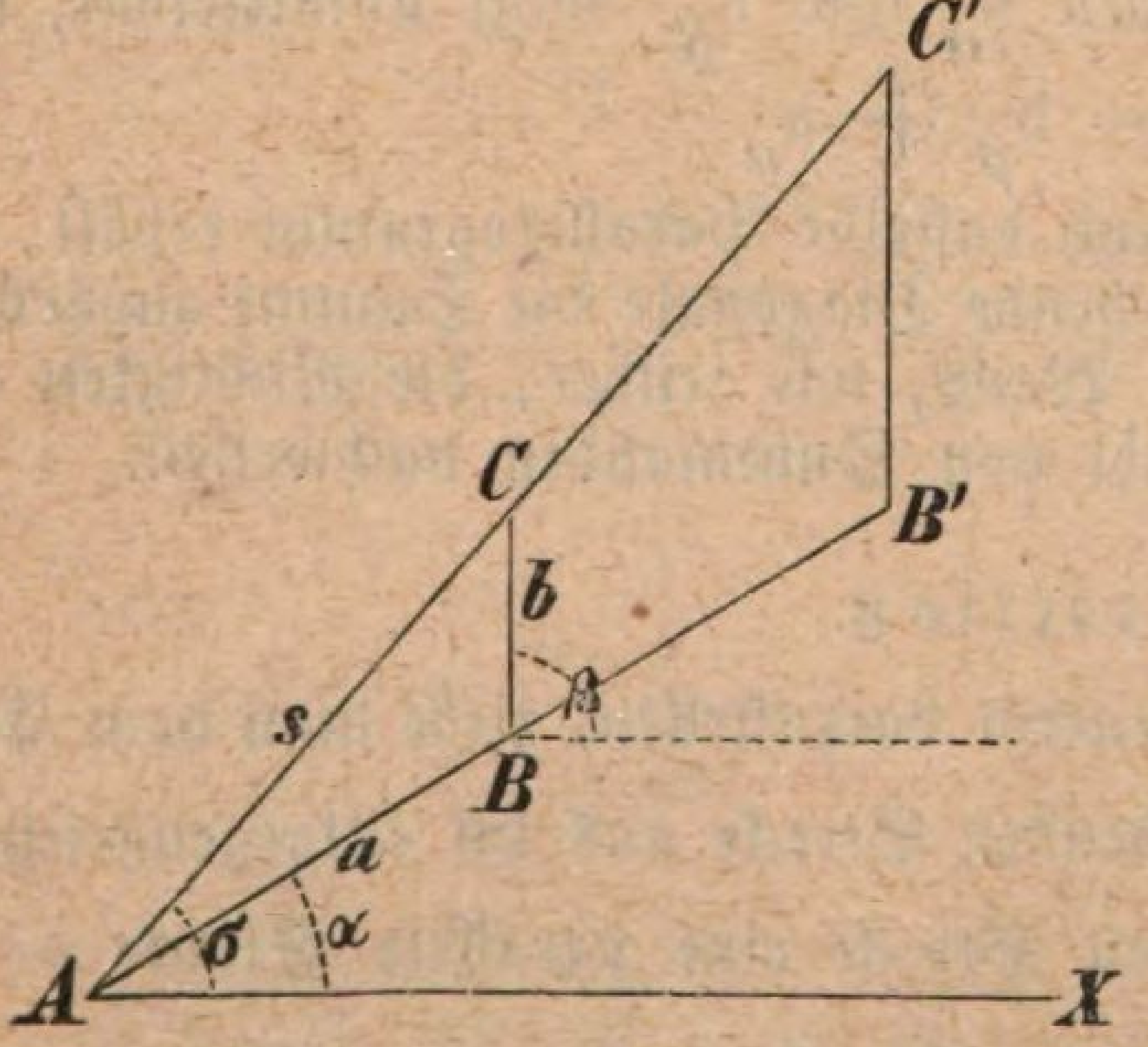
Aus der Symmetrie vorstehender Gleichung geht nun unmittelbar hervor, daß die Ordnung der Faktoren auf das Produkt ohne Einfluß ist.

Um das Produkt aus der Summe zweier allgemeinen Richtungszahlen mit einer dritten z. B. $(a_\alpha + b_\beta)\, c_\gamma$ abzubilden, bemerken wir zunächst, daß wenn man eine ebene geradlinige Figur um einen beliebigen Punkt der Ebene in dieser dreht, jede, der Ebene angehörige Gerade, sich in demselben Sinne und um denselben Winkel drehen muß. Für jede durch den Drehpunkt gehende Gerade ist dieser Satz für sich klar. Geht dieselbe nicht durch den Drehpunkt, so ziehe man durch diesen eine Parallele mit ihr, so leuchtet ein, daß, weil durch die Drehung der Parallelismus der Linien nicht aufhört und die Parallele sich jedenfalls im Drehungssinne um den Drehungswinkel dreht, auch jene Gerade sich ebenso gedreht haben muß.

Mittelst dieses Satzes läßt sich nun leicht zeigen, daß

$$(a_\alpha + b_\beta)\, c_\gamma = (ac)_{\alpha + \gamma} + (bc)_{\beta + \gamma}.$$

Fig. 5.



Setzen wir zu diesem Ende

$$a_\alpha + b_\beta = s_\sigma$$

und construiren s_σ auf die oben angegebene Weise, so erhalten wir ein Dreieck ABC (Fig. 5). Multiplicirt man nun die zwei Seiten AB und AC desselben mit c, so erhält man $AB' = (ac)_\alpha$, $AC' = (sc)_\sigma$, welche Strecken mit der Verbindungsstrecke B'C' der betreffenden Endpunkte ein zweites Dreieck AB'C' bilden, das dem ersten Dreieck ABC ähnlich ist. Da somit die Seite

$B'C'$ zum Absolutwerth das Produkt bc hat, so fließt hieraus unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$(ac)_\alpha + (bc)_\beta = (sc)_\sigma.$$

Denken wir uns nun das Dreieck um den Winkel γ gedreht, so erhalten wir nach Obigem

$$(ac)_{\alpha + \gamma} + (bc)_{\beta + \gamma} = (sc)_{\sigma + \gamma}.$$

Da aber

$$(sc)_{\sigma + \gamma} = s_\sigma \cdot c_\gamma = (a_\alpha + b_\beta)c_\gamma,$$

so folgern wir hieraus die Gleichung

$$(a_\alpha + b_\beta)\, c_\gamma = (ac)_{\alpha + \gamma} + (bc)_{\beta + \gamma}.$$

Analog wie früher läßt sich nun auch das bei der Multiplication mehrer Aggregate mit einander einzuhaltende Verfahren leicht nachweisen.

4. Division.

Soll c_γ durch b_β dividirt werden, so setze in der oben gefundenen Gleichung

$$a_\alpha\, b_\beta = (ab)_{\alpha + \beta}$$

$$ab = c,\ \alpha + \beta = \gamma$$

also

$$a = \frac{c}{b},\ \alpha = \gamma - \beta$$

Man erhält alsdann

$$\frac{c_\gamma}{b_\beta} = a_\alpha = \left(\frac{c}{b}\right)_{\gamma - \beta}.$$

Um daher zwei allgemeine Richtungszahlen zu dividiren, lege man dem Quotienten der absoluten Zahlen die Differenz ihrer Richtungswinkel als entsprechenden Richtungswinkel bei.

5. Potenziren.

Aus der Multiplication fließt unmittelbar die Gleichung

$$(a_\alpha)^n = (a^n)_{n\alpha}.$$

Eine allgemeine Richtungszahl wird somit potenzirt, wenn man der entsprechenden Potenz der absoluten Basis den mit dem Exponenten vervielfachten Richtungswinkel als zugehörigen Richtungswinkel beilegt.

6. Radiciren.

Die seither betrachteten fünf Operationen führen immer auf ein einziges Resultat, wenn man auch zu dem Richtungswinkel beliebig viele ganze Vielfache von 360^0 addirt oder subtrahirt. Anders verhält es sich beim Radiciren.

Aus 5. ergibt sich unmittelbar

$$(a_\alpha)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\alpha}{n}}$$

oder

$$\sqrt[n]{a_\alpha} = (\sqrt[n]{a})_{\frac{\alpha}{n}}$$

Eine allgemeine Richtungszahl wird somit radicirt, wenn man der entsprechenden Wurzel aus dem absoluten Radicanden den durch den Wurzelexponenten dividirten allgemeinen Richtungswinkel als Richtungswinkel beilegt.

Setzen wir in der letzten Gleichung

$$a = 1,\ \alpha = 180^0,\ n = 2,$$

so folgt

$$\sqrt{1_{180^0}} = (\sqrt{1})_{90^0},$$

oder da

$$1_{180^0} = -1$$

auch

$$\sqrt{-1} = i = 1_{90^0}.$$

Die positive imaginäre Einheit wird somit erhalten, wenn man im Nullpunkte die positive Einheit auf die unsere natürliche Zahlenreihe versinnlichende Gerade senkrecht aufträgt.

Setzt man analog

$$a = 1,\ \alpha = 540^0,\ n = 2$$

oder auch

$$a = 1,\ \alpha = 180^0,\ n = 2$$

so erhält man

$$-\sqrt{-1} = -i = 1_{270^0}$$

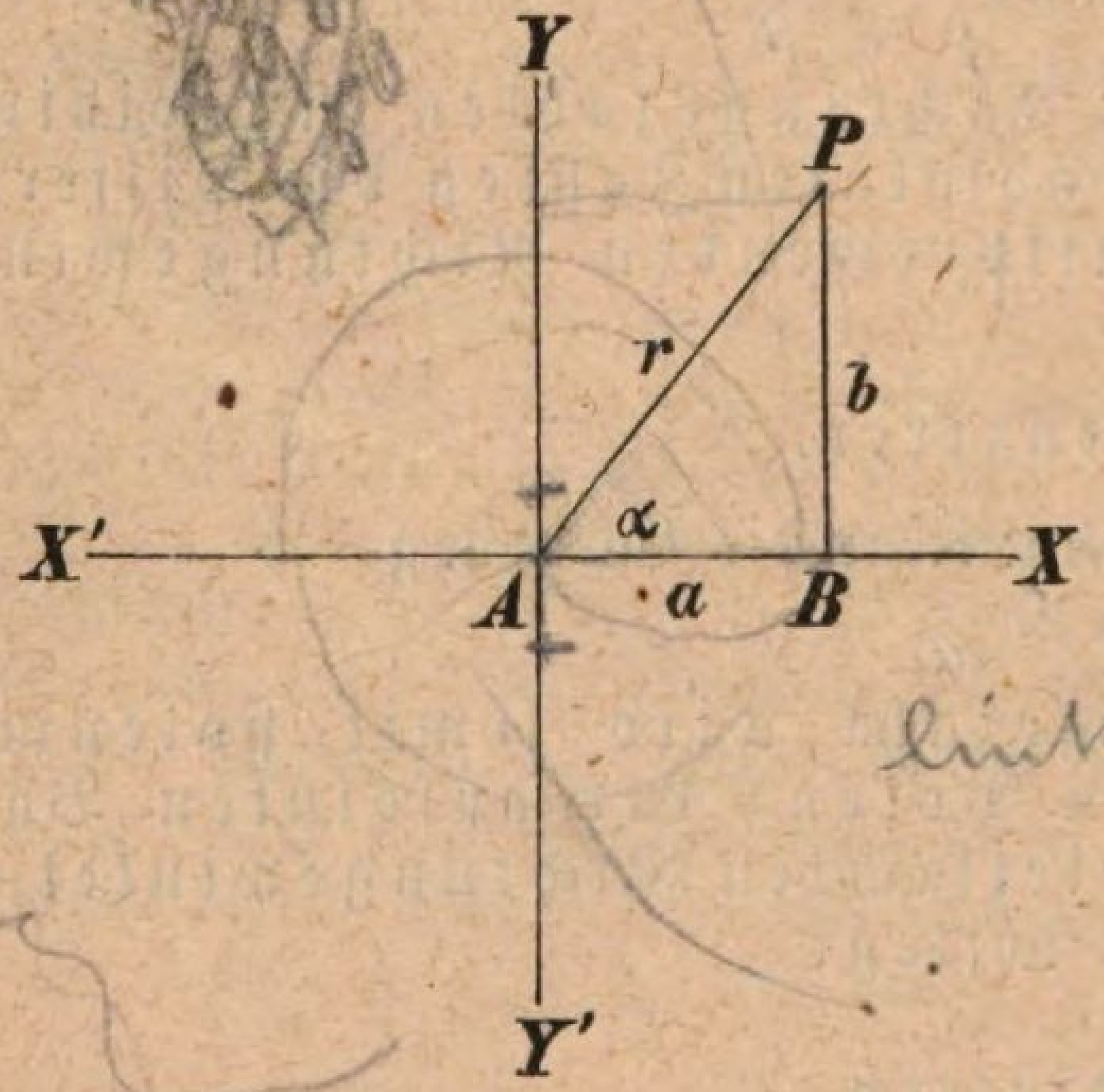
also eine der durch 1_{90} ausgedrückten Richtung entgegengesetzte.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Bedeutung von $\pm\sqrt{-a}$.

Dieser Richtung wegen hat *Gauß* die *imaginären Zahlen* auch *laterale Zahlen* genannt.

Zusätze.

Fig. 6.



1) Fällen wir von dem die Richtungszahl r_α repräsentirenden Punkte P (Fig. 6) aus PB ⊥ XX′ und nennen die Entfernungen AB und PB bezüglich die *Abscisse* und die *Ordinate*, beide zusammen die *Coordinaten* des Punktes P, so ist offenbar in Bezug auf die für $\alpha < 90^0$ als *positiv* angenommenen Coordinaten, die Abscisse des Punktes P *negativ*, wenn Punkt B rechts von A d. i. in den Strahl AX′ fällt, dagegen dessen Ordinate *negativ*, wenn P unterhalb der Geraden XX′ zu liegen kommt.

Je nachdem daher α liegt zwischen

	0^0 und 90^0,	90^0 und 180^0,	180^0 und 270^0,	270^0 und 360^0
ist die Abscisse:	positiv,	negativ,	negativ,	positiv
und die Ordinate:	positiv,	positiv,	negativ,	negativ.

Bezeichnen wir nun mit Rücksicht auf das Vorzeichen die Abscisse AB des eine allgemeine Richtungszahl repräsentirenden Punktes P durch a, die zugehörige Ordinate PB durch b, so ist nach Obigem

$$r_\alpha = a + bi.$$

Jede allgemeine Richtungszahl kann somit als algebraische Summe einer reellen und einer lateralen Zahl dargestellt werden, und heißt, wie schon früher bemerkt wurde, in dieser Darstellungsweise eine complexe Zahl.

2) Dividirt man sämmtliche Glieder der vorstehenden Gleichung durch r, so erhält man

$$\frac{r_\alpha}{r} = \frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}$$

oder, da $\qquad \frac{r_\alpha}{r} = \left(\frac{r}{r}\right)_{\alpha - 0^0} = 1_\alpha$

ist, auch $\qquad 1_\alpha = \frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}.$

Führen wir für die Quotienten $\frac{a}{r}$ und $\frac{b}{r}$ die aus den Lehren der Goniometrie bekannten Bezeichnungen $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ ein, so geht diese Gleichung über in

$$1_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Ebenso ist: $\qquad 1_\beta = \cos\beta + i\sin\beta$

$$1_{-\beta} = \cos\beta - i\sin\beta$$

$$1_{\alpha \pm \beta} = \cos(\alpha \pm \beta) + i\sin(\alpha \pm \beta)$$

und da $\qquad 1_\alpha \,.\, 1_{\pm\beta} = 1_{\alpha \pm \beta}$

so ist auch

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta) = \cos(\alpha \pm \beta) + i\sin(\alpha \pm \beta),$

oder nach §. 115, 2 $\quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

und $\qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$

3. Aus den Gleichungen

$$(1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} \text{ und } (1_{-\alpha})^n = 1_{-n\alpha}$$

folgt ferner auf ganz analoge Weise die sog. Moivre'sche Gleichung

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha.$$

Weil aber

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} = \frac{1}{(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n} =$$

$$\frac{1}{\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha} = \frac{\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha}{(\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha)(\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha)}$$

$$= \frac{\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha}{\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha}$$

oder nach E. Tr. §. 6. (3)

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha$$
$$= \cos(-n\alpha) \pm i\sin(-n\alpha),$$

so hat die Moivre'sche Formel auch für negative Exponenten Giltigkeit.

Setzt man $\qquad \alpha = \frac{\varphi}{n},$

so folgt nach Vorstehendem

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

oder $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi}{n}$

Die Moivre'sche Formel gilt somit auch für gebrochene Exponenten.

4) Bezeichnet wieder r die Entfernung eines in der Zahlenebene gelegenen, die complexe Zahl $r_\alpha = a + bi$ repräsentirenden Punktes P vom Nullpunkte A, so kann man nach Obigem allgemein setzen:

$$a + bi = r \,.\, 1_\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= r\cos\alpha + ir\sin\alpha.$$

Nach §. 115, 2 ist aber in diesem Falle

$$r \cos \alpha = a \quad \text{oder} \quad r^2 \cos^2 \alpha = a^2$$
$$r \sin \alpha = b \quad \text{"} \quad r^2 \sin^2 \alpha = b^2.$$

Durch Addition folgt hieraus:

$$r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2$$

oder nach E. T. §. 6 (3) $\quad r^2 = a^2 + b^2$

oder $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Für die Bestimmung des Winkels α folgt durch Division obiger Gleichungen

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

5) Um nun noch mittelst obiger Darstellungsweise der complexen Zahlform die schon früher (§. 112, 7) ausgesprochene Behauptung, daß jedem Wurzelausdrucke, dessen Wurzelexponent n ist, auch n von einander verschiedene Werthe entsprechen, zu beweisen, sei α der kleinste positive Richtungswinkel, welcher der Richtungszahl r_α entspricht. Es ist alsdann, wenn x eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $\alpha + x \, . \, 360^0$ der allgemeinste Richtungswinkel für die Zahl r_α und alle Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$ sind enthalten in dem Ausdrucke

$$\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + x \, . \, 360^0}{n}}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots n - 1$, so sind die erhaltenen n Werthe sämmtlich von einander verschieden. Denn sind x_1 und x_2 zwei Glieder der Reihe, so können die ihnen entsprechenden Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$ nur dann gleich sein, wenn

$$\frac{\alpha + x_1 \, . \, 360^0}{n} = \frac{\alpha + x_2 \, . \, 360^0}{n} + y \, . \, 360^0,$$

wo y eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt aber, daß $\frac{x_1 - x_2}{n} = y$ oder $x_1 - x_2$ durch n theilbar sei. Da jedoch x_1 und x_2 der Ungleichheit $0 < {x_1 \atop x_2} < n$ genügen, so muß nothwendig $x_1 = x_2$ sein.

Es gibt aber auch nicht mehr als n Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$. Denn jede ganze Zahl u kann man auf die Form $z n + x_1$ bringen, wo x_1 einer der obigen Werthe von x und z eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die den Richtungswinkeln $\alpha + u \, . \, 360^0$ und $\alpha + x_1 \, . \, 360^0$ entsprechenden Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$ stimmen daher mit einander überein, weil der Unterschied ihrer Richtungswinkel ein ganzes Vielfaches von 360^0 ist.

Sämmtliche n Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$ sind daher

$$\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha}{n}}, \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 360^0}{n}}, \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 2 \, . \, 360^0}{n}}, \ldots \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + (n-1) 360^0}{n}}$$

Setzt man $r = 1$, $\alpha = o$, so erhält man für $\sqrt[n]{1}$ die n Werthe:

$$1, \; 1_{\frac{360^0}{n}}, \; 1_{\frac{2 \, . \, 360^0}{n}}, \; 1_{\frac{3 \, . \, 360^0}{n}}, \; \ldots\ldots \; 1_{\frac{(n-1) \, 360^0}{n}}.$$

Wir schließen hieraus, daß die n Werthe von $\sqrt[n]{r_\alpha}$ gefunden werden, wenn man die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$ mit dem speciellen Werthe von $\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha}{n}}$ multiplicirt.

§. 117. Quadratwurzeln aus Aggregaten.

1) Um zunächst das Verfahren zu ermitteln, welches zur Auffindung der zwei ersten Glieder bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Aggregate zu befolgen ist, erheben wir irgend ein Binom z. B. $(a + b)$ zum Quadrat und erhalten

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)\, b.$$

Hieraus folgern wir aber umgekehrt, daß

$$\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b$$

sei und leiten daraus unmittelbar folgende Verfahrungsweise der Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Aggregate her, das ein vollständiges Quadrat eines Binoms ist:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b \\ & a^2 \\ \hline & 2ab + b^2 : 2a \\ (2a + b)\, b = & 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

Man ordnet zuerst das Aggregat nach der in §. 44 angegebenen Weise und bestimmt alsdann aus dem ersten Gliede (a^2) die Quadratwurzel (a), so gibt diese das erste Glied der zu suchenden Quadratwurzel. Hierauf subtrahirt man das Quadrat dieses Gliedes (a^2) vom vorgelegten Radicanden und dividirt das erste Glied $(2ab)$ des Restes $(2ab + b^2)$ durch das Doppelte des gefundenen Wurzelgliedes $(2a)$, um das zweite Glied (b) der Quadratwurzel zu erhalten. Alsdann subtrahirt man das Product $[(2a + b)\, b]$ aus der Summe des doppelten ersten Wurzelgliedes $(2a)$ und des zweiten Gliedes (b) in das zweite Glied (b) von dem vorhin gebliebenen Reste $(2ab + b^2)$.

Ist nun der gegebene Radicand ein vollständiges Quadrat eines Binoms, so geht diese zweite Subtraction auf.

Beispiele.

$$\begin{array}{rl} 1) & \sqrt{(4m^4 + 12m^2n^3 + 9n^6)} = \underbrace{2m^2}_{a} + \underbrace{3n^3}_{b} \\ a^2 = (2m^2)^2 = & 4m^4 \\ \hline & 12m^2n^3 + 9n^6 : 4m^2 = 2a = 2 \,.\, 2m^2 \\ (2a+b)\, b = (4m^2+3n^3)3n^3 = & 12m^2n^3 + 9n^6 \\ \hline \end{array}$$

$$2)\ \sqrt{(9x^6y^8 - 24x^5y^9 + 16x^4y^{10})} = \underbrace{3x^3y^4}_{a} - \underbrace{4x^2y^5}_{b}$$

$$a^2 = (3x^3y^4)^2 = 9x^6y^8$$

$$- 24x^5y^9 + 16x^4y^{10} : 6x^3y^4 = 2a = 2 \cdot 3x^3y^4.$$

$$(2a+b)b = (6x^3y^4 - 4x^2y^5) \cdot -4x^2y^5 = -24x^5y^9 + 16x^4y^{10}.$$

2) Zur Ermittelung des einzuhaltenden Verfahrens beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Aggregate, das ein vollständiges Quadrat eines Trinoms ist, entwickeln wir zunächst das Quadrat eines solchen und finden dafür nach §. 104:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2$$
$$= (a + b)^2 + [2\,(a + b) + c]\,c.$$

Hieraus ersehen wir aber sogleich, daß die zwei ersten Glieder der Quadratwurzel wie vorhin gefunden werden, das dritte Glied aber aus den zwei ersten Gliedern genau ebenso erhalten wird, wie das zweite Glied aus dem ersten.

Beispiel.

$$\sqrt{(x^4 + 4x^2y^3 + 6x^2z^4 + 4y^6 + 12y^3z^4 + 9z^8)} = x^2 + 2y^3 + 3z^4$$

$$(x^2)^2 = x^4$$

$$4x^2y^3 + 6x^2z^4 + 4y^6 + 12y^3z^4 + 9z^8 : 2x^2$$

$$(2x^2 + 2y^3)\,2y^3 = 4x^2y^3 \qquad 4y^6$$

$$6x^2z^4 + 12y^3z^4 + 9z^8 : 2x^2 + 4y^3 = 2(x^2+2y^3)$$

$$(2x^2 + 4y^3 + 3z^4)\,3z^4 = 6x^2z^4 + 12y^3z^4 + 9z^8.$$

Da ferner

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2$$
$$= a^2 + (2a + b)\,b + [2\,(a + b) + c]\,c + [2\,(a + b + c) + d]\,d$$

oder allgemein

$$(a + b + c + d \ldots + n)^2 = a^2 + (2a + b)\,b + [2\,(a + b) + c]\,c + \ldots + [2\,(a + b + c + \ldots + m) + n]\,n,$$

so ersehen wir, daß das vierte, fünfte rc. nte Glied eines vollständigen Quadrats eines vier, fünf, ... n gliedrigen Polynoms gefunden wird, wenn man bezüglich mit den drei, vier, ... (n — 1) vorhergehenden Gliedern auf analoge Weise, wie oben gezeigt wurde, zu operiren fortfährt.

4) Ist der Radicand kein vollständiges Quadrat, der Ausdruck also irrational, so kann man sich dem wahren Werthe dadurch immer mehr und mehr nähern, daß man nach der oben gelehrten Regel mehr und mehr Glieder entwickelt.

Beispiel.

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \ldots.$$

$$\begin{array}{l} a^2 \\ \hline b^2 : 2a \\ b^2 + \frac{b^4}{4a^2} \\ \hline -\frac{b^4}{4a^2} : 2a + \frac{b^2}{a} \\ -\frac{b^4}{4a^2} - \frac{b^6}{8a^4} + \frac{b^8}{64a^6} \\ \hline \frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}. \end{array}$$

Anmerkung. Um in vorliegendem Falle die Probe zu machen, hat man zum Quadrat des gefundenen Ausdruckes noch den Endrest zu addiren.

§. 118. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt{(x^2 + 4xy + 4y^2)} = ?$

2) $\sqrt{(4m^2 - 12mx^2 + 9x^4)} = ?$

2a) $\sqrt{(9a^6b^8 - 30a^5b^4c^5 + 25a^4c^{10})} = ?$

3) $\sqrt{\left(\frac{9}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^2y^3 + \frac{4}{9}y^6\right)} = ?$

3a) $\sqrt{\left(\frac{4a^6b^4}{9c^8} - \frac{4ac}{5b} + \frac{9c^{10}}{25a^4b^6}\right)} = ?$

4) $\sqrt{\left(\frac{9a^4}{16b^6} + \frac{3a^2b^3}{5c^3} + \frac{4b^{12}}{25c^6}\right)} = ?$

5) $\sqrt{\left(\frac{16}{9}x^4y^{-2} - 4xy^2 + \frac{9}{4}x^{-2}y^6\right)} = ?$

5a) $\sqrt{(25a^{-14}b^{-6}c^6 - 30a^{-1}b^2c^{-4} + 9a^{12}b^{10}c^{-14})} = ?$

6) $\sqrt{(4m^2 + 4mn + 12mp + n^2 + 6np + 9p^2)} = ?$

7) $\sqrt{(4x^4 - 12x^3y + 16x^2y^3 + 9x^2y^2 - 24xy^4 + 16y^6)} = ?$

7a) $\sqrt{(9a^6b^4 - 12a^4b^5 + 4a^2b^6 + 24a^5b^3c^3 - 16a^3b^4c^3 + 16a^4b^2c^6)} = ?$

8) $\sqrt{\left(4a^{4m} - 12a^{2m}b^{m+n} - \frac{16}{5}a^{3m}b^n + 9b^{2(m+n)} + \frac{24}{5}a^m b^{m+2n} + \frac{16}{25}a^{2m}b^{2n}\right)} = ?$

8a) $\sqrt{(9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6 + 24a^2c^4 - 16b^3c^4 + 16c^8 - 30a^2d + 20b^3d - 40c^4d + 25d^2)} = ?$

8b) $\sqrt{(4a - 12\sqrt{ab} + 9b)} = ?$

8c) $\sqrt{(9\sqrt[3]{a^2} - 24\sqrt[6]{a^2b^3} + 16b)} = ?$

8d) $\sqrt{(-a + 2\sqrt{ab} - b)} = ?$

8e) $\sqrt{(a^4 - 4a^2b\sqrt{-1} - 4b^2 + 6a^2c\sqrt{2} - 12bc\sqrt{-2} + 18c^2)} = ?$

8f) $\sqrt{(a^2b - 2ab\sqrt{ab} + ab^2 + 2ab\sqrt{a} - 2ab\sqrt{b} + ab)} = ?$

9) $\sqrt{(1 + a^2)} = ?$

10) $\sqrt{(x^2 - y^2)} = ?$

§. 119. Kubikwurzeln aus Aggregaten.

1) Nach §. 106 ist der Kubus des Binoms $(a + b)$ oder

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + [3a^2 + 3ab + b^2]\, b.$$

Wir schließen hieraus auf folgendes Verfahren, um durch Ausziehen der Kubikwurzel wieder das ursprüngliche Binom zu erhalten:

$$\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = a + b$$
$$a^3$$
$$\overline{3a^2b + 3ab^2 + b^3 : 3a^2}$$
$$(3a^2 + 3ab + b^2)\, b = \underline{3a^2b + 3ab^2 + b^3}.$$

Nachdem man in der bekannten Weise den Radicanden geordnet hat, zieht man aus dem ersten Gliede desselben (a^3) die Kubikwurzel, um das erste Glied (a) der Wurzel zu erhalten, und subtrahirt die dritte Potenz dieses Gliedes von dem gegebenen Radicanden. Hierauf dividire man das erste Glied $(3a^2b)$ des Restes durch das dreifache Quadrat des gefundenen Wurzelgliedes $(3a^2)$ um das zweite Glied (b) der Wurzel zu bekommen, und bilde nun eine algebraische Summe bestehend aus dem dreifachen Quadrate des ersten Wurzelgliedes $(3a^2)$, dem dreifachen Produkte des ersten und zweiten Gliedes $(3ab)$ und dem Quadrate des zweiten Gliedes (b^2), und subtrahire das Produkt dieser Summe in das zweite Wurzelglied von dem vorhin gebliebenen Reste.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{(m^6 + 6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3)} = \underbrace{m^2}_{a} + \underbrace{2n}_{b}$$

$$a^3 = (m^2)^3 = m^6$$

$$6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3 : 3m^4 \; (= 3a^2 = 3\,(m^2)^2)$$

$$6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3 = (\underbrace{3m^4}_{3a^2} + \underbrace{6m^2n}_{3ab} + \underbrace{4n^2}_{b^2})\,\underbrace{2n}_{b}$$

2) Da ferner

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3$$
$$= a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\,b + [3\,(a+b)^2 + 3\,(a+b)\,c + c^2]\,c$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 + 3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3$$
$$= a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\,b + [3\,(a+b)^2 + 3\,(a+b)\,c + c^2]\,c + [3\,(a+b+c)^2 + 3\,(a+b+c)\,d + d^2]\,d,$$

oder allgemein:

$$(a+b+c+\ldots+m+n)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 + \ldots + m^3 + 3\,(a+b+\ldots+m)^2\,n + 3\,(a+b+\ldots+m)\,n^2 + n^3$$
$$= a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\,b + [3\,(a+b)^2 + 3\,(a+b)\,c + c^2]\,c + \ldots + [3\,(a+b+\ldots+m)^2 + 3\,(a+b+\ldots+m)\,n + n^2]\,n,$$

so gelangen wir zu dem Schlusse, daß das dritte, vierte, ... nte Glied eines vollständigen Kubus eines drei-, vier-, ... ngliedrigen Polynoms gefunden wird, wenn man bezüglich die zwei, drei, ... $(n-1)$ gefundenen Wurzelglieder als ein Glied betrachtet und damit analog operirt wie bei der Auffindung des zweiten Gliedes aus dem ersten.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 + 48x^2z - 144xyz + 108y^2z + 96xz^2 - 144yz^2 + 64z^3} = \underbrace{2x}_{a} - \underbrace{3y}_{b} + \underbrace{4z}_{c}$$

$$a^3 = 8x^3$$

$$- 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 + 48x^2z - 144xyz + 108y^2z + 96xz^2 - 144yz^2 + 64z^3 : 12x^2 = 3a^2$$

$$- 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 = (\underbrace{12x^2}_{3a^2} - \underbrace{18xy}_{3ab} + \underbrace{9y^2}_{b^2}) \cdot \underbrace{-3y}_{b}$$

$$+ 48x^2z - 144xyz + 108y^2z + 96xz^2 - 144yz^2 + 64z^3 : 12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(a+b)^2$$

$$+ 48x^2z - 144xyz + 108y^2z + 96xz^2 - 144yz^2 + 64z^3 = (\underbrace{12x^2 - 36xy + 27y^2}_{3(a+b)^2} + \underbrace{24xz - 36yz}_{3(a+b)c} + \underbrace{16z^2}_{c^2}) \underbrace{4z}_{c}$$

3) Ist der Radicand kein vollständiger Kubus, geht also die Kubikwurzel nicht auf, so bestimme man auf die oben angegebene Weise so viele Glieder, als deren die Genauigkeit der vorgelegten Aufgabe verlangt.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{1 - x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} - \ldots$$

§. 120. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3} = ?$ 2) $\sqrt[3]{27m^6 - 54m^4n + 36m^2n^2 - 8n^3} = ?$

3) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^6}{27b^3} + 2a^3 + \frac{9b^3}{2} + \frac{27b^6}{8a^3}\right)} = ?$

3a) $\sqrt[3]{64a^9b^6c^6 - 96a^8b^7c^8 + 48a^7b^8c^{10} - 8a^6b^9c^{12}} = ?$

4) $\sqrt[3]{\left(\frac{64}{125}m^9n^{-6} - \frac{16}{25}m^5n^{-1}p^{-2} + \frac{4}{15}mn^4p^{-4}\right.}$
$\left. - \frac{1}{27}m^{-3}n^9p^{-6}\right) = ?$

5) $\sqrt[3]{}(x^3 - 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 - 6xyz + 3xz^2 - y^3 + 3y^2z - 3yz^2 + z^3) = ?$

6) $\sqrt[3]{}(8a^9 + 36a^7b + 12a^6b^2 + 54a^5b^2 + 36a^4b^3 + 6a^3b^4 + 27a^3b^3 + 27a^2b^4 + 9ab^5 + b^6) = ?$

6a) $\sqrt[3]{}(a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b) = ?$

6b) $\sqrt[3]{}(\sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x^2y} + 3\sqrt[6]{xy^2} - \sqrt{y}) = ?$

6c) $\sqrt[3]{}(8 - 36\sqrt{-3} - 162 + 81\sqrt{-3}) = ?$

7) $\sqrt[3]{}(1 - a) = ?$

8) $\sqrt[3]{}(a^3 + b^3) = ?$

§. 121. Quadratwurzeln aus dekadischen Zahlen.

1) Das Quadrat einer n ziffrigen Zahl z hat nicht mehr als 2n und nicht weniger als (2n — 1) Ziffern.

2n
(2n − 1)

Beweis. Da offenbar

$$10^n > z \geqq 10^{n-1}$$

so ist

$$10^{2n} > z^2 \geqq 10^{2n-2}.$$

Nun ist aber 10^{2n} die kleinste mit 2n + 1 und 10^{2n-2} die kleinste mit 2n — 2 + 1 oder 2n — 1 Ziffern geschriebene Zahl, folglich kann z^2, das dem Werthe nach zwischen 10^{2n} und 10^{2n-2} liegt, nicht mehr als 2n und nicht weniger als (2n — 1) ziffrig sein.

Zusatz.

Die Quadratwurzel aus einer n ziffrigen Zahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, hat also $\frac{n}{2}$, oder $\frac{n+1}{2}$ Ziffern, je

$\frac{n}{2}$. Quadr.

$\frac{n-1}{2} \cdot 2 = (n-1)$

nachdem bezüglich n gerade oder ungerade ist. Theilt man daher eine Quadratzahl von rechts gegen links in zweistellige Klassen (wobei jedoch die äußerste Klasse zur Linken einziffrig sein kann), so bestimmt die Anzahl der Klassen zugleich die Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel.

So ist z. B. die Quadratwurzel aus 20484676 vierziffrig; denn man hat 20|48|46|76, also vier Klassen.

2) Um nun das Verfahren ausfindig zu machen, welches bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus dekadischen Zahlen zu befolgen ist, gehen wir wieder von der Quadrirung solcher aus.

Bezeichnen wir zu diesem Ende durch

e,	z,	h,	t, . . .
die Einer,	Zehner,	Hunderter,	Tausender, ...

so wird der Reihe nach dargestellt eine

	1,	2,	3,	4ziffrige Zahl
durch	e,	$10z+e$,	$10^2h+10z+e$,	$10^3t+10^2h+10z+e$.

Die Quadrate aller ein=, zwei=, drei=, vier= . . . ziffrigen Zahlen werden somit nach §. 117 der Reihe nach repräsentirt durch die Ausdrücke:

$$e^2 = e^2$$

$$(10z+e)^2 = 10^2z^2 + (2 \,.\, 10z + e)\, e$$

$$(10^2h + 10z + e)^2 = 10^4h^2 + (2 \,.\, 10^2 \,.\, h + 10z)\, 10z + [2\,(10^2h + 10z) + e]\, e.$$

$$= 10^4h^2 + (2 \,.\, 10^3h + 10^2z)\, z + [2\,(10^2h + 10z) + e]\, e.$$

$$(10^3t + 10^2h + 10z + e)^2 = 10^6t^2 + (2 \,.\, 10^3t + 10^2h)\, 10^2h + [2\,(10^3t + 10^2h) + 10z]\, 10z + [2\,(10^3t + 10^2h + 10z) + e]\, e.$$

$$= 10^6t^2 + (2 \,.\, 10^5t + 10^4h)\, h + [2\,(10^4t + 10^3h) + 10^2z]\, z + [2\,(10^3t + 10^2h + 10z) + e]\, e \text{ u. s. w.}$$

Um hiernach z. B. 4526 zu quadriren, hat man:

$10^6t^2 = 10^6 \,.\, 4^2 =$	16000000
$(2 \,.\, 10^5t + 10^4h)\, h = (2 \,.\, 10^5 \,.\, 4 + 10^4 \,.\, 5) \,.\, 5 =$	4250000
$[2\,(10^4t + 10^3h) + 10^2z]\, z =$	180400
$[2\,(10^3t + 10^2h + 10z) + e]\, e =$	54276
	$4526^2 = 20484676$

Aus dieser Darstellung ergibt sich aber unmittelbar das Verfahren, wieder umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl zu ziehen.

Nachstehendes Beispiel wird solches ohne weitere Erläuterung zum Verständniß bringen:

$$\sqrt{20484676} = \underbrace{4000}_{10^3 t} + \underbrace{500}_{10^2 h} + \underbrace{20}_{10 z} + \underbrace{6}_{e} = 4526$$

$$\begin{array}{rrcrl}
10^6 t^2 = & 16000000 & & & \\
\hline
 & 4484676 & : & 800000 & = 2 \,.\, 10^5 t \\
(2 \,.\, 10^5 t + 10^4 h) h = & 4250000 & & 50000 & = 10^4 h \\
\hline
 & & & 850000 & = 2 \,.\, 10^5 t + 10^4 h \\
 & 234676 & : & 90000 & = 2 \; (10^4 t + 10^3 h \\
90200 \,.\, z = & 180400 & & 200 & = 10^2 z \\
\hline
 & & & 90200 & = 2 \; (10^4 t + 10^3 h) + 10^2 z \\
 & 54276 & : & 9040 & = 2 \; (10^3 t + 10^2 h + 10 z) \\
9046 \,.\, e = & 54276 & & 6 & = e \\
\hline
 & & & 9046 & = 2 \; (10^3 t + 10^2 h + 10 z) + e.
\end{array}$$

Läßt man beim Anschreiben alle Nullen, welche durch die Multiplication der Potenzen von 10 mit den betreffenden Zahlen herrühren, außer Acht und berücksichtigt blos die den Ziffern zukommende Stellung, so können wir hieraus nachstehende abgekürzte Schreibweise und Regel folgern:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{20|48|46|76|} = \underset{t}{4}\;\underset{h}{5}\;\underset{z}{2}\;\underset{e}{6} \\
16 \\
\hline
44(8 : 8 \\
42\;5 \; (= 85 \,.\, 5) \\
\hline
2\;34(6 : 90 \; (= 45 \,.\, 2) \\
1\;80\;4 \; (= 902 \,.\, 2) \\
\hline
54\;27(6 : 904 \; (= 452 \,.\, 2) \\
54\;27\;6 \; (= 9046 \,.\, 6) \\
\hline
\end{array}$$

Man theile den gegebenen Radicanden von rechts gegen links in zweistellige Klassen und bestimme die zunächst an der ersten Klasse 20 liegende Quadratzahl 16, so ist die Quadratwurzel hieraus oder 4 die erste Wurzelziffer. Subtrahire hierauf deren Quadrat 16 von der ersten Klasse, hänge dem Reste 4 die zweite Klasse 48 an, streiche die Einer 8 der so erhaltenen Zahl 448 ab und dividire die noch bleibende Zahl 44 durch die doppelte erste Wurzelziffer, also durch 2 . 4 oder 8; der Quotient 5 ist sodann die zweite Wurzelziffer. Diese hänge man dem Doppelten der ersten Wurzelziffer an und subtrahire das Produkt der hierdurch entstandenen Zahl 85 und der zweiten

Wurzelziffer 5 von 448. Dem Rest 23 hänge man die dritte Klasse 46 an, streiche die Einer 6 der so erhaltenen Zahl 2346 ab und dividire 234 durch das Doppelte der durch die zwei gefundenen Wurzelziffern gebildeten Zahl 45, um die dritte Wurzelziffer 2 zu erhalten u. s. w.

3) Bezeichnen wir durch a einen n stelligen endlichen Decimalbruch, so ist dieser ausgedrückt durch $\frac{a}{10^n}$, also das Quadrat desselben durch $\frac{a^2}{10^{2n}}$.

Die Quadratzahl eines Decimalbruches von n Decimalstellen hat somit 2n Decimalstellen. Um hiernach umgekehrt die Anzahl der Ziffern einer Quadratwurzel aus einem Decimalbruch, der ein vollständiges Quadrat ist, zu finden, theile man denselben vom Decimalzeichen aus in zweistellige Klassen, so bestimmt die Anzahl der Klassen zugleich die Anzahl der Decimalstellen der zu suchenden Wurzel.

Da ferner $$\sqrt{\frac{a^2}{10^{2n}}} = \frac{1}{10^n}\sqrt{a^2}$$

ist, so geschieht die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Decimalbruche genau nach dem oben gelehrten Verfahren, jedoch unter steter Berücksichtigung des Decimalzeichens.

Beispiele.

1) $\sqrt{0,|07|61|76|} = 0,276$
```
  4
 ----
 36(1 : 4   (= 2 . 2)
 329   (= 47 . 7)
 -----
 327(6 : 54   (= 27 . 2)
 3276   (= 546 . 6)
```

2) $\sqrt{0,|25|02|00|04|} = 0,5002$
```
 25
 ----
 2 : 10   (= 5 . 2)
 20(0 : 100   (= 50 . 2)
 2000(4 : 1000   (= 500 . 2)
 20004   (10002 . 2)
```

4) Gehen einem Decimalbruche Ganze voraus, so hat man die Eintheilung in Klassen vom Decimalzeichen aus gegen rechts und links vorzunehmen, im Uebrigen aber wie vorhin zu verfahren.

Beispiel.

$\sqrt{5|60,|64|76|84|} = 23{,}678$

4

160 : 4

129 (= 43 . 3)

3164 : 46

2796 (= 466 . 6)

36876 : 472

33089 (= 4727 . 7)

378784 : 4734

378784 (= 47348 . 8)

5) Ist der Radicand kein vollständiges Quadrat, so bestimme man nach der oben gelehrten Methode so viele Stellen, als deren die Genauigkeit der vorgelegten Aufgabe verlangt, indem man, wenn derselbe eine ganze Zahl ist, sich dieser als Decimalstellen Nullen angehängt denkt und stets zwei solcher als eine Klasse herabsetzt. Ebenso sind bei endlichen Decimalbrüchen die fehlenden Decimalstellen durch Nullen, bei periodischen aber durch die Ziffern der betreffenden Periode zu ergänzen.

Beispiele.

1) $\sqrt{41|43} = 64{,}366\ldots$

36

543 : 12

496

4700 : 128

3849

85100 : 1286

77196

790400 : 12872

772356

18044 u. s. w.

2) $\sqrt{6|83|,5\dot{7}|2} = 26{,}145\ldots$

4

283 : 4

276

757 : 52

521

23620 : 522

20896

272400 : 5228

261425

10975 u. s. w.

3) $\sqrt{7,|3\dot{4}|2} = 2{,}7096\ldots$

4

334 : 4

329

524 : 54

52424 : 540

48681

374324 : 5418

325116

49208 u. s. w.

Anmerkung. Um in vorstehendem Falle die Probe zu machen, quadrire man die gefundene Wurzel und addire zum Resultat den letzten Rest in der Weise, daß dieser unter die äußersten Ziffern zur Rechten zu stehen kommt.

6) Aus einem gemeinen Bruche kann die Quadratwurzel auf nachstehende drei Arten gezogen werden:

a) Man ziehe die Quadratwurzel sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner (§. 113, 9).

Beispiele.

1) $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

2) $\sqrt{\frac{5}{17}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} = \frac{2,236068}{4,123106} = 0,54232.$

b) Man mache den Nenner rational und verfahre alsdann nach a.

1) $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{5 \,.\, 2}{8 \,.\, 2}} = \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{3,16277}{4} = 0,79069 \,..$

2) $\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,16277}{5} = 0,63255 \,..$

c) Man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch und ziehe hieraus die Quadratwurzel.

Beispiel.

$$\sqrt{3\frac{7}{8}} = \sqrt{3,875} = 1,968 \ldots$$

Anmerkung. Im Allgemeinen ist die dritte Methode die zweckmäßigste.

§. 122. Verfahren die Quadratwurzel annähernd zu bestimmen.

1) Die Quadratwurzel aus einer Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist und eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat, wird annähernd erhalten, wenn man, sobald keine Klassen mehr aus dem Radicanden herabzunehmen sind, dem Reste keine Nullen anhängt, sondern diesen durch den letzten Divisor, — unter Berücksichtigung der noch hinzuzufügenden Zehner, welche durch Verdopplung der zuletzt gefundenen Wurzelziffer sich ergeben, — nach der Methode der abgekürzten Division dividirt.

Beispiel.

$\sqrt{32{,}90|56|34} = 5{,}736343$

```
 25
 ‾‾‾
  790 : 107
  749
  ‾‾‾‾
   4156 : 1143
   3429
   ‾‾‾‾‾
    72734 : 11466
    68796
    ‾‾‾‾‾‾
     3938 : 1147 (= 573 . 2 + 1, wegen 2 . 6 = 12)
     3441
     ‾‾‾‾
      497 : 114
      458
      ‾‾‾
       39 : 11
       34
       ‾‾
        5
```

2) Ist die Anzahl der Decimalstellen ungerade, so hängt man, nachdem die der letzten vollständigen Klasse entsprechende Wurzelziffer gefunden ist, dem Reste die letzte Ziffer des Radicanden an und dividirt hierauf mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel nach der Methode der abgekürzten Division.

Beispiel.

$\sqrt{6,|42|58|32|7} = 2{,}534922$

```
 4
 ‾
 242 : 4
 225
 ‾‾‾
  1758 : 50
  1509
  ‾‾‾‾
   24932 : 506
   20256
   ‾‾‾‾‾
    46767 : 5068 (= 2534 . 2)
    45612
    ‾‾‾‾‾
     1155
     1014
     ‾‾‾‾
      141
      101
      ‾‾‾
       40
```

3) Obiges Verfahren liefert natürlich auch für die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl auf einige weitere Decimalstellen

genaue Resultate, wenn man schon einige Stellen nach der gewöhnlichen Regel bestimmt hat.

Beispiel.

$$\sqrt{3} = 1{,}732052$$

```
 1
 ---
 200 : 2
 189
 ----
  1100 : 34
  1029
  ----
  7100 : 346
  6924
  ----
   176
   170
   ---
     6
```

Anmerkung. Das eben gelehrte Verfahren findet seinen Grund in folgender Betrachtung: Bezeichnen wir durch a die auf einige Decimalstellen bestimmte Zahl für $\sqrt{z}$ und den noch fehlenden Theil durch x, so ist

$$\sqrt{z} = a + x$$

also

$$(a + x)^2 = z$$

oder

$$a^2 + 2ax + x^2 = z.$$

Nehmen wir nun an, es sei der noch fehlende Theil x sehr klein, so ist x^2 noch um so kleiner und wir können, ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen, x^2 ganz außer Acht lassen, also setzen

$$a^2 + 2ax = z$$

oder

$$2ax = z - a^2$$

woraus folgt

$$x = \frac{z - a^2}{2a}$$

Es ist somit

$$\sqrt{z} = a + \frac{z - a^2}{2a}$$

durch welche Gleichung aber obiges Verfahren repräsentirt wird.

§. 123. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt{361} = ?$
2) $\sqrt{4225} = ?$
3) $\sqrt{6561} = ?$
4) $\sqrt{18496} = ?$
5) $\sqrt{156025} = ?$
6) $\sqrt{627264} = ?$
7) $\sqrt{9431041} = ?$
8) $\sqrt{10137856} = ?$
9) $\sqrt{454670329} = ?$
10) $\sqrt{937645641} = ?$
11) $\sqrt{655{,}36} = ?$
12) $\sqrt{11{,}6964} = ?$
13) $\sqrt{0{,}893025} = ?$
14) $\sqrt{3{,}1415} = ?$
15) $\sqrt{0{,}003} = ?$
16) $\sqrt{864{,}342} = ?$

17) $\sqrt{3,00462} = ?$
18) $\sqrt{\frac{4}{9}} = ?$
19) $\sqrt{\frac{121}{144}} = ?$
20) $\sqrt{\frac{3}{4}} = ?$
21) $\sqrt{\frac{9}{32}} = ?$
22) $\sqrt{\frac{5}{8}} = ?$
23) $\sqrt{4\frac{2}{3}} = ?$
24) $\sqrt{5\frac{7}{11}} = ?$

25) $\sqrt{3\sqrt{\frac{7}{8}}} = ?$

26) $\sqrt{\frac{27\sqrt{3,6}}{\sqrt{464}}} = ?$

27) $\sqrt{\frac{18+\sqrt{5\frac{3}{4}}}{24-\sqrt{16,8}}} = ?$

27a) $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}} = ?$

27b) $5\sqrt{3+2\sqrt{6+4\sqrt{2}}} = ?$

§. 124. Kubikwurzeln aus dekadischen Zahlen.

1) Der Kubus einer n ziffrigen Zahl z hat nicht mehr als 3n und nicht weniger als (3n — 2) Ziffern.

Beweis. Da offenbar

$$10^n > z \geqq 10^{n-1}$$

so ist

$$10^{3n} > z^3 \geqq 10^{3n-3}.$$

Nun ist aber 10^{3n} die kleinste mit 3n + 1 und 10^{3n-3} die kleinste mit 3n — 3 + 1 oder 3n — 2 Ziffern geschriebene Zahl, folglich kann z^3, das dem Werthe nach zwischen 10^{3n} und 10^{3n-3} liegt, nicht mehr als 3n und nicht weniger als (3n—2) Ziffern haben.

Zusatz.

Die Kubikwurzel aus einer n ziffrigen Zahl, die ein vollständiger Kubus ist, hat also $\frac{n}{3}$, oder $\frac{n+1}{3}$, oder $\frac{n+2}{3}$ Ziffern, je nachdem bezüglich n durch 3 theilbar ist, oder 2, oder 1 zum Rest läßt.

Theilt man daher eine Kubikzahl von rechts gegen links in dreistellige Klassen (wobei jedoch die äußerste Klasse zur Linken auch ein- und zweiziffrig sein kann), so bestimmt die Anzahl der Klassen zugleich die Anzahl der Ziffern der Kubikwurzel.

So ist z. B. die Kubikwurzel aus 335702375 dreiziffrig, denn man hat 335|702|375, also 3 Klassen.

2) Haben wieder e, z, h, t, . . . die obige Bedeutung (§. 121, 2), so erhalten wir für die Darstellung der dritten Potenzen aller ein-, zwei-, drei- 2c. ziffrigen Zahlen nach §. 119 der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
e^3 &= e^3 \\
(10z + e)^3 &= 10^3 z^3 + 3 \,.\, 10^2 z^2 e + 3 \,.\, 10 z e^2 + e^3 \\
&= 10^3 z^3 + (3 \,.\, 10^2 z^2 + 3 \,.\, 10 z e + e^2)\, e \\
(10^2 h + 10z + e)^3 &= 10^6 h^3 + 3 \,.\, 10^4 h^2 \,.\, 10z + 3 \,.\, 10^2 h \,.\, 10^2 z^2 \\
&\quad + 10^3 z^3 + 3\,(10^2 h + 10z)^2\, e + 3\,(10^2 h + 10z)\, e^2 + e^3 \\
&= 10^6 h^3 + (3 \,.\, 10^5 h^2 + 3 \,.\, 10^4 h z + 10^3 z^2)\, z \\
&\quad + [3(10^2 h + 10z)^2 + 3\,(10^2 h + 10z)\, e + e^2]\, e \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Um hiernach z. B. den Kubus von 468 zu bilden, hat man:

$$\begin{array}{lcr}
10^6 h^3 = 10^6 \,.\, 4^3 & = & 64000000 \\
(3 \,.\, 10^5 \,.\, h^2 + 3 \,.\, 10^4 h z + 10^3 z^2)\, z = & & \\
(3 \,.\, 10^5 \,.\, 4^2 + 3 \,.\, 10^4 \,.\, 4 \,.\, 6 + 10^3 \,.\, 6^2)\; 6 & = & 33336000 \\
[3\,(10^2 h + 10z)^2 + 3\,(10^2 h + 10z)\, e + e^2]\; e & = & \\
(3 \,.\, 460^2 + 3 \,.\, 460 \,.\, 8 + 8^2)\; 8 & = & 5167232 \\
\hline
468^3 & = & 102503232
\end{array}$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich aber unmittelbar das Verfahren, wieder umgekehrt die Kubikwurzel aus einer Kubikzahl zu ziehen. Nachstehendes Beispiel wird als Erläuterung dienen.

$$\sqrt[3]{102503232} = \underbrace{400}_{10^2 h} + \underbrace{60}_{10z} + \underbrace{8}_{e} = 468$$

$$\begin{array}{lrl}
(10^6 h^3 = 10^6 \,.\, 4^3 =) & 64000000 & \\
\hline
 & 38503232 : & 4800000 \;(= 3 \,.\, 10^5 h^2 = 3 \,.\, 10^5 \,.\, 4^2) \\
 & & 720000 \;(= 3 \,.\, 10^4 h z = 3 \,.\, 10^4 \,.\, 4 \,.\, 6) \\
(5556000 \,.\, z =) & 33336000 & 36000 \;(= 10^3 z^2 = 10^3 \,.\, 6^2) \\
 & & 5556000 \;(= 3 \,.\, 10^5 h^2 + 3 \,.\, 10^4 h z + 10^3 z^2) \\
\hline
 & 5167232 : & 634800 \;(= 3\,(10^2 h + 10z)^2 = 3 \,.\, 460^2) \\
 & & 11040 \;(= 3\,(10^2 h + 10z) e = 3 \,.\, 460 \,.\, 8) \\
(645904 \,.\, e =) & 5167232 & 64 \;(= e^2 = 8^2) \\
 & & 645904 \;(= 3\,(10^2 h + 10z)^2 + 3\,(10^2 h + 10z)\, z + e^2) \\
\hline
\end{array}$$

Läßt man beim Anschreiben alle Nullen, welche durch die Multiplication der Potenzen von 10 mit den betreffenden Zahlen herrühren, außer Acht und berücksichtigt nur die den Ziffern zukommende Stellung, so können wir hieraus nachstehende abgekürzte Schreibweise und Regel folgern:

$$\sqrt[3]{102|503|232|} = \underset{\breve{h}\,\breve{z}\,\breve{e}}{468}$$

$(4^3 =)$	64		
	385(03 :	48	$(= 3 \,.\, 4^2)$
		72	$(= 3 \,.\, 4 \,.\, 6)$
$(5556 \,.\, 6 =)$	333 36	36	$(= 6^2)$
		5556	
	51 672(32 :	6348	$(= 3 \,.\, 46^2)$
		1104	$(= 3 \,.\, 46 \,.\, 8)$
$(645904 \,.\, 8 =)$	51 672 32	64	$(= 8^2)$
		645904	

Man theile den gegebenen Radicanden von rechts gegen links in dreistellige Klassen und bestimme die zunächst an der ersten Klasse 102 liegende Kubikzahl 64, so ist die Kubikwurzel hieraus oder 4 die erste Wurzelziffer. Subtrahire hierauf den Kubus 64 von der ersten Klasse 102, hänge dem Reste 38 die zweite Klasse 503 an, streiche die Einer 3 und Zehner 0 von der so erhaltenen Zahl 38503 ab und dividire die noch bleibende Zahl 385 durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer 4 d. i. durch 48; der Quotient 6 ist sodann die zweite Wurzelziffer. Schreibe nun das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer 4, das dreifache Produkt aus der ersten und zweiten Wurzelziffer 6 und das Quadrat von dieser in der angegebenen Weise untereinander, nämlich so, daß die Zehner des nächsten Produktes unter den Einern des vorhergehenden stehen, und subtrahire das Produkt aus der Summe dieser drei Produkte in die zweite Wurzelziffer von der Zahl 38503. Dem Reste 5167 hänge man die dritte Klasse 232 an und verfähre nun, um die dritte Wurzelziffer 8 zu erhalten, genau wie eben, indem man jetzt die aus den zwei ersten Wurzelziffern gebildete Zahl 46 ebenso behandelt, wie vorhin die erste Ziffer 4.

2) Bezeichnen wir durch a einen n stelligen endlichen Decimalbruch, so ist dieser ausgedrückt durch $\frac{a}{10^n}$, also dessen Kubus durch $\frac{a^3}{10^{3n}}$. Die Kubikzahl eines Decimalbruches von n Decimalstellen hat somit 3n Decimalstellen. Um hiernach umgekehrt die Anzahl der Ziffern einer Kubikwurzel aus einem Decimalbruche, der ein vollständiger Kubus ist, zu finden, theile man denselben vom Decimalzeichen aus in dreistellige Klassen, so bestimmt die Anzahl der Klassen zugleich die Anzahl der Decimalstellen der entsprechenden Kubikwurzel.

Da ferner

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{10^{3n}}} = \frac{1}{10^n}\sqrt[3]{a^3}$$

so geschieht die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Decimalbruche genau nach dem oben gelehrten Verfahren, jedoch unter steter Berücksichtigung des Decimalzeichens.

Beispiel.

$\sqrt[3]{0,|611|960|049|} = 0,849$

($8^3 =$) 512

99960 : 192 ($= 3 . 8^2$)
96 ($= 3 . 8 . 4$)
16 ($= 4^2$)
20176

(20176 . 4 =) 80704

19256049 : 21168 ($= 3 . 84^2$)
2268 ($= 3 . 84 . 9$)
81 ($= 9^2$)
2139561

(2139561 . 9 =) 19256049

4) Gehen einem Decimalbruche Ganze voraus, so hat man die Eintheilung in Klassen vom Decimalzeichen aus gegen rechts und links vorzunehmen, im Uebrigen aber wie vorhin zu verfahren.

Beispiel.

$\sqrt[3]{14,|706|125|} = 2,45$

($2^3 =$) 8

6706 : 12 ($= 3 . 2^2$)
24 ($= 3 . 2 . 4$)
16 ($= 4^2$)
1456

(1456 . 4 =) 5824

882125 : 1728 ($= 3 . 24^2$)
360 ($= 3 . 24 . 5$)
25 ($= 5^2$)
176425

(176425 . 5 =) 882125

5) Ist der Radicand kein vollständiger Kubus, so bestimme man nach der oben gelehrten Methode so viele Stellen als nothwendig sind, indem man sich, wenn derselbe eine ganze Zahl ist, dieser als Decimalstellen Nullen angehängt denkt und stets drei solcher als eine Klasse herabsetzt. Ebenso sind bei endlichen Decimalbrüchen die fehlenden Stellen durch Nullen, bei periodischen aber durch die Ziffern der betreffenden Periode zu ergänzen.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{7|985|} = 19,98 \ldots$

1

6985 : 3 / 27 / 81 / 651

5859

1126000 : 1083 / 513 / 81 / 113511

1021599

104401000 : 118803 / 4776 / 64 / 11928124

95424992

8976008

2) $\sqrt[3]{67,7} = 4,075 \ldots$

64

3700 : 48

3700000 : 4800 / 840 / 49 / 488449

3419143

280857000 : 496947 / 6105 / 25 / 49755775

248778875

32078125

3) $\sqrt[3]{519,|\dot{7}64|\dot{5}} = 8,0402 \ldots$

512

7764 : 192

7764576 : 19200 / 960 / 16 / 1929616

7718464

46112457 : 1939248

46112457645 : 193924800 / 48240 / 4 / 19392962404

38785924808

7326532837

Anmerkung. Um in vorstehendem Falle die Probe zu machen, kubire man die gefundene Wurzel und addire zum Resultate den letzten Rest in der Weise, daß dieser unter die äußersten Ziffern zur Rechten zu stehen kommt.

6) Aus einem gemeinen Bruche kann die Kubikwurzel auf nachstehende drei Arten gezogen werden.

a) Man ziehe die Kubikwurzel sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner (§. 113, 9).

Beispiel.

$$\sqrt[3]{\frac{17}{39}} = \frac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{39}} = \frac{2,571282}{3,391211} = 0,75843.$$

b) Man mache den Nenner rational, was in der Regel leicht dadurch geschieht, daß man Zähler und Nenner mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt, und verfahre alsdann nach a.

Beispiele.

$$1)\ \sqrt[3]{\frac{7}{5}} = \sqrt[3]{\frac{7\ .\ 25}{5\ .\ 25}} = \sqrt[3]{\frac{175}{125}} = \frac{\sqrt[3]{175}}{\sqrt[3]{125}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{175}}{5} = \frac{5{,}593445}{5} = 1{,}118689.$$

$$2)\ \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3.2}{4.2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1{,}81712}{2} = 0{,}90856.$$

c) Man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch und ziehe hieraus die Kubikwurzel.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}9085603.$$

Anmerkung. Im Allgemeinen ist die dritte Methode die zweckmäßigste.

§. 125. Verfahren die Kubikwurzel annähernd zu finden.

Hat man die Kubikwurzel aus einer Zahl auf einige Decimalstellen gefunden, so kann man leicht noch einige Stellen weiter durch einfache Division bestimmen, wie aus Nachstehendem hervorgeht.

Bezeichnet a die schon bestimmte Zahl von $\sqrt[3]{z}$ und x den fehlenden Theil, so ist

$$\sqrt[3]{z} = a + x$$

also $$(a + x)^3 = z,$$

oder $$a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = z.$$

Nehmen wir nun an, der fehlende Theil x sei sehr klein, so werden x^2 und x^3 noch um so kleiner und wir können alsdann, ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen, die Glieder $3ax^2$ und x^3 ganz außer Acht lassen, so daß obige Gleichung übergeht in:

$$a^3 + 3a^2x = z$$

oder $$3a^2x = z - a^3,$$

woraus folgt $$x = \frac{z - a^3}{3a^2}.$$

Hiernach erhält man also:

$$\sqrt[3]{z} = a + \frac{z - a^3}{3a^2} \ldots$$

Hat man z. B. gefunden $\sqrt[3]{37} = 3{,}33$
und setzt nun $a = 3{,}33,\ z = 37,$
so folgt

$$\sqrt[3]{37} = 3{,}33 + \frac{37 - 3{,}33^3}{3 \cdot 3{,}33^2}$$
$$= 3{,}33 + \frac{37 - 36{,}926027}{33{,}2667}$$
$$= 3{,}33 + \frac{0{,}073973}{33{,}2667}$$
$$= 3{,}33 + 0{,}002223 = 3{,}332223.$$

Dieses Resultat ist auf 5 Decimalstellen genau.

Anmerkung. Bei der Division bedient man sich mit Vortheil des abgekürzten Verfahrens.

§. 126. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt[3]{3375} = ?$
2) $\sqrt[3]{24389} = ?$
3) $\sqrt[3]{110592} = ?$
4) $\sqrt[3]{15438249} = ?$
5) $\sqrt[3]{335702375} = ?$
6) $\sqrt[3]{248{,}858189} = ?$
7) $\sqrt[3]{0{,}000672221376} = ?$
8) $\sqrt[3]{4{,}72} = ?$
9) $\sqrt[3]{507{,}246} = ?$
10) $\sqrt[3]{716} = ?$
11) $\sqrt[3]{4257{,}38546} = ?$
12) $\sqrt[3]{6543{,}728625} = ?$
13) $\sqrt[3]{0{,}0000314} = ?$
14) $\sqrt[3]{\frac{11}{32}} = ?$
15) $\sqrt[3]{364\frac{5}{6}} = ?$
16) $\sqrt[3]{17\frac{1}{64}} = ?$
17) $\sqrt[3]{38\frac{11}{16}} = ?$
18) $\sqrt[3]{\frac{1}{1048}} = ?$
19) $\sqrt[3]{8\sqrt{\frac{729}{15625}}} = ?$
20) $\sqrt[3]{48\sqrt{269}} = ?$

21) $\sqrt[3]{\dfrac{4{,}6\sqrt{27{,}5}}{\frac{5}{7}\sqrt[3]{38{,}46}}}$

§. 127. Das Radiciren dekadischer Zahlen durch Exponenten, die größer als 3 sind.

1) Mittelst des Zusatzes b des Satzes 13 in §. 113 sind wir im Stande jede Wurzel, deren Wurzelexponent nur die Fak-

toren 2 und 3 enthält, auf die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln zurückzuführen.

Beispiele.

$$1)\ \sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$$

$$2)\ \sqrt[6]{64} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$3)\ \sqrt[8]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3.$$

2) Soll eine dekadische Zahl durch einen Exponenten radicirt werden, der keinen der Faktoren 2 und 3, oder außer diesen noch andere Primfaktoren enthält, so hat man das oben für die Quadrat- und Kubikwurzelausziehung gelehrte Verfahren auch auf $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$ 2c. auszudehnen, zu diesem Ende die fünfte, siebente 2c. Potenz eines Polynoms zu entwickeln und hieraus die entsprechende Operation herzuleiten. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitte ein Mittel kennen lernen, solche Wurzeln auf viel kürzerem Wege zu bestimmen.

§. 128. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt[4]{2085136} = ?$

2) $\sqrt[6]{0{,}004096} = ?$

3) $\sqrt[8]{0{,}2756} = ?$

4) $\sqrt[9]{467{,}258} = ?$

5) $\sqrt[12]{748968{,}5} = ?$

6) $\sqrt[4]{69\tfrac{173}{256}} = ?$

7) $\sqrt[6]{246\tfrac{13}{32}} = ?$

8) $\sqrt[9]{\dfrac{37\frac{3}{8}}{65\frac{4}{5}}} = ?$

○ §. 129. Zerlegung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $a \pm \sqrt{b}$.

Setzen wir

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \ \ldots\ldots (1)$$

und erheben beide Seiten zum Quadrat, so folgt:

$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm 2\sqrt{xy}.$$

Bestimmen wir nun x und y so, daß sowohl die rationalen als die irrationalen Theile beider Seiten dieser Gleichung einander gleich sind, und setzen also

$$x + y = a \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

und $$2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$$

so folgt, wenn man beiderseits quadrirt:

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$
$$4xy = b.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen ergibt sich:

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b,$$

oder $$(x - y)^2 = a^2 - b$$

also $$x - y = \sqrt{a^2 - b}.$$

Wird nun diese Gleichung zu obiger Gleichung (2) ein Mal addirt, das andere Mal subtrahirt, so erhält man bezüglich

$$2x = a + \sqrt{a^2 - b}$$
$$2y = a - \sqrt{a^2 - b}$$

und hieraus $$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Führt man diese Werthe für x und y in obige Gleichung (1) ein, so geht dieselbe über in

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}.$$

Mittelst dieser Gleichung sind wir im Stande, in manchen Fällen einen Ausdruck von der Form $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ in einfacherer Weise darzustellen. Es wird dieses nämlich immer dann der Fall sein, wenn $\sqrt{a^2 - b}$ rational ist.

Beispiele.

1) Um hiernach $\sqrt{7 \pm \sqrt{13}}$ auszudrücken, setze man $a = 7$, $b = 13$, so folgt:

$$\sqrt{(7 \pm \sqrt{13})} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{(49 - 13)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7 - \sqrt{(49 - 13)}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{7 + \sqrt{36}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7 - \sqrt{36}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{7 + 6}{2}} \pm \sqrt{\frac{7 - 6}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{13}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{26} \pm \sqrt{2}).$$

2) Wäre ferner der Ausdruck $\sqrt{(9 \pm 3\sqrt{5})}$ zur Zerlegung vorgelegt, so schreibe man dafür $\sqrt{9 \pm \sqrt{3^2 . 5}} = \sqrt{9 \pm \sqrt{45}}$ und setze nun in obiger Formel $a = 9$, $b = 45$. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{(9 \pm 3\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{(81 - 45)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{9 - \sqrt{(81 - 45)}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + \sqrt{36}}{2}} \pm \sqrt{\frac{9 - \sqrt{36}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 6}{2}} \pm \sqrt{\frac{9 - 6}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{30} \pm \sqrt{6}).$$

§. 130. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt{(6 + \sqrt{11})} = ?$

2) $\sqrt{(112 + 40\sqrt{3})} = ?$

3) $\sqrt{(10 - 5\sqrt{3})} = ?$

4) $\sqrt{(172 - 120\sqrt{2})} = ?$

5) $\sqrt{(12\sqrt{3} + 4\sqrt{24})} = ?$

6) $\sqrt{(3\sqrt{486} + 36\sqrt{3})} = ?$

7) $\sqrt{(a + ab - 2a\sqrt{b})} = ?$

8) $\sqrt{(x^2 + y + 2x\sqrt{y})} = ?$

○ §. 131. Zerlegung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$.

Setzen wir in dem in §. 129 gewonnenen Resultate

$b\sqrt{-1}$ statt b, also $-b^2$ statt b^2,

so geht dasselbe über in

$$\sqrt{(a \pm b\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}}$$

Nun ist aber

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} > a \text{ oder } > \sqrt{a^2}$$

folglich das zweite Glied der linken Seite vorstehender Gleichung stets imaginär und wir können darum setzen

$$\sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}} = i\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2}}$$

also

$$\sqrt{(a \pm bi)} = \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}}$$

Beispiel.

Um hiernach $\sqrt{(6 \pm 8\,i)}$ zu zerlegen, setze man $a = 6$, $b = 8$, so folgt:

$$\sqrt{(6 \pm 8\,i)} = \sqrt{\frac{\sqrt{(36+64)}+6}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{(36+64)}-6}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{100}+6}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{100}-6}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{10+6}{2}} \pm i\sqrt{\frac{10-6}{2}}$$

$$= \sqrt{8} \pm i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}.$$

§. 132. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt{(21 + \sqrt{-28})} = ?$ 3) $\sqrt{(15 + 2\sqrt{-5})} = ?$

2) $\sqrt{(9 - 2\sqrt{-3})} = ?$ 4) $\sqrt{(12 + \sqrt{-9})} = ?$

5) $\sqrt{(24 + \sqrt{-7})} = ?$

§. 133. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

1) Bei allen bisherigen Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß die Exponenten der Potenzen oder Wurzeln ganze Zahlen seien. Diese Beschränkung müssen wir nun heben und unsere Untersuchungen auch über solche Potenzen und Wurzeln erstrecken, deren Exponenten gebrochen sind.

2) Um zunächst die Bedeutung solcher Ausdrücke festzustellen, erinnern wir uns, daß, für den Fall der Theilbarkeit von n durch m, gesetzt werden darf

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Da es uns aber freisteht, diese Schreibweise auch über alle anderen Fälle auszudehnen und ganz allgemein dem Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$ den Werth von $\sqrt[m]{a^n}$ beizulegen, n und m mögen durch einander theilbar sein oder nicht, ganz oder gebrochen u. s. w. sein, so entnehmen wir hieraus folgende Definition:

Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten drückt aus, daß man zuerst die Basis mit dem Zähler des Bruchexponenten potenziren und diese Potenz durch den Nenner radiciren soll.

Beispiele.

1) $a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$,

2) $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64}$.

3) Da nach Vorstehendem

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{1}{\frac{m}{n}}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a},$$

so fließt hieraus unmittelbar die Erklärung:

Ein Wurzelausdruck mit gebrochenem Wurzelexponenten drückt aus, daß der Radicand zum reciproken Werth dieses Exponenten potenzirt werden soll.

Beispiele.

1) $\sqrt[\frac{5}{7}]{x} = x^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{x^7}$.

2) $\sqrt[\frac{3}{4}]{a^2b^3} = a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{a^8b^{12}} = a^2b^4\sqrt[3]{a^2}$.

Anmerkung. Eine Potenz oder eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten ist nach Früherem immer vieldeutig. In Bezug auf die Abkürzung der gebrochenen Exponenten gilt jedoch das in §. 112, 7 Gesagte.

4) Alle früher für die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln entwickelten Regeln gelten auch, wenn die betreffenden Exponenten gebrochen sind, wie aus Nachstehendem hervorgeht:

1) $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \,.\, \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ (§. 90, 1).

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ (§. 90, 2).

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ (§. 101, 2).

4) $a^{\frac{m}{n}} \,.\, a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \,.\, \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ (§. 94).

5) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} =$
$a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$ (§. 96.)

6) $\sqrt[\frac{m}{n}]{ab} = (ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a} \,.\, \sqrt[\frac{m}{n}]{b}$ (§. 113, 6).

7) $\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}}{\sqrt[\frac{m}{n}]{b}}$ (§. 113, 9).

8) $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{pn}{qm}} = a^{\frac{p}{q} : \frac{m}{n}}$ (§. 113, 11).

9) $\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{mq}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}}$ (§.113, 12).

10) $\sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{a}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{q}{p}}} = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{nq}{mp}} = \sqrt[\frac{mp}{nq}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}]{a}$
(§. 113, 13)

11) $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{pnx}{qmx}} = \left(a^{\frac{px}{q}}\right)^{\frac{n}{mx}} = \sqrt[\frac{mx}{n}]{a^{\frac{px}{q}}}$
(§. 113, 14).

12) $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \left(a^{\frac{p}{qx}}\right)^{\frac{nx}{m}} = \sqrt[\frac{m}{nx}]{a^{\frac{p}{qx}}}$ (§. 113, 15).

13) $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{np}{qm}} = \sqrt[\frac{mq}{np}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n} : \frac{p}{q}]{a}$.

§. 134. Aufgaben zur Uebung.

1) $a^{\frac{3}{2}} \,.\, a^{\frac{2}{3}} = ?$

2) $3a^{-\frac{2}{3}} \,.\, 4a^{-\frac{5}{6}} \,.\, 2a^{\frac{3}{4}} = ?$

3) $5\sqrt[3]{x^2y} \,.\, 2x^{\frac{3}{4}}\, y^{\frac{3}{2}} = ?$

4) $2\,(m + 2n)^{\frac{4}{5}} \,.\, 3\sqrt[6]{(m + 2n)^5} = ?$

5) $(a^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{5}{3}})\,(a^{\frac{3}{5}} - b^{\frac{5}{3}}) = ?$

6) $\left(\frac{a^3\ x^{\frac{2}{5}}\ y^{\frac{3}{5}}}{b^4\ z^{\frac{4}{5}}} - \frac{b^5\ x^{\frac{6}{7}}\ y^{-\frac{6}{7}}}{a^8\ z^{-\frac{3}{7}}} + \frac{a^2\ b^3\ z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{7}{4}}\ y^{-\frac{3}{4}}}\right) \cdot$

$\left(\frac{a^2\ x^{-\frac{4}{3}}\ y^{\frac{2}{3}}}{b^3\ z^{\frac{5}{3}}} - \frac{b^2\ x^{\frac{1}{2}}\ z^{\frac{3}{2}}}{a^4\ y^{-\frac{1}{2}}}\right) = ?$

7) $a^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{3}} = ?$

8) $3a^{-\frac{3}{4}} : 5a^{-\frac{5}{6}} = ?$

9) $4ab^{\frac{2}{3}}\ c^{\frac{1}{4}} : 2b^{\frac{4}{5}}\ c^{\frac{7}{8}} = ?$

10) $\frac{a^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{5}{6}}} = ?$

11) $\left(a^{\frac{7}{8}}\ b^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{5}{7}} + 4a^{\frac{3}{8}}\ b^{\frac{2}{5}}\right) : a^{\frac{2}{3}}\ b^{\frac{4}{5}} = ?$

12) $\left(4x^{\frac{4}{3}}\ y^{\frac{5}{3}} - 9x^{\frac{8}{5}}\ y^{\frac{7}{4}}\right) : \left(2x^{\frac{2}{3}}\ y^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{4}{5}}\ y^{\frac{7}{8}}\right) = ?$

13) $\left(a^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{3}} = ?$

14) $\left(\left(a^{\frac{2}{3}}\ b^{-\frac{5}{6}}\ c^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{7}{8}}\right)^{\frac{1}{4}} = ?$

15) $\left(\left(\frac{(a-b)^{\frac{2}{3}}\ (c-d)^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{4}{5}}\ g^{\frac{3}{8}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$

○ §. 135. Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch Wurzelausziehung für ganze positive Wurzelexponenten.

1) Jede Wurzel aus einer Zahl ist kleiner oder größer als 1, je nachdem der Radicand sebst kleiner oder größer als 1 ist.

Beweis. Da jede Potenz eines echten Bruches wiederum ein echter Bruch, jede Potenz von 1 wieder 1 und jede Potenz einer Zahl, welche größer als 1, ebenfalls größer als 1 ist, so kann umgekehrt eine Wurzel aus einer Zahl, die kleiner als 1 ist, weder 1 noch größer als 1 und aus einer Zahl, welche größer als 1 ist, weder kleiner noch gleich 1 sein und ist somit im ersten Falle kleiner, im zweiten größer als 1.

2) Gleiche Wurzeln aus ungleichen Grundzahlen geben übereinstimmend Ungleiches.

Vorauss. Es sei $a > b$,

Behaupt. so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Setzen wir $a = b + x$,

so folgt: $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{(b + x)}$

$$= \sqrt[m]{b\left(1 + \frac{x}{b}\right)} = \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{\left(1 + \frac{x}{b}\right)}$$

Nun ist aber $1 + \frac{x}{b} > 1$, also nach 1)

$$\sqrt[m]{\left(1 + \frac{x}{b}\right)} > 1,$$

folglich $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

3) Ungleiche Wurzeln aus gleichen Radicanden geben übereinstimmend oder nicht übereinstimmend Ungleiches, je nachdem die Radicanden kleiner oder größer als 1 sind.

Vorauss. Es sei $m > n$,

Behaupt. so ist $\sqrt[m]{a} \gtrless \sqrt[n]{a}$

je nachdem $a \lessgtr 1$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei im ersten Falle

$$\sqrt[m]{a} \leqq \sqrt[n]{a},$$

so hätten wir $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} \leqq \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$,

oder $a^n \leqq a^m$,

also $n \geqq m$,

was im Widerspruche mit der Voraussetzung stünde.

Aehnlich ist der Beweis für den zweiten Fall zu führen.

4) Werden aus ungleichen echten Brüchen übereinstimmend ungleiche Wurzeln gezogen, so erhält man mit der ersten Ungleichheit übereinstimmend Ungleiches.

Vorausſ. Es ſei $b > a > 1$,

alſo $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ und $m > n$,

Behaupt. ſo iſt $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} > \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$.

Beweis. Nach 2) hat man

$$\sqrt[m]{\frac{1}{a}} > \sqrt[m]{\frac{1}{b}},$$

und nach 3) $\sqrt[m]{\frac{1}{b}} > \sqrt[n]{\frac{1}{b}},$

folglich um ſo mehr $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} > \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$.

5) Werden aus ungleichen Zahlen, die größer als 1 ſind, nicht übereinſtimmend ungleiche Wurzeln gezogen, ſo erhält man mit der erſten Ungleichheit übereinſtimmend Ungleiches.

Vorausſ. Es ſei $a > b$, $m < n$,

Behaupt. ſo iſt $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Beweis. Nach 2) iſt

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b},$$

und nach 3) $\sqrt[m]{b} > \sqrt[n]{b},$

folglich um ſo mehr $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$.

6) Die übrigen Verbindungen, welche ſich hier noch angeben laſſen, führen ſtets zu unbeſtimmten Reſultaten, wie ſolches leicht nachgewieſen werden kann.

7) Die Wurzeln aus einer Zahl $z > 1$ nehmen ab, wenn der Wurzelexponent wächſt, werden aber niemals $\overline{\overline{<}}\ 1$.

Behaupt. $\sqrt[m]{z} < \sqrt[m-1]{z}$.

Beweis. Bringt man beide Wurzeln unter den gemeinſchaftlichen Wurzelexponenten $m\,(m-1)$, ſo erhält man

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m(m-1)]{z^{m-1}} \text{ und } \sqrt[m-1]{z} = \sqrt[m(m-1)]{z^m}$$

Nun iſt aber $z^{m-1} < z^m$,

also auch nach 2)

$$\sqrt[m(m-1)]{z^{m-1}} < \sqrt[m(m-1)]{z^m},$$

oder $$\sqrt[m]{z} < \sqrt[m-1]{z}.$$

Daß $\sqrt[m]{z}$ mit wachsendem m immer mehr der Einheit sich nähert, ohne dieser gleich zu werden, geht daraus hervor, daß wenn wir

$$\sqrt[m]{z} \overline{\overline{<}} 1$$

setzen, z = 1 sein müßte, was mit der Voraussetzung im Widerspruche stünde.

8) Die Wurzeln aus einem echten Bruche $\frac{a}{b}$ nehmen zu, wenn der Wurzelexponent wächst, werden aber niemals $\overline{\overline{>}}$ 1.

Behaupt. $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} > \sqrt[m-1]{\frac{a}{b}}$$

Beweis. Es ist

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m(m-1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1}} \text{ und } \sqrt[m-1]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m(m-1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}};$$

aber $$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} > \left(\frac{a}{b}\right)^{m},$$

folglich nach 2) $$\sqrt[m(m-1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1}} > \sqrt[m(m-1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}},$$

oder $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} > \sqrt[m-1]{\frac{a}{b}}.$$

Nehmen wir nun an, es könnte

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \overline{\overline{>}} 1$$

sein, so wäre um so mehr

$$\frac{a}{b} \overline{\overline{>}} 1,$$

was mit der Voraussetzung im Widerspruche stünde.

Anmerkung. Für negative und gebrochene Wurzelexponenten lassen sich aus Vorstehendem in Verbindung mit dem über solche Ausdrücke früher Mitgetheilten nun leicht die entsprechenden Sätze entwickeln.

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 136. Erklärungen.

1) Die Aufgabe des Logarithmirens besteht in der Auffindung des Exponenten einer Potenz aus deren Werth und Basis (§. 112, 1. b).

Bezeichnet man den als unbekannt zu betrachtenden Exponenten durch x, die Basis der Potenz durch b und setzt

$$b^x = n,$$

so nennt man den Exponenten x den Logarithmus des Numeri (Logarithmanden, Zahl) n für die Basis b und drückt diese Beziehung aus durch

$$x = \overset{(b)}{\log}\, n.$$

Beispiel.

Für $3^x = 81$ folgt $x = 4$ (denn $3^4 = 81$);

also ist $4 = \overset{(3)}{\log}\, 81$.

2) Aus Vorstehendem fließen unmittelbar die Gleichungen:

$$b^{\overset{(b)}{\log}\, n} = n$$

$$\overset{(b)}{\log}\, (b^n) = n.$$

Beispiele.

$$1)\ 3^{\overset{(3)}{\log}\, 81} = 81,$$

$$2)\ \overset{(3)}{\log}\, (3^{81}) = 81.$$

3) Um anzudeuten, daß von einer Zahl der Numerus zu nehmen sei, schreibt man vor dieselbe als Abkürzung num log.

Ist also $$b^x = n,$$
so hat man
$$\text{num} \overset{(b)}{\log} x = n$$
und liest dieses: „numerus logarithmi x für die Basis b ist gleich n.“

Beispiel.

Für $$3^4 = 81$$
folgt $$\text{num} \overset{(3)}{\log} 4 = 81.$$

4) Aus 3) fließen unmittelbar die Beziehungen:
$$\log (\text{num} \overset{(b)}{\log} x) = x = \text{num} \log (\overset{(b)}{\log} x)$$

Beispiel.

$$\log (\text{num} \overset{(3)}{\log} 4) = 4 = \text{num} (\overset{(3)}{\log} 4).$$

5) Berechnet man für eine bestimmte Basis die Logarithmen aller aufeinanderfolgenden Zahlen und stellt diese geordnet zusammen, so erhält man eine Logarithmentafel des Logarithmensystems dieser Basis.

§. 137. Allgemeine Sätze über Logarithmen.

1) Die Zahl Eins kann nicht als Basis eines Logarithmensystems dienen, da jede Potenz von 1 wiederum Eins gibt.

2) In einerlei System gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen, zu verschiedenen Zahlen dagegen verschiedene Logarithmen, und umgekehrt.

Denn ist
$$b^x = b^y,$$
so folgt unmittelbar
$$x = y$$
und wenn b^x nicht $= b^y$, so ist auch x nicht $= y$.

Hieraus ergibt sich nun leicht die Richtigkeit des umgekehrten Satzes.

3) Der Logarithmus der Basis eines jeden Systemes ist gleich Eins.

Beweis. Da $b^1 = b$

so folgt $1 = \overset{(b)}{\log}\, b.$

4) Der Logarithmus von Eins ist für jede von Null verschiedene Basis gleich Null.

Beweis. Da $b^0 = 1$ (§. 96, 2),

so folgt $0 = \overset{(b)}{\log}\, 1.$

5) Ist die Basis eines Logarithmensystemes größer als 1, so sind die Logarithmen positiv oder negativ, je nachdem die Zahlen bezüglich größer oder kleiner als 1 sind.

Beweis. Nehmen wir in der Gleichung

$$b^x = n$$

$b > 1$, so ist x oder $\overset{(b)}{\log}\, n$ positiv oder negativ, je nachdem $n \gtrless 1$ ist (§. 98).

6) Ist die Basis eines Logarithmensystemes kleiner als 1, so sind die Logarithmen positiv oder negativ, je nachdem die Zahlen bezüglich kleiner oder größer als 1 sind.

Beweis. Setzen wir in der Gleichung

$$b^x = n$$

$b < 1$, so ist x oder $\overset{(b)}{\log}\, n$ positiv oder negativ, je nachdem $n \gtrless 1$ ist (§. 98).

Zusatz.

Als Basis eines Logarithmensystemes wählt man immer eine positive, die Einheit übersteigende Zahl. Die Logarithmen aller positiven Zahlen werden alsdann reell, die der negativen dagegen unmöglich, indem jede positive und negative Potenz einer positiven Zahl wiederum positiv ist.

7) Der Logarithmus eines Produktes ist bei einerlei Basis*) gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

*) Da wir im Nachfolgenden stets voraussetzen, daß alle in einem und demselben Satze vorkommenden Logarithmen sich auf einerlei Basis beziehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, so werden wir in Zukunft sowohl den Beisatz „bei einerlei Basis", als auch die Bezeichnung der Basis weglassen.

Behaupt. $\log (mn) = \log m + \log n$.

Beweis. Setzen wir

$$b^x = m \text{ und } b^y = n,$$

so folgt $$b^x \cdot b^y = b^{x+y} = mn,$$

oder $$\log (mn) = x + y.$$

Nun ist aber

$$x = \log m \text{ und } y = \log n,$$

folglich $$\log (mn) = \log m + \log n.$$

Ebenso erhält man

$$\log (mnpq) = \log m + \log n + \log p + \log q.$$

8) Der Logarithmus eines Bruches wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers subtrahirt.

Behaupt. $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$.

Beweis. Aus den Gleichungen

$$b^x = m \text{ und } b^y = n,$$

folgt: $$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} = \frac{m}{n},$$

oder $$\log \frac{m}{n} = x - y,$$

oder, da $$x = \log m, \; y = \log n,$$

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n.$$

Beispiele.

1) $$\log \frac{ab}{c} = \log (ab) - \log c$$
$$= \log a + \log b - \log c.$$

2) $$\log \frac{mn}{pq} = \log (mn) - \log (pq)$$
$$= \log m + \log n - (\log p + \log q).$$

9) Der Logarithmus einer Potenz wird erhalten, wenn man den Potenzexponenten mit dem Logarithmus der Grundzahl multiplicirt.

Behaupt. $\log m^n = n \log m$.

Beweis. Erhebt man beide Seiten der Gleichung

$$b^x = m$$

zur nten Potenz, so folgt:

$$b^{nx} = m^n,$$

oder $$\log m^n = nx,$$

oder, da $$x = \log m,$$

$$\log m^n = n \log m.$$

Beispiele.

1) $\log (ab)^m = m \log (ab) = m (\log a + \log b).$

2) $\log \frac{a^m}{b^n} = \log a^m - \log b^n$

$= m \log a - n \log b.$

3) $\log \left(\frac{a}{b}\right)^y = y \log \frac{a}{b} = y (\log a - \log b).$

4) $\log \frac{a^m b^n}{c^p d^q} = \log (a^m b^n) - \log (c^p d^q)$

$= \log a^m + \log b^n - (\log c^p + \log d^q)$

$= m \log a + n \log b - (p \log c + q \log d).$

10) Der Logarithmus eines Wurzelausdruckes wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt.

Behaupt. $\log \sqrt[n]{m} = \frac{\log m}{n}.$

Beweis. Erhebt man beide Seiten der Gleichung

$$b^x = m$$

zur $\frac{1}{n}$ten Potenz, so folgt

$$b^{\frac{x}{n}} = m^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{m},$$

oder $$\log \sqrt[n]{m} = \frac{x}{n} = \frac{\log m}{n}.$$

Beispiele.

1) $\log \sqrt[m]{ab} = \frac{\log (ab)}{m} = \frac{\log a + \log b}{m}.$

2) $\log \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\log \frac{c}{d}}{n} = \frac{\log c - \log d}{n}.$

3) $\log \sqrt[p]{a^q} = \frac{\log a^q}{p} = \frac{q \log a}{p}.$

$$4)\ \log a^m \sqrt[n]{b^p} = \log a^m + \log \sqrt[n]{b^p}$$
$$= m \log a + \frac{\log b^p}{n}$$
$$= m \log a + \frac{p \log b}{n}$$

11) Aus vorstehenden Sätzen ersehen wir sogleich, daß durch Einführung der Logarithmen sämmtliche Grundrechnungsoperationen beträchtliche Abkürzungen erleiden; denn wir erkennen daraus, daß durch logarithmische Rechnung jede Multiplication in eine Addition, jede Division in eine Subtraction, jede Potenzirung in eine Multiplication, jede Radicirung in eine Division verwandelt wird.

Anmerkung. Die Vereinfachung läßt sich jedoch schon aus der Eigenschaft der Logarithmen als Potenzexponenten gleichnamiger Grundzahlen folgern.

12) Kennt man die Logarithmen eines Systemes, so kann man leicht dieselben für jedes andere System berechnen.

Denn ist z. B. der Logarithmus einer Zahl c für die Basis a bekannt, z. B. $\overset{(a)}{\log}\, c = b$, und man soll den Logarithmus x derselben Zahl c für eine andere Basis α finden, so ist

$$\overset{(\alpha)}{\log}\, c = x \text{ und } \overset{(a)}{\log}\, c = b,$$

also $$\alpha^x = c \quad \text{und} \quad a^b = c,$$

oder $$\alpha^x = a^b$$

daher für einerlei System nach 9.

$$x \log \alpha = b \log a,$$

also $$x = \frac{b \log a}{\log \alpha}.$$

Für die Basis a ist aber nach 3.

$$\log a = 1,$$

folglich wird

$$x = \overset{(\alpha)}{\log}\, c = \frac{b}{\overset{(a)}{\log}\, \alpha} = \frac{\overset{(a)}{\log}\, c}{\overset{(a)}{\log}\, \alpha} = \frac{1}{\overset{(a)}{\log}\, \alpha}\, \overset{(a)}{\log}\, c.$$

Den constanten Faktor $\frac{1}{\overset{(a)}{\log}\, \alpha}$ nennt man den Modulus des neuen Systemes in Bezug auf das bekannte. Multiplicirt

man also alle Logarithmen eines bekannten Systemes mit dem entsprechenden Modulus, so erhält man der Reihe nach die Logarithmen aller Zahlen für das neue System.

§. 138. Aufgaben zur Uebung.

1) Welches ist der Log. a) von 16, b) von 64, c von 256 für die Basis 4?

1a) Wie heißt der Log. von 65536 für die Basis 4?

1b) Welches ist der Log. von 32768 für die Basis 8?

1c) Den Log. von 15625 für die Basis 5 zu bestimmen.

1d) Für welche Basis ist $\log 64 = 3$?

1e) Für welche Basis ist $\log 625 = 4$?

1f) Für welche Basis ist $\log 42{,}875 = 3$?

2) $\log a^m b^n = ?$

2a) $\log a\, b^p c = ?$

2b) $\log a b^n c^p = ?$

2c) $\log \frac{a^x}{b^y} = ?$

2d) $\log \frac{a^m b^n}{c^p} = ?$

2e) $\log \sqrt[m]{ab^n} = ?$

2f) $\log a \sqrt[m]{b^n} = ?$

2g) $\log a^m b^n \sqrt[p]{c^q d^r} = ?$

3) $\log \sqrt[r]{a^m b^n c^p} = ?$

3a) $\log \sqrt[x]{\frac{a^y}{b^z}} = ?$

3b) $\log (a^m + b^n) \sqrt{\frac{c^p}{q}} = ?$

4) $\log \frac{x^{\frac{a}{b}}\, y^{\frac{c}{d}}}{z^{\frac{f}{g}}} = ?$

5) $\log a^m \sqrt[n]{\frac{b^p}{c^q}} = ?$

5a) $\log \sqrt[m]{a \sqrt[n]{b}} = ?$

6) $\log \frac{(a - b)^m \sqrt[n]{c^p}}{(g + h)^q \sqrt[3]{d^r}} = ?$

6a) $\log \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a}}} = ?$

6b) $\log a^m \sqrt[n]{b^p \sqrt[q]{c^r \sqrt[s]{d^t}}} = ?$

7) $\log a^5 \sqrt[m]{\frac{b^8 \sqrt[n]{\frac{c^2}{d^3}}}{g^7 \sqrt[q]{(h-k)^3}}} = ?$

8) $\text{num} \log \left(m \log a - \frac{n \log b}{2}\right) = ?$

9) $\text{num} \log \left[5 \log a + \frac{7 \log b}{n} - \left(4 \log (a - b) + \frac{5 \log x - 3 \log y}{n}\right)\right] = ?$

9a) $\text{num} \log \left[\log (a + b) - \log (a - b) + \frac{1}{m} \left(\frac{r}{p} \log c - q \log d\right)\right] = ?$

§. 139. Ueber Logarithmensysteme.

In der Mathematik sind von den unendlich vielen Systemen, welche sich aufstellen lassen, nur zweierlei im Gebrauche, nämlich das System von der Basis 10 und das von der Basis 2,718281828459 . . . Dieses heißt das natürliche, hyperbolische oder Nepersche*), jenes das künstliche, gemeine oder das Briggische**) System.

*) John Neper (Napier) (geb. 1550, gest. 1617), ein Schotte, erfand die Logarithmen und legte deren Berechnung die irrationale Zahl 2,7182818459 . . . als Basis zu Grunde.

**) Heinrich Briggs, Professor der Mathematik zu Oxford, veröffentlichte 1624 die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000. Die Lücke von 20000 bis 90000 wurde von dem holländischen Mathematiker Adrian Vlacq ausgefüllt.

In der Elementarmathematik findet jedoch nur das Briggische System Anwendung, weßhalb sich unsere Betrachtungen auch nur über solches erstrecken werden.

§. 140. Berechnung der Briggischen Logarithmen.

Die nächste Frage, welche sich uns nun aufwirft, ist die, ob sich die Logarithmen aller Zahlen auch wirklich finden lassen, und wie diese Aufsuchung zu geschehen habe. Um diese Frage näher zu erörtern, ist zunächst klar, daß dieselbe gelöst sein wird, sobald wir im Stande sind, in der Gleichung

$$10^x = n$$

zu allen denkbaren Werthen von n die entsprechenden von x zu finden.

Bezeichnen wir nun durch

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_m \ldots\ldots$$

einziffrige Zahlen, so lassen sich alle Werthe von x ausdrücken durch

$$x = \alpha_0\, 10^m + \alpha_1\, 10^{m-1} + \ldots\ldots + \alpha_{m-1}\, 10 + \alpha_m + \frac{\alpha_{m+1}}{10} + \frac{\alpha_{m+2}}{10^2} + \ldots\ldots$$

$$= \alpha_0\, 10^m + \alpha_1\, 10^{m-1} + \ldots\ldots + \alpha_{m-1}\, 10 + \alpha_m + \alpha_{m+1}\, 10^{-1} + \alpha_{m+2}\, 10^{-2} + \ldots$$

wo m eine ganze Zahl bezeichnet, und wir haben:

$$10^x = 10^{\alpha_0\, 10^m + \alpha_1\, 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\, 10 + \alpha_m + \alpha_{m+1}\, 10^{-1} + \ldots}$$

$$= 10^{\alpha_0\, 10^m} \cdot 10^{\alpha_1\, 10^{m-1}} \ldots\ldots 10^{\alpha_{m-1}\, 10} \cdot 10^{\alpha_m} \cdot 10^{\alpha_{m+1}\, 10^{-1}} \cdot 10^{\alpha_{m+2}\, 10^{-2}} \ldots\ldots$$

$$= 10^{\alpha_0\, 10^m} \cdot 10^{\alpha_1\, 10^{m-1}} \ldots\ldots 10^{\alpha_{m-1}\, 10} \cdot 10^{\alpha_m} \cdot 10^{\alpha_{m+1} \cdot \frac{1}{10}} \cdot 10^{\alpha_{m+2} \cdot \frac{1}{10^2}} \ldots\ldots$$

$$= \left(10^{10^m}\right)^{\alpha_0} \cdot \left(10^{10^{m-1}}\right)^{\alpha_1} \ldots\ldots \left(10^{10}\right)^{\alpha_{m-1}} \cdot 10^{\alpha_m} \cdot \left(\sqrt[10]{10}\right)^{\alpha_{m+1}} \cdot \left(\sqrt[10^2]{10}\right)^{\alpha_{m+2}} \ldots\ldots \quad (1).$$

Aus der Gleichung (1) ersehen wir, daß es vor Allem darauf ankommt, die Zahl 10 zunächst mit den Potenzen von 10 zu potenziren und zu radiciren und jedes dieser Resultate nach der Reihe auf die 1te, 2te, 3te, . . . 9te Potenz zu erheben,

da α alle möglichen einziffrigen Zahlen vorstellt, um zu jedem Werthe von x den Werth von n finden zu können.

Da aber

$$10 = 2 \,.\, 5,$$
$$100 = 10 \,.\, 2 \,.\, 5,$$
$$1000 = 100 \,.\, 2 \,.\, 5 \text{ u. s. w.},$$

so reducirt sich das Radiciren der Zahl 10 auf das Ausziehen von Quadrat= und 5te Wurzeln. Führt man diese Operation aus, so erhält man folgende zuerst von Kramp berechnete Tafel:

$$10^{0,1} = 1,258925411794$$
$$10^{0,01} = 1,023292992281$$
$$10^{0,001} = 1,002305238078$$
$$10^{0,0001} = 1,000230285021$$
$$10^{0,00001} = 1,000023026116$$
$$10^{0,000001} = 1,000002302589$$
$$10^{0,0000001} = 1,000000230259$$
$$10^{0,00000001} = 1,000000023026$$
$$10^{0,000000001} = 1,000000002303$$
$$10^{0,0000000001} = 1,000000000230$$
$$10^{0,00000000001} = 1,000000000023$$
$$10^{0,000000000001} = 1,000000000002$$

Da nun

$$10^{0,9} = (10^{0,1})^9, \quad 10^{0,8} = (10^{0,1})^8 \ldots$$
$$10^{0,09} = (10^{0,01})^9, \quad 10^{0,08} = (10^{0,01})^8 \ldots$$
$$10^{0,009} = (10^{0,001})^9, \quad 10^{0,008} = (10^{0,001})^8 \ldots$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

so erhält man durch Ausführung dieser Potenzen mittelst vorstehender Tafel nachfolgende Potenztafel:

$10^{0,9}$	= 7,943282347244	$10^{0,00009}$	= 1,000207254133
$10^{0,8}$	= 6,309573444804	$10^{0,00008}$	= 1,000184223775
$10^{0,7}$	= 5,011872336275	$10^{0,00007}$	= 1,000161193947
$10^{0,6}$	= 3,981071705537	$10^{0,00006}$	= 1,000138164649
$10^{0,5}$	= 3,162277660174	$10^{0,00005}$	= 1,000115135882
$10^{0,4}$	= 2,511886431514	$10^{0,00004}$	= 1,000092107645
$10^{0,3}$	= 1,995262314973	$10^{0,00003}$	= 1,000069079939
$10^{0,2}$	= 1,584893192465	$10^{0,00002}$	= 1,000046052762
$10^{0,1}$	= 1,258925411794	$10^{0,00001}$	= 1,000023026116
$10^{0,09}$	= 1,230268770812	$10^{0,000009}$	= 1,000020723480
$10^{0,08}$	= 1,202264434617	$10^{0,000008}$	= 1,000018420850
$10^{0,07}$	= 1,174897554939	$10^{0,000007}$	= 1,000016118225
$10^{0,06}$	= 1,148153621496	$10^{0,000006}$	= 1,000013815605
$10^{0,05}$	= 1,122018454301	$10^{0,000005}$	= 1,000011512991
$10^{0,04}$	= 1,096478196142	$10^{0,000004}$	= 1,000009210386
$10^{0,03}$	= 1,071519305236	$10^{0,000003}$	= 1,000006907782
$10^{0,02}$	= 1,047128548091	$10^{0,000002}$	= 1,000004605183
$10^{0,01}$	= 1,023292992281	$10^{0,000001}$	= 1,000002302589
$10^{0,009}$	= 1,020939483708	$10^{0,0000009}$	= 1,000002072348
$10^{0,008}$	= 1,018591388054	$10^{0,0000008}$	= 1,000001842085
$10^{0,007}$	= 1,016248692870	$10^{0,0000007}$	= 1,000001611823
$10^{0,006}$	= 1,013911385736	$10^{0,0000006}$	= 1,000001381560
$10^{0,005}$	= 1,011579454259	$10^{0,0000005}$	= 1,000001151299
$10^{0,004}$	= 1,009252886076	$10^{0,0000004}$	= 1,000000921038
$10^{0,003}$	= 1,006931668851	$10^{0,0000003}$	= 1,000000690778
$10^{0,002}$	= 1,004615790277	$10^{0,0000002}$	= 1,000000460518
$10^{0,001}$	= 1,002305238078	$10^{0,0000001}$	= 1,000000230259
$10^{0,0009}$	= 1,002074475336	$10^{0,00000009}$	= 1,000000207235
$10^{0,0008}$	= 1,001843765724	$10^{0,00000008}$	= 1,000000184208
$10^{0,0007}$	= 1,001613109228	$10^{0,00000007}$	= 1,000000161182
$10^{0,0006}$	= 1,001382505837	$10^{0,00000006}$	= 1,000000138156
$10^{0,0005}$	= 1,001151955538	$10^{0,00000005}$	= 1,000000115130
$10^{0,0004}$	= 1,000921458319	$10^{0,00000004}$	= 1,000000092104
$10^{0,0003}$	= 1,000691014168	$10^{0,00000003}$	= 1,000000069078
$10^{0,0002}$	= 1,000460623073	$10^{0,00000002}$	= 1,000000046052
$10^{0,0001}$	= 1,000230285021	$10^{0,00000001}$	= 1,000000023026

Wenden wir diese Tafeln nun zunächst an, um z. B. den Werth von n für x = 4,834068 zu finden, so hat man nach Obigem:

$$10^{4,834068} = 10^{4 + 8.10^{-1} + 3.10^{-2} + 4.10^{-3} + 0.10^{-4} + 6.10^{-5} + 8.10^{-6}}$$
$$= 10^4 . 10^{8.10^{-1}} . 10^{3.10^{-2}} . 10^{4.10^{-3}} . 10^{6.10^{-5}} . 10^{8.10^{-6}}$$
$$= 10^4 . 10^{0,8} . 10^{0,03} . 10^{0,004} . 10^{0,00006} . 10^{0,000008}$$
$$= 10000 . 6,309573444804 . 1,071519305236 . 1,009252886076 . 1,000138164649 . 1,000018420850$$
$$= 68244.$$

Hieraus folgern wir umgekehrt: Um den Log. einer Zahl n mittelst vorstehender Tabellen zu bestimmen, suche man zunächst die beiden Potenzen von 10, zwischen welchen n liegt, dividire alsdann mit der kleineren derselben in die Zahl n und suche hierauf in der zweiten Tafel die nächsten Werthe, zwischen welchen der erhaltene Quotient q_1 liegt. Mit dem kleineren dieser Werthe dividire man alsdann wieder in den Quotienten q_1 und bestimme nach eben dieser Tafel die Zahlenwerthe, welche den neuen Quotienten q_2 am engsten einschließen, und fahre in gleicher Weise fort zu operiren.

Die Summe aller Exponenten, welche den kleineren, die betreffenden Zahlenwerthe einschließenden, Potenzen entsprechen, gibt schließlich den Log. der Zahl n.

Will man auf diese Weise z. B. log 68244 bestimmen, so folgt: da $10^4 = 10000$ und $10^5 = 100000$, daß die Zahl zwischen 10^4 und 10^5 liegt.

Nun ist (A)

$10^4 < 68244 < 10^5$ also $\frac{68244}{10^4} = 6,8244 = q_1$

$10^{0,8} < 6,8244 < 10^{0,9}$ „ $\frac{6,8244}{10^{0,8}} = 1,08161 = q_2$

$10^{0,03} < 1,08161 < 10^{0,04}$ „ $\frac{1,08161}{10^{0,03}} = 1,00941 = q_3$

$10^{0,004} < 1,00941 < 10^{0,005}$ „ $\frac{1,00941}{10^{0,004}} = 1,000158 = q_4$

$10^{0,00006} < 1,000158 < 10^{0,00007}$ „ $\frac{1,000158}{10^{0,00006}} = 1,000019 = q_5$

$10^{0,000008} < 1,000019 < 10^{0,000009}$ u. s. w.

Also $\log n = \log 68244 = 4 + 0{,}8 + 0{,}03 + 0{,}004 + 0{,}00006 + 0{,}000008$
$= 4{,}834068.$

Denn multipliciren wir die Gleichungen (A) mit einander, wie sie unter einander stehen, so folgt wieder:

$$\frac{68244}{10^4} \cdot \frac{q_1}{10^{0,8}} \cdot \frac{q_2}{10^{0,03}} \cdot \frac{q_3}{10^{0,004}} \cdots = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots$$

oder

$$68244 = 10^4 \,.\, 10^{0,8} \,.\, 10^{0,03} \,.\, 10^{0,004} \ldots .$$

also

$$\log 68244 = 4 + 0{,}8 + 0{,}03 + 0{,}004 + 0{,}00006 + 0{,}000008.$$

Hiernach ist also die Möglichkeit der Berechnung der Logarithmen aller Zahlen dargethan. Allein diese Berechnungsart ist, wie vorstehendes Beispiel zeigt, sehr weitläufig. Schneller gelangt man mittelst der in der Analysis zu entwickelnden convergirenden Reihen zum Ziele.

Man hat die gemeinen Logarithmen in Tafeln zusammengestellt und es gibt, je nach Bedürfniß des Rechnenden, Logarithmentafeln, welche die Logarithmen auf vier, fünf, sechs und sieben Decimalstellen enthalten. Besonders empfehlenswerth sind die siebenstelligen Tafeln von Schrön und die neue Bearbeitung der Vega'schen Tafeln durch Bremiker. Da jedoch für den Schulgebrauch im Allgemeinen kleinere Tafeln vollkommen genügen, so machen wir in dieser Beziehung noch auf die fünfstelligen Tafeln von Nell, Schlömilch und die vierstelligen von Müller aufmerksam.

In Bezug auf den Gebrauch dieser Tafeln findet man jeder derselben als Einleitung das Nöthige vorausgeschickt, weßhalb wir in Betreff des Verfahrens beim Aufschlagen den Studirenden darauf verweisen und hier nur noch der merkwürdigsten Eigenschaften der Briggischen Logarithmen und des Gebrauches derselben bei Berechnungen gedenken wollen.

§. 141. Eigenschaften und Gebrauch der Briggischen Logarithmen.

1) Da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ u. s. w., also $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ u. s. w.

so schließen wir hieraus, daß die Logarithmen aller Zahlen, welche kleiner als 10 sind, Decimalbrüche, dagegen die aller größeren Zahlen, Ganze oder Ganze mit Decimalbrüchen sind.

Die Ganzen eines Log. nennt man die Kennziffer oder Charakteristik, den angehängten Decimalbruch Mantisse (Anhang, Zugabe).

2) Die Kennziffer eines Log. ist stets um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern der ganzen Stellen der zu logarithmirenden Zahl.

Beweis. Bestehen die Ganzen der zu logarithmirenden Zahl z aus n Ziffern, so ist

$$z > 10^{n-1} \text{ aber } < 10^n,$$

folglich auch

$$\log z > n - 1 \text{ aber } < n.$$

Somit fällt log z zwischen n — 1 und n und hat demnach n — 1 zur Charakteristik.

Anmerkung. In den Tafeln für Briggische Logarithmen ist nur die Mantisse, nicht aber die Charakteristik angegeben, da sich solche nach vorstehendem Satze jederzeit aus der Ziffernanzahl der vorgelegten Zahl unmittelbar anschreiben läßt.

Zusatz.

Der einem Logarithmus entsprechende Numerus hat immer in den ganzen Stellen eine Ziffer mehr, als die Charakteristik des Log. Einheiten hat.

Die Richtigkeit folgt unmittelbar durch Umkehrung des vorstehenden Satzes.

3) Werden einer dekadischen Zahl rechts Nullen angehängt, so bleibt die Mantisse ihres Log. unverändert.

Beweis. Hängen wir der Zahl z rechts n Nullen an, so ist sie dargestellt durch $10^n \,.\, z$.

Nun ist aber

$$\log (10^n \,.\, z) = n \log 10 + \log z$$
$$= n + \log z$$

und da n eine ganze Zahl ist, so ersehen wir hieraus, daß nur die Charakteristik von log z durch das Anhängen der Nullen eine Vergrößerung erleidet, die Mantisse aber unverändert bleibt.

4) Mittelst einer Logarithmentafel, welche nur für fünfziffrige Zahlen die Logarithmen enthält, den Logarithmus einer sechsziffrigen Zahl z zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnen wir durch Z_0 die zunächst größere und durch z_0 die zunächst kleinere an z liegende, durch 10 theilbare Zahl, so ergibt sich leicht durch Versuche, daß man auf 7 und mehr Decimalstellen Genauigkeit annehmen darf, es sei

$$\frac{Z_0 - z_0}{z - z_0} = \frac{\log Z_0 - \log z_0}{\log z - \log z_0}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung beiderseits mit

$$\frac{(z - z_0)(\log z - \log z_0)}{Z_0 - z_0}$$

so erhält man

$$\log z - \log z_0 = \frac{(z - z_0)(\log Z_0 - \log z_0)}{Z_0 - z_0}$$

und hieraus, wenn man auf beiden Seiten $\log z_0$ addirt:

$$\log z = \log z_0 + \frac{(z - z_0)(\log Z_0 - \log z_0)}{Z_0 - z_0}$$

Nun sind aber $\log Z_0$ und $\log z_0$ nach 3) bekannt, also ist $\log z$ bestimmt.

Beispiel.

Um hiernach log 827934 zu bestimmen, setze man

$$Z_0 = 827940, \quad z = 827934, \quad z_0 = 827930$$

$$z - z_0 = 4, \; Z_0 - z_0 = 10$$

$$\log Z_0 = \log 827940 = 5{,}9179989$$

$$\log z_0 = \log 827930 = 5{,}9179936$$

$$\log Z_0 - \log z_0 = 0{,}0000053$$

dann folgt:

$$\log z = \log 827934 = 5{,}9179936 + \frac{4 \,.\, 0{,}0000053}{10}$$

$$= 5{,}9179936 + 0{,}00000212$$

$$= 5{,}9179957.$$

Anmerkung. Betrachtet man in vorstehendem Beispiele die Mantisse als eine ganze Zahl, so hätte man also hierzu noch 21,2 zu addiren gehabt. In den Tafeln sind nun diese, für die sechste Ziffer noch zur Mantisse (als Ganze) zu addirenden, Zahlen in der mit P. P. (Proportionaltheile, Partes proportionales) überschriebenen Spalte angegeben. Das Weitere hierüber findet man in der Einleitung zur Tafel selbst.

5) **Einen negativen Logarithmus in einen anderen mit positiver Mantisse, aber negativer Charakteristik zu verwandeln.**

Auflösung. Man subtrahire den gegebenen Logarithmus von einer ganzen Zahl, welche um die Einheit größer ist als dessen Charakteristik und hänge diese Zahl wieder der Differenz mit dem negativen Zeichen an.

Beispiel.

Ist $-3{,}6245784$ der vorgelegte Logarithmus, so hat man

$$-3{,}6245784 = (4 - 3{,}6245784) - 4$$
$$= 0{,}3754216 - 4.$$

Anmerkung. Ein Logarithmus von dieser Form heißt ein Logarithmus mit negativer Charakteristik.

6) **Einen Logarithmus von einem kleineren zu subtrahiren.**

1. Auflösung. Man vergrößere die Charakteristik des Minuenden um so viel Einheiten, als gerade nothwendig sind, um die Subtraction zu ermöglichen und hänge der Differenz die zugezählte Zahl wieder als negative Kennziffer an.

Beispiel.

$$0{,}2684573 - 3{,}6240061 =$$
$$(4{,}2684573 - 4) - 3{,}6240061 =$$
$$0{,}6444512 - 4$$

2. Auflösung. Man subtrahire den kleineren Logarithmus vom größeren und verwandle die negative Differenz nach 5) in eine andere mit positiver Mantisse.

Beispiel.

$$0{,}2684573 - 3{,}6240061 =$$
$$-3{,}3555488 = 0{,}6444512 - 4.$$

7) **Den Logarithmus eines Decimalbruches zu finden.**

Auflösung. Es seien 873,54 und 0,00768 die zu logarithmirenden Decimalbrüche.

Da $\log 873{,}54 = \log \frac{87354}{1000} = \log 87354 - \log 1000$

$$= 4{,}9412828 - 3 = 1{,}9412828,$$

und $\log 0{,}00768 = \log \frac{768}{100000} = \log 768 - \log 100000$

$= 2{,}8853612 - 5 = 0{,}8853612 - 3,$

so schließen wir hieraus auf folgende Regeln:

a) Der Logarithmus eines Decimalbruches, dem Ganze vorangehen, wird erhalten, wenn man die Charakteristik nach der Anzahl der Ziffern der Ganzen bestimmt und hieran die Mantisse hängt, welche den Ganzen und den Decimalstellen als eine ganze Zahl betrachtet, entspricht.

b) Der Logarithmus eines reinen Decimalbruches wird erhalten, wenn man zu diesem, als ganze Zahl betrachtet, die Mantisse sucht, derselben als Charakteristik 0 Ganze vorschreibt und als negative Kennziffer eine Zahl anhängt, welche so viele Einheiten hat, als der ersten Decimalstelle von Werth Nullen (mit Einschluß der 0 Ganzen) vorangehen.

Zusätze.

a) Zu einem Logarithmus mit negativer Kennziffer gehört umgekehrt als Numerus ein Decimalbruch, bei welchem der ersten Decimalstelle von Werth so viele Nullen (mit Einschluß der 0 Ganzen) voran gehen, als die negative Kennziffer Einheiten hat.

Beispiele.

1) $\text{num} \log 0{,}6897261 - 4 = 0{,}00048947$
2) $\text{num} \log 0{,}0362295 - 1 = 0{,}1087.$

b) Die Logarithmen aller Zahlen, welche mit denselben und in der nämlichen Ordnung aufeinanderfolgenden Ziffern geschrieben werden, haben einerlei Mantisse.

Beispiele.

1) $\log 47857 = 4{,}6799455$
2) $\log 478{,}57 = 2{,}6799455$
3) $\log 0{,}47857 = 0{,}6799455 - 1$
4) $\log 0{,}0047857 = 0{,}6799455 - 3.$

8) Einen Logarithmus mit negativer Kennziffer durch eine Zahl zu dividiren.

Auflösung. Ist die negative Kennziffer nicht schon ein ganzes Vielfaches des Divisors, so addire man ihr so viele Einheiten zu, als gerade nothwendig sind, um ein Vielfaches vom Divisor zu werden, zähle denselben Werth auch zum Logarithmus und führe nun die Division aus.

Beispiele.

1) 0,7632424 — 1 : 3 =
2,7632424 — 3 : 3 = 0,9210808 — 1

2) 0,4276825 — 1 : 2,5 =
1,9276825 — 2,5 : 2,5 = 0,771073 — 1.

Anmerkungen. 1) Man kann die Division eines Logarithmus durch eine Zahl auch dadurch bewerkstelligen, daß man denselben zuerst in einen negativen Logarithmus umändert, diesen dividirt und den Quotienten nun nach 5. in einen anderen mit positiver Mantisse verwandelt.

Z. B. 0,7632424 — 1 : 3 =
— 0,2367576 : 3 = — 0,0789192 =
0,9210808 — 1.

2) Hat ein Logarithmus als negative Kennziffer einen Decimalbruch, so kann dieselbe ebenfalls durch gleichzeitige Addition und Subtraction leicht in eine ganze Zahl verwandelt werden.

Z. B. 0,1463252 — 3,4 = (0,6 + 0,1463252) — (3,4 + 0,6)
= 0,7463252 — 4.

9) Subtrahirt man einen Logarithmus von 10, so heißt die Differenz die **dekadische Ergänzung** von jenem Log.

10) **Zwei Logarithmen werden von einander subtrahirt, wenn man die dekadische Ergänzung des Subtrahenden zum Minuenden addirt und von der Summe 10 subtrahirt.**

Beispiel.

log 86,4 — log 21,54 = 1,9365137 — 1,3332457
= 1,9365137 + (10 — 1,3332457) — 10
= 1,9365137 + 8,6667543 — 10
= 10,6032680 — 10 = 0,6032680.

Anmerkung. Durch Einführung der dekadischen Ergänzung läßt sich der Werth der algebraischen Summe mehrer Logarithmen leicht durch bloße Addition finden, wenn man nur schließlich so viel mal 10 subtrahirt, als dekadische Ergänzungen in Rechnung gebracht wurden.

Um z. B.
6,3825042 — 2,7682084 + 4,3692765 — 3,7210068 — 0,3006241
zu bestimmen, hat man:

	6,3825042
d. E. 2,7682084 =	7,2317916
	4,3694765
d. E. 3,7210068 =	6,2789932
d. E. 0,3006241 =	9,6993759
Algebr. Summe =	33,9621414 — 30 = 3,9621414.

62/40 2602 2
0,6032680

11) Den Log. der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen der einzelnen Zahlen zu bestimmen, ohne vorher die Logarithmanden dieser Zahlen aufzusuchen.

Auflösung. Um diese Aufgabe zu lösen, sei

$$\log z = a, \log z' = a',$$

also

$$z = \text{num} \log a \text{ und } z' = \text{num} \log a',$$

so ist

$$z \pm z' = z\left(1 \pm \frac{z'}{z}\right) = z\,[1 \pm \text{num}\log\,(\log z' - \log z)]$$
$$= z\,[1 \pm \text{num} \log\,(a' - a)].$$

Durch beiderseitiges Logarithmiren erhält man hieraus unter der Voraussetzung, daß $a > a'$ sei:

$$\log\,[z \pm z'] = \log z + \log\,[1 \pm \text{num} \log\,(a' - a)],$$

oder

$$\log\,[z \pm z'] = a + \log\,[1 \pm \text{num} \log\,(a' - a)].$$

Beispiel.

Für $z = 7189$, $z' = 6497$

folgt:
$$a = \log z = 3{,}8566685$$
$$a' = \log z' = 3{,}8127129$$
$$a' - a = 0{,}9560444 - 1$$
$$1 + \text{num} \log\,(a' - a) = 1{,}9037418$$
$$\log\,[1 + \text{num} \log\,(a' - a)] = 0{,}2796079$$

also $\log(z + z') = \log(7189 + 6497) = 3{,}8566685 + 0{,}2796079$
$= 4{,}1362764.$

Hieraus geht hervor, daß wenn man mittelst Logarithmen für alle aufeinander folgenden Werthe, welche die Differenz $a' - a$ annehmen kann, die Ausdrücke

$\log\,[1 + \text{num} \log\,(a' - a)]$ und $\log\,[1 - \text{num} \log\,(a' - a)]$

berechnen und in einer Tafel zusammenstellen würde, man alsdann zur Differenz der in den speciellen Fällen vorliegenden Logarithmen, die so bestimmten Werthe in der Tafel aufzuschlagen und zum größeren der beiden gegebenen Logarithmen zu addiren hätte, um bezüglich den Log. der Summe oder Differenz der zwei Zahlen z und z′ zu erhalten.

Diese Arbeit hat zuerst Gauß ausgeführt und man findet seine Resultate manchen Logarithmentafeln beigegeben. Ueber den Gebrauch derselben findet sich das Nähere in der betreffenden Einleitung.

§. 142. Aufgaben zur Uebung.

a) Ueber das Aufschlagen von Logarithmen zu gegebenen Zahlen.

1) $\log 78458 = ?$

1a) $\log 46{,}542 = ?$

2) $\log 47{,}685 = ?$

2a) $\log 384700 = ?$

3) $\log 3{,}7674 = ?$

3a) $\log 0{,}9843 = ?$

4) $\log 0{,}68257 = ?$

4a) $\log 0{,}068708 = ?$

5) $\log 0{,}0074258 = ?$

5a) $\log 0{,}000068 = ?$

6) $\log 7685{,}83 = ?$

6a) $\log 32{,}5896 = ?$

7) $\log 4{,}78256 = ?$

7a) $\log 0{,}698504 = ?$

8) $\log 0{,}0425789 = ?$

8a) $\log 3895672 = ?$

9) $\log 3945{,}783 = ?$

10) $\log 74{,}85684 = ?$

11) $\log (6{,}947 \,.\, 3{,}728) = ?$

12) $\log \dfrac{4{,}7686}{95{,}7835} = ?$

13) $\log \dfrac{3{,}568 \,.\, 7{,}465}{12{,}597 \,.\, 8{,}321} = ?$

14) $\log 2{,}732^{4,5} = ?$

15) $\log \sqrt[8]{79{,}4258} = ?$

16) $\log \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{44{,}29}}{3{,}87^5}} = ?$

17) $\log 0{,}25^{4,8} \sqrt[7]{\dfrac{\sqrt[5]{3{,}764}}{\sqrt[3]{79{,}4^2}}} = ?$

18) $\log \sqrt[9]{\dfrac{8{,}47 \sqrt[6]{98{,}25}}{5{,}493 \sqrt[5]{\frac{11}{24}}}} = ?$

b) Ueber das Aufsuchen der Logarithmanden zu gegebenen Logarithmen.

19) num log 3,8247505 = ?

20) num log 2,9483944 = ?

21) num log 1,3940487 = ?

22) num log 0,2220997 — ?

23) num log 2,8475968 = ?

24) num log 5,7680328 = ?

25) num log 0,5786294 — 1 = ?
26) num log 0,2987543 — 3 = ?
27) num log 0,0259864 — 2 = ?
28) num log 0,0007298 — 4 = ?

c) Ueber die wirkliche Berechnung mittelst Logarithmen.

29) $\left(\frac{5}{4}\right)^8 = ?$

30) $\left(\frac{3{,}64}{7{,}985}\right)^6 = ?$

31) $\left(\frac{4{,}5983}{2{,}9572}\right)^{0{,}8} = ?$

32) $\sqrt[7]{\frac{6}{11}} = ?$

33) $\sqrt[5]{\left(\frac{32}{29}\right)^4} = ?$

34) $\sqrt[9]{\frac{24{,}73^5}{31{,}974^4}} = ?$

35) $\sqrt[11]{4{,}257^9 \sqrt[3]{\frac{4}{5}}} = ?$

36) $\sqrt[17]{\frac{38{,}9^5 \sqrt[8]{\frac{2}{7}}}{6{,}8^9 \sqrt[5]{\frac{4}{9}}}} = ?$

37) $\sqrt{(38 + \sqrt[8]{15})} = ?$

38) $\sqrt[5]{\frac{16{,}8^3 + 2{,}4^7}{2{,}5^6}} = ?$

38a) $\sqrt[3]{4 + \sqrt[3]{4 + \sqrt[3]{4}}} = ?$

38b) $2\sqrt[3]{7 + 3\sqrt[3]{5 + 4\sqrt[3]{6}}} = ?$

39) $\sqrt[10]{\frac{3\sqrt{11} + 4{,}8^5}{\sqrt[3]{2{,}76}}} = ?$

40) $\sqrt[7]{\dfrac{0{,}08^6\,(4{,}2^5 - 7{,}6^3)}{\sqrt[3]{(0{,}72^7 - 0{,}64^8)}}} = ?$

41) $\left[3{,}45^{0,25} - \left(\dfrac{0{,}7}{0{,}084}\right)^{\frac{5}{7}}\right] \sqrt[10]{\dfrac{5\sqrt[4]{7} + 3^6\sqrt[5]{0{,}03}}{\left(\frac{7}{11}\right)^7 \sqrt[3]{\left[0{,}0864^5 - \left(\frac{0{,}03}{0{,}37}\right)^6\right]}}} = ?$

○ §. 143. Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch Logarithmirung.

1) In einerlei System sind die Logarithmen ungleicher Zahlen übereinstimmend ungleich.

Vorausf. Es sei $m > n$, $b > 1$ eine ganze Zahl,

Behaupt. so ist $\overset{(b)}{\log}\, m > \overset{(b)}{\log}\, n$.

Beweis. Setzen wir

$$m = n + x = n\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

so wird

$$\overset{(b)}{\log}\, m = \overset{(b)}{\log}\,(n + x)$$

$$= \overset{(b)}{\log}\, n + \overset{(b)}{\log}\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

also ist

$$\overset{(b)}{\log}\, m > \overset{(b)}{\log}\, n.$$

2) Gleiche Zahlen nach ungleichen Grundzahlen logarithmirt geben übereinstimmend oder nicht übereinstimmend Ungleiches, je nachdem bezüglich die Zahlen kleiner oder größer als 1 sind.

Vorausf. Es seien b und β positive ganze Zahlen und $b > \beta$,

Behaupt. so ist $\overset{(b)}{\log}\, m \gtrless \overset{(\beta)}{\log}\, m$, je nachdem $m \lessgtr 1$.

Beweis. Setzt man

$$b = \beta + x = \beta\left(1 + \frac{x}{\beta}\right),$$

so folgt

$$\overset{(b)}{\log}\, m = \overset{\left(\beta\left(1+\frac{x}{\beta}\right)\right)}{\log}\, m.$$

Nehmen wir nun an, es sei $m < 1$, so sind nach §. 137, 5 die Logarithmen negativ. Setzen wir darum

$$\overset{\left(\beta(1+\frac{x}{\beta})\right)}{\log} m = \overset{(b)}{\log} m = -z,$$

also $m = \left[\beta\left(1+\frac{x}{\beta}\right)\right]^{-z} = \beta^{-z}\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-z} = \dfrac{\beta^{-z}}{\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z}}$

oder $m\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z} = \beta^{-z}$,

so folgt, da offenbar

$$\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z} > 1,$$

$$\beta^{-z} > m,$$

also auch $\overset{(\beta)}{\log}\, \beta^{-z} > \overset{(\beta)}{\log} m$ (§. 143, 1),

oder $-z > \overset{(\beta)}{\log} m$ (§. 136, 2),

oder $\overset{(b)}{\log} m > \overset{(\beta)}{\log} m$.

Für den Fall, daß $m > 1$, sei

$$\overset{\left(\beta(1+\frac{x}{\beta})\right)}{\log} m = \overset{(b)}{\log} m = z',$$

also $m = \left[\beta\left(1+\frac{x}{\beta}\right)\right]^{z'} = \beta^{z'}\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z'}$,

oder $\dfrac{m}{\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z'}} = \beta^{z'}$;

da nun $\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{z'} > 1$,

so ist $\beta^{z'} < m$,

also auch $\overset{(\beta)}{\log}\, \beta^{z'} < \overset{(\beta)}{\log} m$,

oder $z' < \overset{(\beta)}{\log} m$,

oder $\overset{(b)}{\log} m < \overset{(\beta)}{\log} m$.

3) **Werden zwei echte Brüche nach übereinstimmend ungleichen Grundzahlen logarithmirt, so erhält man übereinstimmend Ungleiches.**

Vorauss. Es sei $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$, $b > \beta$,

Behaupt. so ist $\overset{(b)}{\log}\frac{1}{m} > \overset{(\beta)}{\log}\frac{1}{n}$.

Beweis. Nach 1. ist

$$\overset{(b)}{\log}\frac{1}{m} > \overset{(b)}{\log}\frac{1}{n}$$

und nach 2. $$\overset{(b)}{\log}\frac{1}{n} > \overset{(\beta)}{\log}\frac{1}{n},$$

folglich auch $$\overset{(b)}{\log}\frac{1}{m} > \overset{(\beta)}{\log}\frac{1}{n}.$$

4) Werden zwei Zahlen, die größer als 1 sind, nach nicht übereinstimmend ungleichen Grundzahlen logarithmirt, so erhält man mit der ersten Ungleichung übereinstimmend Ungleiches.

Vorauss. Es sei $m > n > 1$, $b > \beta$,

Behaupt. so ist $\overset{(b)}{\log}\, m > \overset{(\beta)}{\log}\, n$

Beweis. Man hat nach 1.

$$\overset{(b)}{\log}\, m > \overset{(b)}{\log}\, n$$

und nach 2. $$\overset{(b)}{\log}\, n > \overset{(\beta)}{\log}\, n$$

also $$\overset{(b)}{\log}\, m > \overset{(\beta)}{\log}\, n.$$

5) Alle übrigen Verbindungen führen zu unbestimmten Resultaten.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

---

§. 144. Von den Verhältnissen.

1) Zwei gleichartige Größen, oder zwei Zahlen können in doppelter Beziehung unter einander verglichen werden.

Man kann nämlich untersuchen

a) um wie viel,

b) wie viel mal

die eine größer ist als die andere.

Die erste Art der Vergleichung führt zu dem arithmetischen, die zweite dagegen zu dem geometrischen Verhältnisse der zwei Größen oder Zahlen.

2) Um ein arithmetisches oder ein geometrisches Verhältniß zu bezeichnen, setzt man zwischen die, das Verhältniß bildenden, Ausdrücke bezüglich das Subtractionszeichen (—), oder das Divisionszeichen (:).

So drückt z. B.

12 — 4 das arithmetische,

12 : 4 das geometrische

Verhältniß der zwei Zahlen 12 und 4 aus.

3) Der Werth eines arithmetischen Verhältnisses heißt insbesondere Differenz, der eines geometrischen Quotient oder auch Exponent. So ist für das erste der vorstehenden Verhältnisse 8 die Differenz, für das zweite 3 der Quotient.

Bezeichnen wir daher allgemein durch d die Differenz und durch q den Quotienten, so ist

$(a + d) - a$ die allgemeine Form eines arithmetischen,
und $aq : a$ „ „ „ „ geometrischen Verhältnisses.

Die zwei mit einander in Beziehung gebrachten Ausdrücke nennt man die Glieder und zwar das links vom Verhältnißzeichen stehende, das erste oder Vorderglied, das rechtsstehende, das zweite oder Hinterglied des Verhältnisses.

4) Haben zwei arithmetische / geometrische Verhältnisse gleiche Differenzen / Quotienten, so sagt man, sie seien einander gleich, im anderen Falle werden sie ungleich genannt und zwar heißt dasjenige das größere, dessen Differenz die / Quotient der größere ist.

5) Sind zwei Verhältnisse einem und demselben dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

6) Je nachdem das Hinterglied eines Verhältnisses größer oder kleiner ist, als das Vorderglied, heißt dasselbe bezüglich ein steigendes (wachsendes) oder ein fallendes (abnehmendes) Verhältniß.

Ein geometrisches Verhältniß heißt ferner rational oder irrational, je nachdem der Quotient eine rationale oder irrationale Zahl ist, die beiden Glieder also commensurabel oder incommensurabel sind.

So ist z. B. $24 : 4$ ein fallendes rationales Verhältniß, weil das Hinterglied 4 kleiner als das Vorderglied 24 und der Quotient $\frac{24}{4} = 6$ eine rationale Zahl ist; dagegen ist $6\sqrt{5} : 3$ ein irrationales Verhältniß, weil der Quotient $\frac{6\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist.

7) Setzt man die Glieder eines Verhältnisses in der Weise um, daß man das erste zum zweiten und dieses zum ersten macht, so heißt das neue Verhältniß das umgekehrte oder indirecte des ursprünglichen, welches selbst das gerade oder directe genannt wird.

So ist z. B. $b : a$ das umgekehrte Verhältniß von $a : b$.

8) Aus der Auffassung eines arithmetischen Verhältnisses als die Differenz und eines geometrischen als der Quotient zweier Zahlen, fließen unmittelbar folgende Sätze:

α) Ein arithmetisches Verhältniß bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man beide Glieder um ein und dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert.

β) Ein geometrisches Verhältniß bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man beide Glieder mit ein und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

So ist z. B.

α) $(a + d) - d = (a + d \pm z) - (d \pm z)$.

β) $aq : a = azq : az = \frac{aq}{z} : \frac{a}{z}$.

Zusatz.

Mittelst dieses Satzes können wir ein Glied eines geometrischen Verhältnisses mit zwei irrationalen Gliedern rational machen.

So ist z. B.

$$a\sqrt{b} : c\sqrt{d} = a\sqrt{bd} : cd.$$

9) Der Quotient eines irrationalen Verhältnisses läßt sich so genau angeben, daß der begangene Fehler kleiner wird, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

Beweis. Ist z. B. $a : b$ das gegebene irrationale Verhältniß, und x der zu suchende Quotient, so wird x zwischen zwei aufeinanderfolgende Vielfache irgend eines Theiles von b fallen. Denken wir uns nun, es sei b in n gleiche Theile getheilt und x falle zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, so hat man

$$\frac{m}{n} < x < \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

Für jeden Werth von x, der zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ liegt, wird also der Fehler kleiner als $\frac{1}{n}$ ausfallen. Da man aber n so groß wählen kann, d. h. b in so viele gleiche Theile theilen kann, als man nur will, so wird auch der, stets kleiner als $\frac{1}{n}$ ausfallende, Fehler so klein werden können, als man eben will.

10) Bildet man aus der Summe aller Vorderglieder und der Summe aller Hinterglieder mehrer

gleichen geometrischen Verhältnisse ein neues Verhältniß, so hat dieses einerlei Quotienten mit den einzelnen Verhältnissen.

Voraussf. Es seien der Reihe nach

$$aq : a,\ bq : b,\ cq : c \text{ und } dq : d$$

die gegebenen Verhältnisse, deren gemeinschaftlicher Quotient $= q$ ist,

Behaupt. so hat auch das Verhältniß:

$$(aq + bq + cq + dq) : (a + b + c + d)$$

den Quotienten q.

Beweis. Es ist

$$\frac{aq + bq + cq + dq}{a + b + c + d} = \frac{(a + b + c + d)\,q}{a + b + c + d} = q.$$

11) Aus 10) fließen unmittelbar folgende Sätze:

α) Sind mehre gleiche geometrische Verhältnisse gegeben, so bildet die Summe aller Vorderglieder und die Summe aller Hinterglieder ein Verhältniß, welches jedem der einzelnen Verhältnisse gleich ist.

β) Sind mehre geometrische Verhältnisse einem und demselben Verhältnisse gleich, so ist das Verhältniß der Summe aller Vorderglieder und der Summe aller Hinterglieder jenem gegebenen Verhältnisse ebenfalls gleich.

12) Subtrahirt man zwei gleiche geometrische Verhältnisse gliedweise, so entsteht ein neues Verhältniß, welches jedem der zwei vorgelegten Verhältnisse gleich ist.

Beweis. Sind z. B.

$$aq : a \text{ und } bq : b$$

die zwei gleichen Verhältnisse mit dem gemeinschaftlichen Quotienten q, so ist für das neue Verhältniß

$$(aq - bq) : (a - b)$$

der Quotient $= \frac{aq - bq}{a - b} = \frac{(a - b)\,q}{a - b}$,

oder ebenfalls q.

13) Bildet man aus dem Produkte der Vorderglieder und dem der Hinterglieder mehrer gegebenen geometrischen Verhältnisse

ein neues Verhältniß, so nennt man dieses ein zusammengesetztes Verhältniß.

14) Der Quotient eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Produkte der Quotienten der einzelnen Verhältnisse.

Beweis. Denn sind die gegebenen Verhältnisse der Reihe nach

$$aq_1 : a, \; bq_2 : b, \; cq_3 : c, \; dq_4 : d,$$

so hat das zusammengesetzte Verhältniß

$$abcd\,q_1\,q_2\,q_3\,q_4 : abcd$$

den Quotienten

$$\frac{abcd\,q_1\,q_2\,q_3\,q_4}{abcd} = q_1\,q_2\,q_3\,q_4.$$

15) Multiplicirt man sowohl die Vorderglieder als auch die Hinterglieder mehrer geometr. Verhältnisse, von welchen der Reihe nach jedes Hinterglied gleich ist dem Vorderglied des nächstfolgenden, mit einander, so bilden die Produkte ein Verhältniß, welches dem Verhältnisse des Vordergliedes des ersten Verhältnisses zum Hinterglied des letzten Verhältnisses gleich ist.

Beweis. Denn sind z. B. die einzelnen Verhältnisse der Reihe nach

$$a : b, \; b : c, \; c : d, \; d : f,$$

so ist

$$abcd : bcdf = a : f.$$

§. 145. Von den Proportionen im Allgemeinen.

1) Durch Gleichsetzung zweier gleichen Verhältnisse entsteht eine Proportion. Diese ist entweder eine arithmetische oder eine geometrische, je nachdem die Verhältnisse selbst arithmetisch oder geometrisch sind.

Hiernach ist also

$$(a + d) - a = (b + d) - b$$

die allgemeine Form einer arithmetischen, und

$$aq : a = bq : b$$

die allgemeine Form einer geometrischen Proportion. Die erste wird gelesen: a + d verhält sich zu a wie b + d zu b, und die zweite: aq verhält sich zu a wie bq zu b.

2) Die vier Glieder der beiden Verhältnisse einer Proportion heißen die **Glieder** derselben und zwar unterscheidet man, vom Vorderglied des links stehenden Verhältnisses ausgehend, das erste, zweite, dritte und vierte Glied. — Das erste und dritte, sowie das zweite und vierte Glied nennt man die **homologen** oder **gleichnamigen**, dagegen das erste und vierte die **äußeren** und das zweite und dritte die **mittleren Glieder** der betreffenden Proportion.

3) Sind die mittleren Glieder einander **gleich**, so heißt die Proportion eine **stetige**, im anderen Falle aber **discret**.

Jedes der gleichen Glieder einer stetigen Proportion nennt man die **mittlere arithmetische** oder **geometrische Proportionale** zwischen den beiden anderen Gliedern, je nachdem die Proportion selbst eine arithmetische oder geometrische ist.

So ist z. B. b in der stetigen arithmetischen Proportion

$$a - b = b - c$$

die mittlere arithmetische Proportionale oder auch das **arithmetische Mittel** und in der stetigen geometrischen Proportion

$$a : b = b : c$$

die mittlere geometrische Proportionale oder kurzhin die **Mittlere** zwischen den Zahlen a und c.

4) Das vierte Glied einer Proportion heißt auch die **vierte** oder die **dritte Proportionale** zu den anderen Gliedern, je nachdem die Proportion bezüglich eine discrete oder eine stetige ist.

So ist z. B. in der Proportion

$$a : b = c : d$$

d die vierte geometrische Proportionale zu a, b und c, dagegen ist in der Proportion

$$a : b = b : c$$

c die dritte geometrische Proportionale zu a und b.

§. 146. Von den arithmetischen Proportionen.

1) **In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder.**

Beweis. Denn aus der allgemeinen Form

$$(a + d) - a = (b + d) - b$$

folgt sowohl durch Addition der äußeren als auch der inneren Glieder die Summe $a + b + d$.

Hiernach ist es nun leicht irgend ein Glied einer arithmetischen Proportion zu bestimmen, wenn die drei anderen Glieder gegeben sind.

Ist das unbekannte Glied nämlich ein äußeres, so subtrahire man das andere äußere von der Summe der beiden inneren Glieder, und ist es ein mittleres, so subtrahire man das andere mittlere von der Summe der beiden äußeren Glieder, um den Werth desselben zu erhalten.

Ist z. B. in der Proportion

$$12 - 5 = 17 - x$$

das Glied x zu suchen, so hat man

$$x = (5 + 17) - 12 = 10.$$

Anmerkung. Der angeführte Satz kann angewendet werden, um die Richtigkeit einer vorgelegten arithmetischen Proportion zu prüfen.

2) Die mittlere arithmetische Proportionale oder das arithmetische Mittel zwischen zwei Zahlen ist gleich der halben Summe dieser beiden Zahlen.

Beweis. Nach 1) folgt aus der Proportion

$$a - x = x - b$$

unmittelbar $$2x = a + b$$

also $$x = \frac{a + b}{2}.$$

Anmerkung. Die arithmetischen Proportionen finden fast gar keine Anwendung und kommen darum in der Folge nicht leicht mehr zur Sprache. Aus diesem Grunde werden wir von nun an eine geometrische Proportion kurzhin durch das Wort „Proportion" bezeichnen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

§. 147. Von den geometrischen Proportionen.

1) In jeder Proportion ist das Produkt der beiden äußeren Glieder gleich dem Produkte der beiden mittleren.

Beweis. Aus der allgemeinen Form

$$aq : a = bq : b$$

folgt unmittelbar, sowohl für die äußeren als auch für die beiden mittleren Glieder, das Produkt abq.

Zusatz.

Mittelst vorstehenden Satzes kann leicht irgend ein Glied einer Proportion bestimmt werden, wenn die drei anderen Glieder gegeben sind.

Denn ist z. B. die Proportion

$$a : b = c : d$$

gegeben, so muß

$$ad = bc,$$

also

$$a = \frac{bc}{d}, \; d = \frac{bc}{a}$$

und

$$b = \frac{ad}{c}, \; c = \frac{ad}{b}$$

sein, d. h.

Ein $\begin{matrix}\text{äußeres}\\ \text{inneres}\end{matrix}$ Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der beiden $\begin{matrix}\text{inneren}\\ \text{äußeren}\end{matrix}$ durch das gegebene $\begin{matrix}\text{äußere}\\ \text{innere}\end{matrix}$ dividirt.

Beispiel.

In der Proportion

$$7 : 15 = 21 : x$$

findet man für das fehlende Glied

$$x = \frac{15 \cdot 21}{7} = 45.$$

Anmerkung. Der angeführte Satz kann zur Prüfung der Richtigkeit einer vorgelegten Proportion dienen. Ist nämlich das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der mittleren, so ist die Proportion eine richtige, da in diesem Falle die Quotienten der beiden Verhältnisse einander gleich sind.

Ist z. B. die zu prüfende Proportion $a : b = c : d$

und $ad = bc,$

so ist auch $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd},$

oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

also die Proportion eine richtige.

Zusätze.

a) Sind zwei gleiche Produkte gegeben, so wird daraus eine richtige Proportion gebildet, wenn man die Faktoren des einen Produktes als die beiden

äußeren, und die des anderen als die beiden mittleren Glieder annimmt.

Beispiel.

Ist $ad = bc$, so erhält man die Proportion

$$a : b = c : d.$$

b) Sind in zwei Proportionen drei Glieder der Reihe nach einander gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

Beispiel.

Es verhalte sich $a : b = c : x$

und $a : b = c : y,$

so ist $x = y.$

2) Bilden zwei Verhältnisse eine richtige Proportion, so sagt man, die Glieder der beiden Verhältnisse seien proportional, muß man aber eines der Verhältnisse umkehren, um durch ihre Gleichsetzung eine richtige Proportion zu erhalten, so sagt man, die Glieder der ursprünglichen Verhältnisse seien umgekehrt proportional.

So sind z. B. die Zähler zweier gleichen Brüche mit ihren Nennern proportional, dagegen sind die Faktoren zweier gleichen Produkte umgekehrt proportional. Denn aus jeder der Gleichungen

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

oder $ad = bc$

fließt unmittelbar die Proportion

$$a : b = c : d.$$

3) Die mittlere Proportionale zu zwei Zahlen wird gefunden, wenn man aus deren Produkt die Quadratwurzel zieht.

Beweis. Hat man z. B. die stetige Proportion

$$a : x = x : b,$$

so folgt nach 1.

$$x^2 = ab,$$

also für $x = \sqrt{ab}.$

4) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a und b ist größer als deren geometrisches Mittel.

Beweis. Denn es ist

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

also

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab,$$

oder

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{ab}.$$

5) Jede Proportion kann in Bezug auf die Aufeinanderfolge ihrer Glieder folgende acht verschiedene Formen annehmen:

$$\begin{aligned} a : b &= c : d \\ a : c &= b : d \\ b : a &= d : c \\ b : d &= a : c \\ c : a &= d : b \\ c : d &= a : b \\ d : b &= c : a \\ d : c &= b : a, \end{aligned}$$

denn in allen Fällen erhält man, übereinstimmend mit der als richtig angenommenen ersten Proportion, die Gleichung

$$ad = bc.$$

6) Ist $a = m$ und $b = n$, so erhält man hieraus nach §. 35, 2 die Proportion

$$a : b = m : n$$

d. h. die beiden Seiten zweier Gleichungen sind proportional.

7) Enthalten zwei Proportionen ein und dasselbe Verhältniß, so kann man aus den beiden anderen Verhältnissen eine neue Proportion bilden.

Hat man z. B. die Proportionen

$$a : b = c : d$$

und

$$f : g = c : d,$$

so besteht nach §. 144, 5 auch die Proportion

$$a : b = f : g.$$

8) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder, wie irgend zwei homologe Glieder derselben.

Beweis. Ist z. B.

$$aq : a = bq : b$$

die vorgelegte Proportion, so erhält man

$$(aq \pm a) : (bq \pm b) = aq : bq = a : b,$$

denn der Quotient ist für jedes dieser Verhältnisse $= \frac{a}{b}$.

9) In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zur Differenz dieser Glieder, wie die Summe der zwei letzten Glieder zur Differenz eben dieser Glieder.

Beweis. Ist z. B.

$$aq : a = bq : b$$

die gegebene Proportion, so ist auch die Proportion

$$(aq + a) : (aq - a) = (bq + b) : (bq - b)$$

richtig, da der Quotient beider Verhältnisse $= \frac{q+1}{q-1}$ ist.

10) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und dritten Gliedes zur Summe oder Differenz des zweiten und vierten Gliedes, wie das erste oder dritte Glied zum zweiten oder vierten.

Beweis. Ist $aq : a = bq : b$

die gegebene Proportion, so hat man auch:

$$(aq \pm bq) : (a \pm b) = aq : a = bq : b,$$

denn der Quotient eines jeden dieser Verhältnisse ist $= q$.

Anmerkung. Nimmt man nach 5) in den letzten Sätzen eine Gliederversetzung vor, so resultirt noch eine Anzahl von Proportionen, die sich ebenfalls leicht in Worten ausdrücken lassen.

11) Eine Proportion wird nicht geändert, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied, oder auch alle Glieder zugleich mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Die Richtigkeit dieses Satzes fließt unmittelbar aus 5) und §. 144, 8 β.

Zusatz.

Vorstehender Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, eine Proportion von den etwa darin vorkommenden Brüchen zu befreien.

Denn ist z. B. die Proportion

$$\frac{27}{4} : \frac{5}{2} = \frac{2}{3} : x$$

gegeben und man multiplicirt sämmtliche Glieder mit dem Hauptnenner 12 der Brüche, so erhält man

$$81 : 30 = 8 : 12x,$$

als eine von Brüchen freie Proportion.

Ferner läßt sich durch Anwendung dieses Satzes häufig eine gegebene Proportion in kleineren Zahlen ausdrücken.

Ist z. B. $24 : 64 = 17 : x$

die vorgelegte Proportion und man dividirt die beiden ersten Glieder durch 8, so erhält man:

$$3 : 8 = 17 : x.$$

12) Eine Proportion wird nicht geändert, wenn man alle Glieder derselben mit einer und derselben Zahl potenzirt oder radicirt.

Beweis. Ist z. B.

$$aq : a = bq : b$$

die gegebene Proportion, so hat man auch

$$(aq)^n : a^n = (bq)^n : b^n$$

und $\sqrt[m]{aq} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{bq} : \sqrt[m]{b}$,

denn der Quotient beider Verhältnisse ist im ersten Falle $= q^n$, im zweiten $= \sqrt[m]{q}$.

13) Sind mehre gleiche Verhältnisse gegeben, so verhält sich nach §. 144, 10) die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie irgend ein Vorderglied zum zugehörigen Hinterglied.

Verbindet man mehr als zwei gleiche Verhältnisse durch Gleichheitszeichen und setzt also

$$aq : a = bq : b = cq : c = dq : d = \ldots.$$

so erhält man eine fortschreitende Proportion.

Vorstehender Satz läßt sich darum auch so ausdrücken:

In jeder fortschreitenden Proportion bildet die Summe aller Vorderglieder und die aller Hinterglieder mit jedem Einzelverhältniß eine Proportion.

14) Haben sämmtliche Verhältnisse zweier Proportionen gleiche Quotienten, so erhält man durch

gliedweise Addition oder Subtraction beider wiederum eine richtige Proportion.

Beweis. Denn hat man z. B.

$$aq : a = bq : b$$

und $$cq : c = dq : d,$$

so folgt auch:

$$(aq \pm cq) : (a \pm c) = (bq \pm dq) : (b \pm d),$$

da beide Verhältnisse den Quotienten q haben.

Zusatz.

Hat man mehr als zwei Proportionen mit gleichen Verhältnißquotienten, so erhält man nach vorstehendem Satze durch gliedweise Addition derselben wiederum eine richtige Proportion.

15) Multiplicirt man zwei oder mehre Proportionen gliedweise mit einander, so bilden die Produkte wieder eine richtige Proportion.

Beweis. Aus den Proportionen

$$aq_1 : a = bq_1 : b$$
$$cq_2 : c = dq_2 : d$$
$$eq_3 : e = fq_3 : f$$

folgt die richtige Proportion

$$aceq_1 q_2 q_3 : ace = bdfq_1 q_2 q_3 : bdf,$$

weil der Quotient beider Verhältnisse $= q_1 q_2 q_3$ ist.

Man nennt jede auf solche Weise entstandene Proportion eine zusammengesetzte.

16) Dividirt man zwei Proportionen gliedweise durch einander, so bilden die Quotienten wieder eine richtige Proportion.

Beweis. So folgt aus

$$aq_1 : a = bq_1 : b$$

und $$cq_2 : c = dq_2 : d$$

die Proportion

$$\frac{aq_1}{cq_2} : \frac{a}{c} = \frac{bq_1}{dq_2} : \frac{b}{d},$$

da der Quotient beider Verhältnisse $= \frac{q_1}{q_2}$ ist.

§. 148. Die harmonische Proportion.

1) Sind vier Zahlen (gleichartige Größen) a, b, c, d so beschaffen, daß sich die Differenz der ersten und zweiten zur Differenz der dritten und vierten verhält, wie die erste zur vierten, also die Proportion besteht

$$a - b : c - d = a : d,$$

so sagt man a, b, c und d seien harmonisch proportionirt oder in harmonischer Proportion.

So bilden z. B. die vier Zahlen: 17, 6, 56, 34 eine harmonische Proportion, denn man hat

$$17 - 6 : 56 - 34 = 17 : 34$$

oder

$$11 : 22 = 17 : 34.$$

2) Läßt man die beiden mittleren Zahlen einander gleich werden, so nimmt die harmonische Proportion die Form an

$$a - b : b - c = a : c.$$

Man sagt in diesem Falle die Zahl c sei die dritte harmonische Proportionale zu den zwei Zahlen a und b, dagegen b sei die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel zu den zwei Zahlen a und c und nennt die Proportion selbst eine stetige harmonische Proportion.

3) Nach §. 147, 1 folgt aus vorstehender Proportion:

$$(a - b)\, c = (b - c)\, a$$

oder

$$ac - bc = ab - ac.$$

Addirt man nun beiderseits ac, so wird

$$2ac - bc = ab$$

oder

$$(2a - b)\, c = ab$$

und hiernach

$$c = \frac{ab}{2a - b}$$

d. h. die dritte harmonische Proportionale zwischen zwei Zahlen wird gefunden, wenn man das Produkt derselben durch die Differenz der doppelten ersten Zahl und der zweiten dividirt.

Addirt man dagegen in der Gleichung

$$ac - bc = ab - ac$$

beiderseits den Werth ac + bc, so folgt:

$$2ac = ab + bc$$

oder $$2ac = (a + c)\,b$$

und hieraus $$b = \frac{2ac}{a + c}$$

d. h. *die mittlere harmonische Proportionale zwischen zwei Zahlen wird gefunden, wenn man das doppelte Produkt dieser Zahlen durch ihre Summe dividirt.*

4) *Die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen a und b ist zugleich das geometrische Mittel zu dem arithmetischen und harmonischen Mittel derselben.*

Beweis. Da

$$\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \frac{2ab}{a + b} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} = ab,$$

so hat man nach §. 147, 1 Zus. α die Proportion

$$\frac{a + b}{2} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a + b}.$$

Anmerkung.

Die geometrischen Proportionen finden nicht allein in allen Zweigen der Mathematik ausgedehnte Anwendung, sondern sie leisten auch bei der Auflösung der im bürgerlichen Leben vorkommenden Rechnungen wesentliche Dienste, indem sich die meisten Größen, welche hier zur Sprache kommen, als geometrische Verhältnisse auffassen und darum zu Proportionen verbinden lassen. So stehen z. B. die Waaren mit ihren entsprechenden Preisen in gleichem Verhältnisse; denn n mal mehr von einer und derselben Waare zieht einen n mal höheren Preis nach sich.

Sind nun drei dieser Größen gegeben, so läßt sich die vierte leicht finden. Man nennt diese Aufgabe im praktischen Rechnen die *Regel de tri* oder die *goldene Regel*. Je nachdem nun zur Auffindung des unbekannten Gliedes eine Proportion hinreicht, oder mehr als zwei Verhältnisse gegeben sein müssen, unterscheidet man die *einfache* und die *zusammengesetzte Regel de tri*.

Einfache Regel de tri.

1) Bevor man zur Bestimmung des fehlenden Gliedes schreitet, hat man zu untersuchen, ob die vorgelegte Aufgabe, ihrem Wesen nach, sich in eine Proportion bringen läßt. Ist dieses der Fall, so bildet man am zweckmäßigsten aus den gleichartigen Größen die Verhältnisse, welche die entsprechende Proportion ausmachen. Das fehlende Glied bezeichnet man hierbei durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets, wie x, y, z, . . .

Je nachdem die zwei Verhältnisse einer Proportion gerade oder umgekehrt sind, unterscheidet man auch eine gerade und umgekehrte Regel de tri.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1. Aufgabe. 24 Pfd. einer Waare kosten 27 Fl., was kosten 16 Pfd.?

Auflösung. Da die Waare mit ihrem Preise in geradem Verhältnisse steht, so hat man die Proportion:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pfd.} & & \text{Pfd.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ 24 & : & 16 & = & 27 & : & x \end{array}$$

woraus nach §. 147 folgt:

$$x = \frac{16 \;.\; 27}{24} = 18 \text{ fl.}$$

Das Abkürzen kann an der Proportion selbst (nach §. 147, 11) oder an dem als Bruch geschriebenen Werthe von x geschehen.

2. Aufgabe. Von 785 fl. 12 kr. erhielt man nach einigen Jahren 196 fl. 18 kr. Zins; wie viel Zins wird man bei gleichem Zinsfuße in derselben Zeit von 523 fl. 28 kr. erhalten?

Auflösung. Je mehr man, unter der gemachten Voraussetzung, Geld ausleiht, um so mehr Zins erhält man. Man hat deßhalb:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{fl.} & & \text{fl.} & & \text{Zins.} & & \text{Zins.} \\ 785\frac{1}{5} & : & 523\frac{7}{15} & = & 196\frac{3}{10} & : & x \end{array}$$

oder $\frac{3926}{5} : \frac{7852}{15} = \frac{1963}{10} : x$

oder $3926 \,.\, 15 \,.\, 10 : 7852 \,.\, 5 = 1963 : x$

also $x = \frac{7852 \,.\, 5 \,.\, 1963}{3926 \,.\, 15 \,.\, 10} = 130 \text{ fl. } 52 \text{ kr.}$

3. Aufgabe. Welches Kapital trägt bei 4% jährl. 152 fl. 36 kr. Zins?

Auflösung. $\overset{\text{fl.}}{4} : \overset{\text{fl.}}{152\frac{3}{5}} = \overset{\text{fl.Kp.}}{100} : \overset{\text{fl.Kp.}}{x}$,

oder $4 \,.\, 5 : 763 = 100 : x$,

also ist $x = \frac{763 \,.\, 100}{4 \,.\, 5} = 3815 \text{ fl.}$

4. Aufgabe. Um eine bestimmte Arbeit in 25 Tagen fertig zu bringen, waren 18 Arbeiter nöthig; wie viel Arbeiter hätten angestellt werden müssen, wenn diese Arbeit in 15 Tagen hätte zu Ende geführt werden sollen?

Auflösung. Je mehr Zeit, desto weniger Arbeiter, und umgekehrt. Arbeiter und Zeit stehen somit in umgekehrtem Verhältnisse und man hat deßhalb:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tage.} & & \text{Tage.} & & \text{Arb.} & & \text{Arb.} \\ 25 & : & 15 & = & x & : & 18 \end{array}$$

woraus folgt $x = \frac{25 \,.\, 18}{15} = 30$ Arbeiter.

5. Aufgabe. Ein Wechsel über 2400 fl. ist nach 4 Monaten zahlbar. Derselbe kann aber baar gegen $3^0/_0$ Abzug bezahlt werden; wie viel beträgt dieser Abzug?

Auflösung. Aus der Proportion

$$\begin{array}{ccccccc} \text{fl.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ 100 & : & 2400 & = & 97 & : & x \end{array}$$

folgt $x = 2328$ fl.

Also beträgt der Abzug 2400 — 2328 = 72 fl.

Anmerkung. Den Abzug, welchen ein Gläubiger dem Schuldner bei baarer Bezahlung erlaubt, nennt man Rabatt oder Disconto und die vorstehende Art der Berechnung des Rabatts die Rechnung in Hundert. Ein anderes Verfahren, das unter dem Namen die Rechnung auf Hundert bekannt ist, ergibt sich aus der Proportion:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{fl.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} & & \text{kr.} \\ 103 & : & 2400 & = & 100 & : & x. \end{array}$$

Man findet hiernach $x = 2330$ fl. $5\frac{85}{103}$ kr.
und für den Abzug $= 69$ fl. $54\frac{18}{103}$ kr.

Es bedarf wohl keiner weiteren Begründung, daß von beiden Verfahrungsarten die Rechnung auf Hundert die richtigere ist.

Zusammengesetzte Regel de tri.

Bei den hierher gehörigen Aufgaben können zwei Fälle vorkommen. Entweder sind nämlich die Verhältnisse der zur Lösung erforderlichen Größen unmittelbar gegeben, oder deren Zusammenhang ist durch gegebene Zwischenverhältnisse bestimmt.

Im ersten Falle geschieht die Lösung nach der sog. Regula multiplex, im zweiten nach der Kettenregel.

a) Regula multiplex.

Wir wollen die Auflösung der hierher gehörigen Aufgaben sogleich an einem Beispiele zeigen.

Aufgabe. M Maurer, welche täglich S Stunden arbeiten, führen in T Tagen eine Mauer von L Fuß Länge, H Fuß Höhe und D Fuß Dicke auf; in wie viel Tagen werden m Maurer, welche täglich s Stunden arbeiten, eine Mauer von l Fuß Länge, h Fuß Höhe und d Fuß Dicke aufzuführen im Stande sein.

1) Man berechne zuerst die Zeit, welche m Maurer brauchen, wenn M Maurer T Tage nöthig haben.

Man erhält, da die Arbeiter mit der Zeit in umgekehrtem Verhältnisse stehen: $m : M = T$ T. : v T.

2) m Arbeiter brauchen also v Tage zur Aufführung einer L Fuß langen Mauer, wie lange brauchen sie bei gleicher Arbeitszeit zu einer l Fuß langen Mauer?

Dieses ergibt sich aus

$$L : l = v\ T. : u\ T.$$

3) Wenn die Mauer H Fuß hoch ist, brauchen die m Maurer also u Tage, wie lange brauchen sie, wenn die Mauer h Fuß Höhe haben soll?

Man erhält $H : h = u\ T. : z\ T.$

4) Ebenso bekommt man unter Berücksichtigung der verschiedenen Dicke:

$$D : d = z\ T. : y\ T.$$

5) Bedenkt man nun noch, daß die m Maurer y Tage brauchen, wenn sie täglich S Stunden arbeiten und eine Vermehrung der Arbeitsstunden eine Verminderung der Tage zur Folge hat, so findet man endlich die Anzahl der Tage, welche die m Arbeiter, bei einer s stündigen Arbeit täglich, brauchen aus der Proportion

$$s : S = y\ T. : x\ T.$$

Anstatt nun aus jeder dieser Proportionen das fehlende Glied zu berechnen und in die nächstfolgende einzuführen, schreiben wir dieselben der Reihe nach unter einander wie folgt:

$$\begin{array}{l} m : M = T : y \\ L : l = v : u \\ H : h = u : z \\ D : d = z : y \\ s : S = y : x \end{array}$$

und multipliciren nun solche gliedweise. Dann ergibt sich:

$$mLHDs : MlhdS = T : x,$$

woraus nun x leicht gefunden werden kann.

Bildet man aus vorstehender Proportion die Gleichung

$$xmLHDs = TMlhdS$$

und schreibt die Faktoren beider Seiten so, daß die das Frageglied enthaltenden links, die anderen rechts von einem vertikal gezogenen Striche untereinander zu stehen kommen, so erhält man folgende Ansatzweise:

$$\begin{array}{c|c} x & T \\ m & M \\ s & S \\ L & l \\ H & h \\ D & d. \end{array}$$

Man kennt dieselbe im praktischen Rechnen unter dem Namen: „die Reesische Regel.“

Diese wird also erhalten, indem man einen vertikalen Strich zieht, links oben die zu suchende Größe x und ihr gegenüber die ihr zugehörige gleichartige schreibt und nun für jede Größe des Fragesatzes untersucht, ob eine Vermehrung derselben auch eine solche der zu suchenden Zahl nach sich zieht, oder umgekehrt; alsdann für

den ersten Fall jene Zahl des in Frage stehenden Satzes rechts und die ihr gleichartige des bedingenden Satzes links, für den zweiten Fall dagegen diese rechts und jene links vom Vertikalstrich setzt und nun mit dem Produkte der links vom Verticalstrich stehenden Zahlen in das Produkt der rechts stehenden dividirt.

Bevor man multiplicirt, wird man natürlich, wenn es thunlich ist, Abkürzungen unter den einzelnen Faktoren vornehmen.

Kommen Brüche unter den einzelnen Faktoren vor, so werden dieselben eingerichtet, die Zähler auf die nämliche Seite des Bruches, die Nenner auf die andere Seite vom Vertikalstrich gesetzt.

Es sei z. B. folgende Aufgabe zu lösen:

5 Weber weben in 10 Tagen, wenn sie täglich 7 Stunden arbeiten, 12 Stück Tuch, jedes von 36 Ellen Länge, $1\frac{3}{4}$ Ellen Breite; wie viel Tage werden 8 Weber zur Fertigung von 35 Stück brauchen, wenn jedes 30 Ellen lang, $1\frac{1}{2}$ Elle breit werden soll und dieselben täglich 9 Stunden arbeiten?

Man hat	W.	Std.	St.	E. l.	E. b.	Tg.
als Bedingungssatz:	5,	7,	12,	36,	$1\frac{3}{4}$,	10
als Fragesatz:	8,	9,	35,	30,	$1\frac{1}{2}$,	x,

also nach obiger Vorschrift den Ansatz:

x Tg.	10 Tg.		x	10
8 W.	5 W.		8	5
9 Std.	7 Std.	oder	9	7
12 St.	35 St.		12	35
36 E. l.	30 E. l.		36	30
$1\frac{3}{4}$ E. b.	$1\frac{1}{2}$ E. b.		7	4
			2	3

Nach gehöriger Abkürzung findet man hieraus

$$x = 10\tfrac{55}{432} \text{ Tage.}$$

b) Kettenregel.

Wie oben schon bemerkt, wird die Kettenregel bei Lösung solcher Aufgaben angewendet, bei welchen die Abhängigkeit der unbekannten Größe von den bekannten nicht durch Verhältnisse, sondern durch Gleichungen bestimmt ist.

Wählen wir zur Herleitung der Regel folgende numerische Aufgabe:

Was kostet das Pfund einer Waare in Berlin, wenn 25 Kilogramm 107 Francs kosteten, 100 Kilogramm 214 Berliner Pfund sind, 1 Franc 28 Kreuzer, 60 Kreuzer einen Gulden, 7 Gulden 4 Thaler geben?

Auflösung. Bilden wir der Reihe nach die entsprechenden Proportionen, so erhalten wir:

1) Für die Verwandlung der 25 Kilogramme in Berl. Pfund:
100 Kilogr. : 25 Kilogr. = 214 Berl. Pfd. : w Berl. Pfd.

2) Für die Berechnung eines Berl. Pfundes in Francs:

w Berl. Pfd. : 1 Berl. Pfd. = 107 Fr. : v Fr.

3) Für die Verwandlung der Francs in Kreuzer:

1 Fr. : v Fr. = 28 Kr. : u Kr.

4) Für die Verwandlung der Kreuzer in Gulden:

60 Kr. : u Kr. = 1 Fl. : z Fl.

5) Für die Verwandlung der Gulden in Thaler:

7 Fl. : z Fl. = 4 Thlr. : y Thlr.

6) Für die Verwandlung der Thaler in Silbergroschen:

1 Thlr. : y Thlr. = 30 Sgr. : x Sgr.

oder der Reihe nach die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 214 \,.\, 25 &= 100 \,.\, w \\ v \,.\, w &= 1 \,.\, 107 \\ 1 \,.\, u &= 28 \,.\, v \\ 60 \,.\, z &= 1 \,.\, u \\ 7 \,.\, y &= 4 \,.\, z \\ 1 \,.\, x &= 30 \,.\, y, \end{aligned}$$

oder, wenn man beide Seiten einzeln mit einander multiplicirt,

$$214 \,.\, 25 \,.\, 1 \,.\, 60 \,.\, 7 \,.\, 1 \,.\, x = 1 \,.\, 100 \,.\, 107 \,.\, 28 \,.\, 1 \,.\, 4 \,.\, 30$$

also für

$$x = \frac{1 \,.\, 100 \,.\, 107 \,.\, 28 \,.\, 1 \,.\, 4 \,.\, 30}{214 \,.\, 25 \,.\, 1 \,.\, 60 \,.\, 7 \,.\, 1} = 16 \text{ Sgr.}$$

Gibt man diesem Ansatz folgende Form:

x	1 Berl. Pfd.
Berl. Pfd. 214	100 Kilogr.
Kilogr. 25	107 Francs
Franc 1	28 Kreuzer
Kreuzer 60	1 Gulden
Gulden 7	4 Thaler
Thaler 1	30 Silbergroschen,

so läßt sich hieraus leicht folgende Anschreibregel erkennen:

Man ziehe einen vertikalen Strich, setze oben links die zu suchende Größe x und rechts nebenan die in Frage stehende oder die zu verwandelnde Größe. Hierauf setze man wieder links vom Strich unter x die mit der in Frage stehenden gleichnamige Größe und rechts nebenan diejenige Größe, welche mit ihr nach der Aufgabe einerlei Werth hat; dann links wieder die gleichnamige zur letzten rechtsstehenden Größe u. s. f. bis man endlich auf der rechten Seite des Striches auf eine Größe kommt, welche mit der zu suchenden x gleichnamig ist. Alsdann verfahre man in Betreff der Ausrechnung wie beim Reesischen Satze.

§. 149. Aufgaben zur Uebung.

1) Bestimmet x aus jeder der nachstehenden Proportionen:

a) $m : n = x : p$.

b) $27 : 90 = 45 : x$.

c) $24\frac{2}{3} : 15\frac{1}{2} = 2x : 7\frac{2}{3}$.

d) $mx^5 : p = nx^4 : mn$.

e) $a^4b^2 : c^2x^2 = 25 : 9$.

f) $12 + x : x = 24 : 8$.

g) $a + x : a - x = b : c$.

h) $a + x : b = c - x : d$.

i) $a - x : b + x = c + x : d - x$.

k) $\sqrt{x + 7} : \sqrt{x} = 36 : 27$.

l) $\sqrt{x - 5} : \sqrt{7 + x} = 1 : 2$.

2) Die Gleichung

$$\frac{(a + b)}{c}\frac{x}{} = \frac{d}{f}$$

als Proportion anzuschreiben, so daß x allein das vierte Glied bildet.

3) Man soll x in a und d ausdrücken, wenn die beiden Proportionen

$$a : b = c : d \text{ und } b : x = a^3 : c$$

gegeben sind.

4) 25 Pfd. kosten $21\frac{1}{4}$ fl., was kosten 18 Pfd.?

5) $3\frac{1}{4}$ Loth kosten $12\frac{1}{2}$ Kr., was kosten $61\frac{3}{4}$ Pfd.?

6) m hessische Fuß geben b würtemberger, wie viel würtemberger Fuß geben m_1 hessische Fuß?

6a) Was kosten 5 Pfd. 12 Loth, wenn 16 Pfd. 4 Loth 36 fl. 15 kr. kosten?

6b) 1 Ctr. 25 Pfd. kosten 200 fl., was kosten 3 Loth?

6c) Ein Bote geht von A nach B und braucht dazu 8 Tage, wenn er täglich 7 Stunden zurücklegt; wie viel Stunden muß er täglich zurücklegen, wenn er schon nach 5 Tagen in B sein will?

6d) Um ein Grundstück mit Bäumen zu besetzen, braucht man 2580 solcher, wenn sie 10 Fuß von einander entfernt zu stehen kommen; wie viel Bäume sind zur Besetzung erforderlich, wenn dieselben 15 Fuß von einander gestellt werden?

7) Zu einer bestimmten Arbeit brauchen 15 Arbeiter 24 Tage, wie lange brauchen hiezu 18 Arbeiter?

8) Ein Weber macht aus 50 Pfd. Garn 120 Ellen Tuch, wie viel vermag er von diesem Tuche aus 75 Pfd. zu fertigen?

9) In welcher Zeit trägt ein Capital von 4957½ fl. zu 5% 825¼ fl. Zins?

10) Welches Kapital trägt in 6 Jahren ebenso viel Zins, als 3460 fl. in 10 Jahren bei gleichem Zinsfuße?

10a) Ein Kapital trägt zu 4½% in 5 Jahren 6 Monaten einen gewissen Zins; zu wie viel Procent muß dasselbe Kapital ausgeliehen werden, um den gleichen Zins schon in 3 Jahren 9 Monaten zu tragen?

10b) 25 Arbeiter brauchen, um eine gewisse Arbeit fertig zu bringen, 48 Tage; wie viel Arbeiter müssen angestellt werden, wenn diese Arbeit schon in 30 Tagen vollendet werden soll?

10c) Eine Waare kostet im Einkaufe 225 fl.; wie theuer muß dieselbe verkauft werden, wenn 10% dabei gewonnen werden sollen?

10d) Eine Waare wurde mit 12½% Gewinn um 725 fl. verkauft; wie hoch belief sich der Einkaufspreis?

10e) Es kaufte Jemand mehre tausend Stück Cigarren um 301 fl. und ist genöthigt, dieselben zu 215 fl. wieder zu verkaufen; wie viel Procent wurden bei diesem Handel verloren?

10f) Ein Kaufmann bezog 3½ Centner einer Waare um 291 fl. 40 kr.; wie theuer muß er das Pfund verkaufen, um 20% zu gewinnen?

10g) Welchen Zins tragen 3425 fl. zu 4½% in 3 Jahren 8 Monaten?

10h) Wie lange müssen 860 fl. zu 5% ausgeliehen werden, um 118 fl. 15 kr. Zins zu tragen?

10i) Zu wie viel % müssen 1250 fl. ausgeliehen werden, damit sie in 7 Jahren 437½ fl. Zins tragen?

10k) Ein Kapital stand zu 4½% und trug in einer gewissen Zeit 72 fl. Zins. Zu wie viel % muß dasselbe ausgeliehen werden, um in der gleichen Zeit 100 fl. Zins zu tragen?

11) Zu einem Kleide braucht man von ¾ breitem Zeuge 15 Ellen, wie viel braucht man, wenn der Zeug $\frac{9}{4}$ Ellen breit ist?

12) Zur Ausgrabung eines Kanals brauchen 25 Mann, welche täglich 9 Stunden arbeiten, 48 Tage, wie lange brauchen 30 Mann zu derselben Arbeit, wenn sie täglich nur 8 Stunden arbeiten?

13) Um eine Mauer von 436 Fuß Länge, 8 Fuß Höhe und $1\frac{3}{4}$ Fuß Dicke aufzuführen, müssen 12 Arbeiter 3 Wochen lang, wöchentlich 5 Tage, täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Maurer sind nöthig um eine Mauer von 654 Fuß Länge, 7 Fuß Höhe und 2 Fuß Dicke aufzuführen, wenn sie in 4 Wochen bei wöchentlich 6tägiger und täglich 9stündiger Arbeit damit fertig werden sollen?

13a) Es kauft Jemand 245 Pfd. einer Waare, das Pfund zu 36 Kreuzer und verkauft die Hälfte derselben mit 8%, die andere Hälfte mit 15% Gewinn; wie viel wurde im Ganzen gewonnen?

13b) Ein Fruchthändler hat einen Vorrath an Getreide. Er verkauft $\frac{3}{8}$ davon um 5468 fl. 45 kr. und gewinnt dadurch $16\frac{2}{3}$%. Bald nachher verkauft er den Rest von 625 Malter zu dem Einkaufspreise; wie hatte derselbe das Sester eingekauft?

13c) Ein Kaufmann hatte eine Parthie Zucker eingekauft und diesen wieder mit Vortheil verkauft, indem er $\frac{1}{4}$ des Vorrathes mit 10%, $\frac{1}{3}$ mit 12%, $\frac{1}{8}$ mit 16% und den Rest von 350 Pfd. mit 15% Gewinn zu 268 fl. 20 kr. absetzte. Wie hoch stand der Centner im Einkaufe und wie viel Procent hatte der Kaufmann im Allgemeinen bei diesem Unternehmen gewonnen?

14) Wie viel Kreuzer kostet ein Quentchen Seide, wenn ein Gramm in Paris 8 Centimes kostet?

(2 Pfd. = 1 Kilogr., 1 Kilogr. = 1000 Gramm.)

15) Was kosten $5\frac{3}{4}$ Centner à 110 Pfund in Leipzig, wenn ein russisches Pud $3\frac{5}{8}$ Rubel kostet?

(1 Rubel = 32 Gr., 30 Gr. = 1 Thlr., 1 Pud = 35 sächs. Pfd.)

16) Wie viel Bogen Schreibpapier erhält man für 10 Centimes, wenn der Ballen in Berlin 32 Thlr. kostet?

(1 Fr. = 28 Kr., 7 Fl. = 4 Thlr.)

16a) Wie viel Kreuzer kostet 1 Quentchen, wenn 21 Centner à 100 Pfund 9600 Francs kosten?

16b) Ein Kaufmann bezieht 20 Stücke Seidenzeug, das Stück zu 25 Stab und bezahlt den Stab mit $12\frac{3}{4}$ Francs. Wie viel Thaler in Leipzig kostet diese Waare, wenn der Cours von Hamburg auf Paris $191\frac{7}{8}$ und von Hamburg auf Leipzig $150\frac{3}{8}$ steht und außerdem $7\frac{1}{2}$% Spesen in Rechnung gebracht werden?
(100 Mk. Banco = $191\frac{7}{8}$ Francs; 300 Mk. Bco. = $150\frac{3}{8}$ Thlr.)

16c) Ein Berliner Kaufmann bezieht aus Amsterdam für 120 fl. $14\frac{4}{5}$ Kilogr. einer Waare. Was kostet das Pfund in Berlin, wenn der Cours von Amsterdam auf Berlin $151\frac{3}{8}$ steht und $6\frac{3}{4}$ % Spesen und $1\frac{3}{8}$ % Rabatt berechnet werden? (100 Kilogr. = 214 Berliner Pfund, 250 fl. = $151\frac{3}{8}$ Thlr.)

16d) Ein Hamburger Kaufmann bezieht Waare aus England im Gewichte von 80 Centner Brutto. Der Centner netto kostet beim Einkaufe 30 Schilling 6 Pence. Was kostet diese Waare in Hamburger Banco-Mark, wenn 1 Pfund Sterling = $13\frac{1}{2}$ Mark. Die Tara nebst Gutgewicht betrug 12 %, die Verladungskosten in England $1\frac{7}{8}$ %, die Einkaufsprovision $1\frac{1}{2}$ % und der Transport bis Hamburg $3\frac{3}{4}$ %?

16e) Das Verhältniß des baierischen Fußes zum badischen so genau als möglich in dreiziffrigen Zahlen aus folgenden Beziehungen zu bestimmen:

68 bad. Fuß = 65 preuß. Fuß,
345 preuß. " = 371 baierisch. "

16f) 89,284 Wiener Pfund geben 110,231 englische Pfund; 100 englische Pfund sind 80,998 baierische Pfund und 100 bair. Pfund 112 deutsche Zollpfund. Wie läßt sich hiernach das Verhältniß des Wiener Pfundes zum deutschen Zollpfunde in den kleinsten vierziffrigen Zahlen ausdrücken?

Achter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

§. 150. Von den Gleichungen im Allgemeinen.

1) Wie aus Früherem (§. 1, 8) bekannt ist, entsteht eine Gleichung durch die Gleichsetzung zweier gleichwerthigen Ausdrücke, welche selbst die Seiten der Gleichung heißen und durch die einzelnen, durch + und — miteinander verbundenen Glieder gebildet werden.

2) Stimmen die beiden Seiten einer Gleichung vollkommen mit einander überein, so nennt man dieselbe eine identische; analytisch dagegen, wenn die eine Seite eine unmittelbare Folge der anderen ist.

So ist z. B.

$$a - 2b + c = a - 2b + c$$

eine identische, und

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

eine analytische Gleichung.

Anmerkung. Führt man die in einer analyt. Gleichung angedeutete Operation aus, so erhält man eine identische Gleichung. Man nennt aus diesem Grunde auch alle analytischen Gleichungen identische.

3) Ersieht man die Gleichheit der zwei Seiten nicht unmittelbar, sondern ergibt sich diese erst durch die Bestimmung einer oder mehrer in der Gleichung vorkommenden unbekannten Zahlen, so wird dieselbe eine algebraische Gleichung genannt.

So ist z. B.

$$8x + 3 = 12x - 5$$

eine algebraische Gleichung, weil die Gleichheit beider Seiten erst erkannt wird, wenn wir für x die Zahl 2 bestimmt und dafür eingeführt haben.

4) Die Bestimmung der Werthe der Unbekannten oder der sogenannten Wurzeln einer algebraischen Gleichung geschieht

durch die **Auflösung** derselben und derjenige Theil der allgemeinen Arithmetik, welcher sich mit der Auflösung algebraischer Gleichungen beschäftigt, heißt insbesondere auch **Algebra**.

5) Die unbekannten Zahlen werden gewöhnlich durch die **letzten**, die als bekannt zu betrachtenden dagegen durch die **Anfangsbuchstaben** des Alphabets bezeichnet.

6) Je nachdem der höchste Exponent der unbekannten Zahl einer Gleichung 1, 2, 3, . . . n heißt, unterscheidet man Gleichungen des **ersten, zweiten, dritten, ... nten Grades**. Die Gleichungen des zweiten Grades nennt man auch **quadratische**, die des dritten **kubische** und die des vierten Grades **biquadratische** Gleichungen. Im Allgemeinen heißt jede Gleichung von einem höheren als vom zweiten Grade, eine **höhere** Gleichung.

Hiernach wäre also

$$ax + b = cx - d$$

eine Gleichung des ersten Grades,

$$ax^2 - bx = cx + d$$

eine quadratische

und

$$ax^3 + bx^2 - d = cx + f$$

eine kubische Gleichung u. s. w.

7) Eine Gleichung heißt ferner **rational**, wenn die Unbekannte nirgends als Wurzelausdruck oder mit gebrochenem Exponenten erscheint, im anderen Falle wird sie **irrational** genannt.

So sind z. B. alle obigen Gleichungen rationale, dagegen ist

$$\sqrt{bx - c} = d + fx$$

eine irrationale Gleichung.

8) Sind sowohl die Coefficienten der Unbekannten, als auch alle übrigen Glieder einer Gleichung reine Zahlen, so heißt dieselbe eine **numerische** oder **Zahlengleichung**.

9) Von einer Gleichung, bei welcher alle Glieder auf einer und derselben Seite stehen, sagt man, sie sei **auf Null gebracht** (reducirt); folgen hierbei die Glieder nach fallenden Exponenten der Unbekannten auf einander, so ist die Gleichung eine **geordnete vollständige**; fehlen aber einzelne Potenzen der Unbekannten, eine **geordnete unvollständige**.

So ist z. B.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

eine geordnete vollständige Gleichung des vierten, dagegen

$$ax^5 - bx^3 + cx - d = 0$$

eine geordnete unvollständige Gleichung des fünften Grades.

10) Wenn in einer Gleichung die Unbekannte nur in einerlei Potenz vorkommt, so heißt sie eine reine, in jedem anderen Falle eine gemischte oder unreine Gleichung.

So sind also $x^3 = a$

$$ax^3 - b + cx^3 = d - ex^3$$

reine kubische Gleichungen.

11) Nach dem Begriffe einer Gleichung müssen alle Sätze, welche wir früher aus den arithmetischen Operationen an zwei Gleichheiten entwickelt haben, auch für die zwei Seiten einer Gleichung giltig sein. Es sind somit unmittelbar folgende Behauptungen gerechtfertigt:

Eine Gleichung bleibt unverändert, wenn man beide Seiten

a) um eine und dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert,
b) mit einer und derselben Zahl multiplicirt,
c) durch eine und dieselbe Zahl dividirt,
d) auf einerlei Potenz erhebt,
e) durch eine und dieselbe Zahl radicirt,
f) in Bezug auf einerlei Basis logarithmirt.

§. 151. Sätze zur Umformung der Gleichungen.

Auf die unter 11 im vorhergehenden Paragraphen aufgeführten Sätze gründen sich nun folgende, für die Auflösung der Gleichungen wichtige Umformungen:

1) Man kann jedes Glied einer Gleichung von der einen Seite auf die andere versetzen, wenn man dessen Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt.

Denn denkt man sich das auf einer Seite zu entfernende Glied mit dem entgegengesetzten Zeichen auf beiden Seiten addirt, so verschwindet es offenbar auf der einen, während es auf der anderen Seite mit eben diesem veränderten Zeichen als Glied auftritt.

Beispiel.

Um jedes der bekannten Glieder der Gleichung

$$ax + b = cx - d$$

auf die andere Seite zu bringen, darf man nur auf beiden Seiten $-b + d$ addiren; man erhält alsdann

$$ax + d = cx - b.$$

Hiernach ist es auch klar wie man eine Gleichung ordnet und auf Null reducirt.

Beispiel.

Wird die Gleichung

$$cx^2 - dx = e - x^5 - bx^3 + ax^4$$

auf Null reducirt und geordnet, so folgt:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 + cx^2 - dx - e = 0.$$

2) Sind mehre Gleichungen gegeben, so kann man die Summe aller linken Seiten gleich der Summe aller rechten Seiten setzen.

Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus §. 150, 11, a.

3) Sämmtliche Zeichen einer Gleichung können in die entgegengesetzten verwandelt werden.

Denn man kann sich entweder alle Glieder einer jeden Seite auf die andere gebracht, oder auch die ganze Gleichung mit — 1 multiplicirt denken.

4) Die in einer Gleichung etwa vorkommenden Brüche können dadurch beseitigt werden, daß man die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner dieser Brüche multiplicirt.

Beispiel.

Es sei

$$\frac{ax}{b} + c = \frac{dx}{f} - g$$

die von den Brüchen zu befreiende Gleichung.

Multiplicirt man diese Gleichung mit bf, so folgt

$$\frac{abfx}{b} + bcf = \frac{bdfx}{f} - bfg,$$

oder

$$afx + bcf = bdx - bfg.$$

Anmerkung. Wie man sogleich erkennt, befreit man am schnellsten die gebrochenen Glieder von ihren Nennern, wenn man mit diesen in den Hauptnenner dividirt und den Quotienten mit dem Zähler des betreffenden Gliedes multiplicirt. So hat man z. B. für die Brüche in der Gleichung

$$\frac{4x}{5} - \frac{7}{8} = \frac{3 + 2x}{4} - 6$$

den Hauptnenner 40, also statt derselben auch die neue Gleichung

$$8 \,.\, 4x - 5 \,.\, 7 = 10\,(3 + 2x) - 40 \,.\, 6$$

oder

$$32x - 35 = 30 + 20x - 240.$$

5) Jedes Glied kann von seinem Coefficienten befreit werden, wenn man die ganze Gleichung durch denselben dividirt.

Beispiel.

Um in der Gleichung

$$12x^3 - 4x^2 + 8x = 3$$

auf die angegebene Weise das Glied $12x^3$ von seinem Coefficienten 12 zu befreien, hat man

$$x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{1}{4}.$$

6) Wenn beide Seiten einer Gleichung einen gemeinschaftlichen von der Unbekannten unabhängigen Faktor haben, so kann man diesen außer Acht lassen.

Denn dividirt man die ganze Gleichung durch diesen Faktor, so fällt er heraus.

Beispiel.

Ist die Gleichung

$$a^2x^2 - a^2bx = a^2cx + a^2d$$

gegeben und man schreibt dafür

$$a^2(x^2 - bx) = a^2(cx + d),$$

so folgt, wenn man beiderseits durch a^2 dividirt:

$$x^2 - bx = cx + d.$$

7) Steht die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen, so wird dieses dadurch beseitigt, daß man beide Seiten der Gleichung zum Wurzelexponenten potenzirt (§. 150, 11, d).

Beispiel.

Ist

$$a\sqrt{(b - x)} = c$$

die vorgelegte Gleichung und man erhebt beide Seiten zum Quadrat, so folgt:

$$a^2(b - x) = c^2.$$

8) Tritt die Unbekannte als Potenzexponent auf, und sind die einzelnen Potenzen nur durch Multiplication oder Division mit einander verbunden, so wird die Gleichung in eine andere von der gewöhnlichen Form verwandelt, wenn man beide Seiten nach einerlei Basis logarithmirt.

Beispiel.

Es sei

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{c}{d}\right)^{2x-1} = m$$

die vorgelegte Gleichung. Logarithmirt man beiderseits, so verwandelt sich dieselbe in

$$x \log\left(\frac{a}{b}\right) + (2x - 1) \log\left(\frac{c}{d}\right) = \log m,$$

oder $x (\log a - \log b) + (2x - 1) (\log c - \log d) = \log m.$

A. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades.

a) Mit einer Unbekannten.

§. 152. Erklärung.

1) Um eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, forme man dieselbe zunächst so um, daß sie keine Brüche enthält und die Unbekannte nicht unter einem Wurzelzeichen, oder als Exponent erscheint, bringe alsdann alle mit der Unbekannten verbundenen Glieder auf die eine, alle übrigen aber auf die andere Seite; so erhält man schließlich eine Gleichung von der Form

$$Ax = B,$$

woraus endlich durch Division mit dem Coefficienten A erhalten wird:

$$x = \frac{B}{A}.$$

Als nähere Erläuterung des angedeuteten Verfahrens folgt nun nachstehend die Auflösung einiger

Beispiele.

1) Es sei

$$24x + 13\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}x = 4\frac{2}{5}x + 82\frac{17}{30},$$

so folgt durch Einrichten der Brüche:

$$24x + \frac{27}{2} - \frac{7x}{3} = \frac{22}{5}x + \frac{2477}{30}$$

und durch Multiplication mit dem Hauptnenner 30:

$$720x + 405 - 70x = 132x + 2477$$

und wenn man die mit x verbundenen Glieder auf die eine, die übrigen auf die andere Seite bringt:

$$720x - 70x - 132x = 2477 - 405,$$

oder

$$518x = 2072$$

und endlich hieraus

$$x = \frac{2072}{518} = 4.$$

Anmerkung. Um die Auflösung zu prüfen, führe man den für x gefundenen Werth in die ursprüngliche Gleichung ein; gelangt man dadurch zu einer identischen Gleichung, so ist im Verlaufe der Rechnung kein Fehler gemacht worden. In obiger Gleichung erhält man z. B. durch Einführung des Werthes 4 statt x:

$$24 \cdot 4 + \frac{27}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} = \frac{22 \cdot 4}{5} + \frac{2477}{30}$$

oder

$$96 + \frac{27}{2} - \frac{28}{3} = \frac{88}{5} + \frac{2477}{30}$$

oder

$$\frac{2880}{30} + \frac{405}{30} - \frac{280}{30} = \frac{528}{30} + \frac{2477}{30}$$

d. i.

$$\frac{3005}{30} = \frac{3005}{30}.$$

2) Es sei

$$ax - \frac{b + cx}{m} + \frac{d}{n} = bx - \frac{cx - d}{n}$$

die vorgelegte Gleichung. Der Hauptnenner ist mn, also erhält man zunächst

$$amnx - (b + cx)\,n + dm = bmnx - (cx - d)\,m$$

und hieraus

$$amnx - bn - cnx + dm = bmnx - cmx + dm$$

oder $amnx - cnx - bmnx + cmx = dm - dm + bn$

oder $(amn - bmn - cn + cm)\,x = bn$

folglich ist $x = \dfrac{bn}{amn - bmn + cm - cn} = \dfrac{bn}{(a - b)\,mn + (m - n)\,c}.$

3) Es sei $4\sqrt{(9x^2 - 11)} + 4 = 12x.$

Man bringe zuerst die Wurzelgröße allein auf eine Seite, so folgt:

$$4\sqrt{(9x^2 - 11)} = 12x - 4.$$

Um nun das Wurzelzeichen zum Verschwinden zu bringen, erhebe man beide Seiten zum Quadrat. Man erhält alsdann

$$16\,(9x^2 - 11) = (12x - 4)^2,$$

oder

$$144x^2 - 176 = 144x^2 - 96x + 16$$

oder

$$96x = 176 + 16 = 192$$

folglich

$$x = \frac{192}{96} = 2.$$

4) Es sei gegeben

$$3\sqrt{(4x - 5)} = \sqrt[4]{(1296x^2 - 240x - 2475)}.$$

Erhebt man beide Seiten zur vierten Potenz, so erhält man

$$81\,(4x - 5)^2 = 1296x^2 - 240x - 2475$$

oder $81\,(16x^2 - 40x + 25) = 1296x^2 - 240x - 2475$

$$1296x^2 - 3240x + 2025 = 1296x^2 - 240x - 2475$$

$$- 3240x + 240x = - 2025 - 2475$$

$$- 3000x = - 4500,$$

also ist $x = \frac{4500}{3000} = 1\tfrac{1}{2}.$

5) Es sei

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \frac{50}{243}.$$

Logarithmirt man beiderseits, so folgt:

$$x\,(\log 5 - \log 6) + (x + 1)(\log 2 - \log 3) = \log 50 - \log 243$$

$$x\,(\log 5 - \log 6 + \log 2 - \log 3) = \log 50 - \log 243 - \log 2 + \log 3$$

also $x = \frac{\log 50 - \log 243 - \log 2 + \log 3}{\log 5 - \log 6 + \log 2 - \log 3}$

$$= \frac{1{,}6989700 - 2{,}3856063 - 0{,}3010300 + 0{,}4771213}{0{,}6989700 - 0{,}7781513 + 0{,}3010300 - 0{,}4771213}$$

$$= \frac{-\,0{,}5105450}{-\,0{,}2552726} = 2.$$

§. 153. Aufgaben zur Uebung.

1) $8x - 15 = 5x - 6.$

1a) $3x - 12 + 15x + 8 = 4x + 66.$

1b) $2x + \frac{x}{3} = 14.$

1c) $\frac{28}{x} = 7.$

1d) $\frac{15}{x} - 3 = 2.$

1e) $\frac{24}{x} + 8 = 7 + \frac{30}{x}.$

1f) $7{,}243x - 3{,}825 = 5{,}76x - 2{,}342.$

1g) $2\tfrac{3}{4} - 5x = \frac{3x}{2} - 10\tfrac{1}{4}.$

1h) $7\,(18 - 5x) = 266.$

1i) $16 + 3\,(15 - 8x) = 12x + 97.$

1k) $48 - 9\left(\frac{15}{x} - 2\right) = \frac{3}{x} + 20.$

2) $2x - 7(3x - 10) = 36x + 2(8x - 675)$.

3) $\frac{4x}{5} + 12 - \frac{3x}{2} = 2x - 15$.

4) $2\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{4}{5} = 7\tfrac{5}{8}x - 57{,}7$.

5) $2{,}4x + 3\tfrac{7}{8} - 5\tfrac{4}{5}x = 7{,}52x + \tfrac{7}{12}$.

6) $4\tfrac{7}{8}x + 0{,}5 = 10{,}75x - 23$.

7) $\frac{2y - 3}{4} - \frac{8 + 5y}{3} = 12 - \frac{6y - 3}{2}$.

8) $\frac{3z + 2}{8} - \frac{z}{10} - 2\tfrac{1}{4}z - 5 = \frac{z}{6} - 8 + \frac{14 - 5z}{30}$.

9) $(8 + 2x)(4x - 3) = (x + 8)(8x - 18)$.

10) $\frac{7x - 5}{13} - 8x + (3 + x)(11 - x) = 116 - x^2 - \frac{24x - 10}{5} - \frac{5x + 14}{2}$.

11) $\frac{8}{y - 1} + \frac{5y - 3}{4} + 5 = \frac{10y^2}{8(y - 1)} + \frac{3}{8}$.

11a) $2\tfrac{3}{4}x - 3(x + 2) - 4[5x + 3 - 2(3\tfrac{1}{2}x - 4)] = 6x - (2 - 3x) - 53$.

12) $6{,}847x - 7\tfrac{5}{8} + \frac{3x - 7{,}2}{5} = 2\tfrac{3}{4}x + \frac{0{,}056x - 4{,}32}{6}$.

12a) $\frac{15}{7 - x} - 3(2 + x) = -3x - 3$.

12b) $\frac{3 + 24x^2 - 8x^3}{4x^2 - 25} - \frac{7x - 4}{2x + 5} - 2 - \frac{3 - 11x}{2x - 5} = -2(x - 3)$.

13) $\frac{3 - 4x}{x + 2} = \frac{12 - 6x}{x - 2} - 10 + \frac{12x^2 - 6}{x^2 - 4}$.

14) $\frac{3{,}16x + 4{,}25}{2{,}8} - 4{,}5 = \frac{8{,}24 - 0{,}4x}{2{,}5}$.

15) $\sqrt{(4x^2 - 1)} = 3 - 2x$.

16) $7 - 5\sqrt{\left(x^2 + \frac{61}{49}\right)} = 5x - \frac{256}{7}$.

16a) $\sqrt{a + x\sqrt{x^2 - 2a + \frac{1}{x}}} = x$.

16b) $\sqrt{(4x + 1)(9x - 5)} = 6x - 1$.

17) $3\sqrt[4]{(12z - 8)} = 2\sqrt[4]{(16z + 49)}$.

18) $(a - x)(x - b) = 3ax - 5ab - x^2.$

19) $(a - x)^2 - (a + x)^2 = 4a^2.$

20) $\frac{mx}{n} + \frac{nx}{p} = m + n.$

21) $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{c} + \frac{cx}{d} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} - \frac{c}{d}.$

22) $\frac{a - b}{a + b}x + \frac{a + b}{a - b}x = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$

23) $\frac{5a - 7y}{4} - \frac{8y - b}{3} = 6y - \frac{5y - c}{2} - \frac{3y - a + b}{6}.$

23a) $\frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} - d.$

24) $\frac{3a + z}{z} - 4b + \frac{z - a}{z} = 0.$

24a) $\frac{a - x}{a + x} - \frac{a + x}{a - x} = \frac{8a^2}{x^2 - a^2}.$

24b) $25x^2 - 7\frac{3}{4}x = 4x\,(3\frac{1}{2}x - 5) + \frac{401}{32}x^2.$

24c) $16x^8 - 24x^7 = 32x^8 - 72x^7.$

25) $\frac{ax^3}{b + cx} = \frac{dx^3}{a + bx}.$

25a) $ab^x = c.$

25b) $(ab)^x = c.$

25c) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c.$

25d) $a^{x+m} = b^{x+n}.$

25e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{px-q} = \left(\frac{c}{d}\right)^{rx-s}.$

25f) $a^{(b^x)} = c.$

25g) $5^{(2^x)} = 625.$

25h) $75^{(2^x)} = 31640625.$

25i) $a^{\frac{m+x}{n-x}} = b.$

26) $a^x b^{2x} = c.$

27) $a^{mx-n}\, b^{px+q} = c^{x-r}\, d^{nx-s}.$

28) $2{,}4^x = 13{,}824.$

29) $\left(\frac{5}{6}\right)^x \left(\frac{3}{8}\right)^{x+4} = 64{,}5.$

30) $\left(\frac{27}{32}\right)^{x+5}\left(\frac{11}{24}\right)^{5x-3}=\left(\frac{7}{15}\right)^{2x}$.

31) $\left(\frac{24^{x-5}}{31^{3x-2}}\right)\left(\frac{7^{3-x}}{8^{5x-4}}\right)=12$.

32) $\sqrt[2x]{83521}=17$.

32a) $\sqrt[2x]{7529536}=14$.

32b) $\sqrt[3x-6]{531441}=9$.

32c) $\frac{\sqrt[2x+1]{371293}}{\sqrt[3x-2]{130321}}=\frac{13}{19}$.

32d) $19\sqrt[4x-7]{7962624}=24\sqrt[3x-4]{2476099}$.

§. 154. Anwendung der Gleichungen zur Lösung von Textaufgaben.

Mittelst der Gleichungen lassen sich nicht allein manche Aufgaben aus dem praktischen Rechnen auf viel kürzere Weise lösen, als nach den gewöhnlichen Regeln, sondern dieselben leisten in allen Zweigen der reinen und angewandten Mathematik die wichtigsten Dienste.

Um eine vorgelegte Aufgabe mit Hilfe der Gleichungen zu lösen, hat man vor allen Dingen zu untersuchen, ob dieselbe nur eine oder mehre unbekannte Größen enthält. Hat man sich überzeugt, daß nur eine Unbekannte darin enthalten ist, so bezeichnet man diese durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets, also z. B. durch x und sucht aus den gegebenen Bedingungen zwei, dem Werthe nach gleiche, Ausdrücke zu bilden. Setzt man nun diese einander gleich, so erhält man eine Gleichung, aus welcher leicht die in Frage stehende Größe gefunden werden kann.

Man ersieht hieraus, daß die Bildung der Bestimmungsgleichung lediglich von der vorgelegten Aufgabe abhängig ist und man für deren Aufstellung also keine bestimmten Regeln angeben kann. Richtige Auffassung und Uebung sind die geeignetsten Mittel zur Erlernung des in Rede stehenden Gegenstandes.

Zur näheren Erläuterung schreiten wir darum sogleich zur ausführlichen Auflösung einiger

Beispiele.

1) Man soll die Zahl 1120 so in zwei Theile theilen, daß der eine Theil $2\frac{1}{2}$mal so groß ist als der andere.

Auflösung.

Bezeichnen wir den kleineren Theil durch x, so ist der größere $2\frac{1}{2}x$ und da nun beide Theile zusammen die ganze Zahl 1120 ausmachen sollen, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$x + 2\tfrac{1}{2}\,x = 1120,$$

oder

$$2x + 5\,x = 2240$$

und hieraus

$$x = \frac{2240}{7} = 320.$$

Der kleinere Theil ist demnach 320, somit der größere $2\frac{1}{2}\,.\,320 = \frac{5\,.\,320}{2} = 800.$

2) Das $4\frac{1}{3}$fache einer Zahl übertrifft diese Zahl um 1000, wie heißt dieselbe?

Auflösung.

Bezeichnet x diese Zahl, so ist das $4\frac{1}{3}$fache derselben $= 4\frac{1}{3}x$ oder $\frac{13}{3}x$, dieses Produkt soll aber die Zahl x selbst auch um 1000 übertreffen d. h. $x + 1000$ sein. Man erhält somit die Gleichung

$$\frac{13}{3}x = x + 1000$$

und hieraus

$$x = \frac{3000}{10} = 300$$

als die zu suchende Zahl.

3) Es hat Jemand den vierten und fünften Theil seines Geldes verspielt und behielt doch noch 275 fl. übrig; wie viel Geld hatte er anfänglich?

Auflösung.

Bezeichnen wir seine ursprüngliche Baarschaft durch x, so ist der vierte Theil derselben $= \frac{x}{4}$ und der fünfte Theil $= \frac{x}{5}$. Da nun beide Quotienten und 275 zusammen das mitgebrachte Geld oder x ausmachen sollen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 275 = x$$

und hieraus

$$x = 500 \text{ fl.}$$

4) Ein Vater hinterläßt seinen vier Söhnen A, B, C, D ein Vermögen von 6900 fl. Nach dem Testament soll B doppelt so viel erhalten als A weniger 1500 fl., C doppelt so viel als B und noch 200 fl. und D dreimal so viel als C und noch 600 fl. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung.

Bezeichnet man den Antheil des A durch x, so erhält man nach der Aufgabe

$$A = x$$
$$B = 2A - 1500 = 2x - 1500$$
$$C = 2B + 200 = 2(2x - 1500) + 200 = 4x - 2800$$
$$D = 3C + 600 = 3(4x - 2800) + 600 = 12x - 7800.$$

Zusammen erhalten sie also:

$$x + 2x - 1500 + 4x - 2800 + 12x - 7800$$

und da diese Summe dem Vermögen 6900 fl. gleich kommen muß, so erhält man die Gleichung

$$x + 2x - 1500 + 4x - 2800 + 12x - 7800 = 6900$$

oder $19x = 19000$

und hieraus $x = \frac{19000}{19} = 1000.$

Somit bekommt $A = 1000$ fl.

$B = 2 \cdot 1000 - 1500 = 500$ "

$C = 2 \cdot 500 + 200 = 1200$ "

$D = 3 \cdot 1200 + 600 = 4200$ "

5) Ein Kaufmann will eine bestimmte Summe Geldes zum Einkauf von Zucker verwenden. Kauft er $18\frac{1}{5}$ Ctr., so bleiben ihm 45 fl. übrig, bezieht er aber 21 Ctr., so fehlen ihm noch 25 fl. Welche Summe hatte er zum Einkauf bestimmt?

Auflösung.

Bezeichnen wir diese Summe durch x, so kosten $18\frac{1}{5}$ Centner $(x - 45)$ fl. und 21 Ctr. $(x + 25)$ fl., also ist der Werth eines Centners im ersten Falle $\frac{x - 45}{18\frac{1}{5}}$, im zweiten Falle $= \frac{x + 25}{21}$. Da aber in beiden Fällen der Centner gleichviel kostet, so erhält man als Bedingungsgleichung

$$\frac{x - 45}{18\frac{1}{5}} = \frac{x - 25}{21},$$

oder $21x - 945 = 18{,}2x + 455$

oder $2{,}8x = 1400$

folglich ist $x = \frac{1400}{2{,}8} = 500$ fl.

6) Ein Weinhändler hat zweierlei Sorten Wein, nämlich die Maas zu 18 Kr. und die Maas zu 28 Kr. Er will daraus durch

Mischung 4 Ohm à 100 Maas einer Sorte herstellen, von welcher die Maas 24 Kr. kostet; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung.

Bezeichnen wir die Anzahl der zu nehmenden Maase der geringeren Sorte durch x, so ist die der besseren = 400 — x und da nun jene 18x und diese 28 (400 — x) Kreuzer kosten, die ganze Mischung aber 400 . 24 Kr. werth sein soll, so erhalten wir die Gleichung

$$18x + 28\,(400 - x) = 400 \,.\, 24$$

oder $$-10x = -1600$$

und hieraus $$x = 160.$$

Er hat somit von der geringeren Sorte 160, also von der besseren 400 — 160 oder 240 Maas zu nehmen.

7) Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuleitungsröhren gefüllt werden. Durch die erste allein braucht man zur Füllung 5 Stunden, durch die zweite allein 6 Stunden und durch die dritte allein $7\frac{1}{2}$ Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn man die drei Röhren zugleich öffnet?

Auflösung.

Da die erste Röhre allein den ganzen Behälter in 5 Stunden füllt, so füllt sie in 1 Stunde nur $\frac{1}{5}$, also in den fraglichen x Stunden $\frac{x}{5}$ desselben. Ebenso füllt die zweite Röhre allein in x Stunden $\frac{x}{6}$ und die dritte allein $\frac{x}{7\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2x}{15}$. Zusammen fließt also in x Stunden aus den drei Röhren

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{2x}{15}.$$

Diese Wassermenge soll aber den ganzen Raum des Behälters erfüllen, folglich muß die Gleichung stattfinden

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{2x}{15} = 1.$$

woraus folgt $$x = 2 \text{ Stunden}.$$

8) 1200 fl. trugen in 11 Jahren ebenso viel Zins als 1600 fl., welche zu $1\frac{1}{2}$ % höher ausgeliehen waren, in 6 Jahren. Zu wie viel Procent waren beide Kapitalien ausgeliehen?

Auflösung.

Bezeichnen wir die Procente des ersten Kapitals durch x, so sind die des zweiten = $(x + 1\frac{1}{2})$ % und es ist somit der Zins von jenem $= \frac{11 \,.\, 1200x}{100}$ und von diesem $= \frac{6 \,.\, 1600\,(x + 1\frac{1}{2})}{100}$.

Da aber der Zins in beiden Fällen gleich sein soll, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{11 \,.\, 1200x}{100} = \frac{6 \,.\, 1600\,(x + 1\frac{1}{2})}{100},$$

oder
$$132x = 96x + 144$$

und hieraus
$$x = \frac{144}{36} = 4.$$

Das Kapital von 1200 fl. war somit zu 4% und das von 1600 fl. zu 4 + 1½ oder 5½% ausgeliehen.

§. 155. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Zahl 86 in zwei Theile zu theilen, von welchen der eine um 24 größer ist als der andere; wie heißen diese Theile?

2) A hat 300 fl. weniger als B, zusammen besitzen sie 1250 fl.; wie viel hat jeder?

3) Multiplicirt man eine Zahl mit 8, so erhält man 24 weniger als das Zehnfache jener Zahl; wie heißt die Zahl?

4) Man soll die Zahl 135 in zwei Theile zerlegen, so daß der eine 3½ mal so groß ist als der andere; wie heißen diese Theile?

5) Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe = 340 und deren Differenz = 92 ist.

6) Welche Zahl ist es, deren Hälfte, dritter, vierter und fünfter Theil zusammen 1078 ausmachen?

7) Die Zahl 540 in zwei Theile zu zerlegen, welche sich zu einander verhalten wie 7 zu 11; wie heißen diese Theile?

8) Das Vermögen des A verhält sich zu dem des B wie 4 : 7, zusammen besitzen sie 18700 fl., wie viel hat jeder?

9) Die Summe des 5ten und des 7ten Theils einer Zahl beträgt 36, wie heißt die Zahl?

10) Die Zahl 66 in zwei solche Theile zu theilen, daß wenn der eine durch 6, der andere durch 3 dividirt wird, die Summe der Quotienten 18 beträgt, wie heißen die Theile?

11) A hat 4mal so viel Geld als B, B aber 3mal so viel als C; zusammen haben sie 16000 fl.; wie viel hat jeder?

12) Man soll 6281½ fl. unter 3 Personen A, B, C so vertheilen, daß A doppelt so viel bekommt als B, der Antheil des B sich aber zu dem des C verhält wie 4 : 5; wie viel erhält jeder?

13) Es soll eine Summe so unter 3 Personen A, B, C vertheilt werden, daß A die Hälfte, B den dritten Theil und C den Rest mit 800 fl. erhält; wie viel bekommen A und B?

14) Ein Vater vertheilt 100 Nüsse unter seine 4 Söhne in der Weise, daß vom Jüngsten aufsteigend jeder folgende 4 Nüsse mehr als der zunächst jüngere erhält. Wie viel bekommt jeder?

15) Eine Summe von 27000 fl. so unter A, B, C, D zu vertheilen, daß sich der Antheil des A zu dem des B wie 2 : 3, der des B zu dem des C wie 2 : 5 und der des C zu dem des D wie 3 : 4 verhält; wie viel bekommt jeder?

15a) 5050 Morgen Wald sollen unter die fünf Gemeinden A, B, C, D, E so vertheilt werden, daß B 300 Morgen mehr erhält als A, sich der Antheil der Gemeinde B zu dem der Gemeinde C verhält wie 4 : 5, D 50 Morgen weniger bekommt als der doppelte Antheil von B beträgt und sich endlich der Antheil von C zu dem von E verhält wie 5 : 6. Wie viel erhält jede der Gemeinden?

16) A und B haben zusammen 224 Morgen Feld. Hätte A 20 Morgen mehr als er hat, so hätte er 4mal so viel als B; wie viel hat jeder?

17) Ein Lehrer wurde nach der Anzahl seiner Schüler gefragt. Er antwortete: „Wenn ich 7 zum dritten Theile der Anzahl addire, so erhalte ich 2 weniger als die Hälfte der wirklichen Anzahl.“ Wie viel Schüler waren es?

18) Wilhelm wurde gefragt, wie viel Geld er bei sich habe. Er antwortete: „Wenn man die Anzahl der Gulden um 6 vermehrt, die Summe durch 5 dividirt, vom Quotienten wieder 2 subtrahirt und den erhaltenen Rest mit 8 multiplicirt, so erhält man 2 Gulden mehr als die Summe des Geldes ausmacht.“ Wie viel Geld hatte er?

19) A kaufte sich für den dritten Theil seines Geldes Bücher, mit dem fünften Theile bezahlte er seine Wohnung, den achten Theil verschenkte er an Arme und behielt noch 82 fl. übrig; wie viel Geld hatte er?

20) Eine gewisse Zahl zu 54 addirt und davon subtrahirt liefert Resultate, welche sich verhalten wie 13 : 5; wie heißt die Zahl?

20a) Ein Gemeindewald von 1508 Morgen ist mit Buchen, Eichen und Kiefern bepflanzt und zwar beträgt die mit Buchen besetzte Fläche 200 Morgen weniger als $\frac{3}{8}$, die mit Eichen bepflanzte 40 Morgen mehr als $\frac{5}{9}$ der Fläche des Kiefernwaldes; wie viel Morgen von jeder Gattung enthält der Wald?

21) Jede der Zahlen 2, 26, 5, 35 muß um wie viel vergrößert werden, damit sie in dieser Reihenfolge die aufeinanderfolgenden Glieder einer geometrischen Proportion bilden?

22) Ein Kapitalist, welcher jährlich $1494\frac{1}{2}$ fl. Zinsen einnahm, hatte den vierten Theil seines Kapitals zu 4%, $\frac{2}{5}$ desselben zu $3\frac{3}{4}$ %, den dritten Theil zu $4\frac{1}{2}$% und den Rest zu 5% ausgeliehen; wie groß war sein Vermögen und wie groß jedes einzelne Kapital?

23) Eine Zahl zu suchen, die mit 11 multiplicirt ein Produkt gibt, das ebensoviel über 36 liegt, als die Zahl selbst unter 36; wie heißt die Zahl?

24) Ein Weinhändler hat $316\frac{2}{3}$ Ohm Wein, bestehend in zweierlei Sorten. Verkauft er von der ersten den dritten Theil und von der anderen den vierten Theil, so verhalten sich die Reste wie 4 : 5. Wie viel hatte er von jeder Sorte?

25) Man hat die zwei Zahlen 720 und 225. Wenn man nun zu gleicher Zeit jedesmal die erste um 4 vermindert, die zweite um 5 vergrößert, nach wie vielmaliger Wiederholung dieser Operation wird man in beiden Fällen gleiche Resultate erhalten?

26) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Kaffee. Von der ersten verkauft er 45 Pfd. mehr als von der zweiten, das Pfd. der ersten kostet 32, das der zweiten 36 kr. Wie viel hat er von jeder Sorte verkauft, wenn er im Ganzen 43 fl. 16 kr. gelöst hat?

27) Es hat Jemand eine Summe von 126 fl. in preußischen Thalern und Fünffrankenthalern, zusammen 64 Stück; wie viel Gulden von jeder Sorte hat er?

28) Eine Gemeinde kauft einen Wald und macht sich verbindlich in folgender Weise die Zahlung zu leisten: 3800 fl. nach 3 Jahren, 5500 fl. nach weiteren 4 Jahren, 2700 fl. nach 14 Jahren von jetzt an und 5 Jahre später den Rest mit 3196 fl. 52 kr. Der Verkäufer wünscht aber die ganze Summe auf einmal zu erhalten. Wann kann diese Auszahlung ge-

schehen, wenn keiner der beiden Theile Schaden leiden soll und 5procentige Zinsen in Anrechnung kommen?

29) Welches Kapital beträgt am Ende des zehnten Jahres mit seinem 5procentigen Zins 3600 fl.?

30) Vergrößert man eine Zahl um 4, dividirt die Summe durch 8, multiplicirt den Quotienten mit 5 und läßt die Null zur Rechten weg, so erhält man den zwölften Theil jener Zahl; wie heißt dieselbe?

31) Zwei Artilleristen A und B warfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. A hatte schon a Würfe gethan bis B anfing und machte c Würfe, während B d solcher machte, dagegen brauchte B zu e Würfen so viel Pulver, als A zu f Würfen. Wie viel Würfe mußte B machen, bis er so viel Pulver verbraucht hatte als A?

31a) Ein Hund verfolgt einen Hasen. Dieser hat 60 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 6 Sprünge, in welcher der Hund 5 macht; dagegen kommen 9 Hasensprünge an Größe 7 Hundesprüngen gleich. Wie viel Sprünge muß der Hund machen, bis er den Hasen eingeholt hat?

32) Ein Weinhändler verkauft 270 Maas Wein. Hätte er 10 fl. mehr eingenommen, so würde seine Einnahme gerade 100 fl. betragen haben. Wie theuer hat er die Maas verkauft?

33) Ein Kaufmann verkaufte eine Partie Kaffee um 120 fl. und verlor daran. Später verkaufte er von derselben Waare ebensoviel um 210 fl. und gewann dadurch doppelt so viel als er vorher verloren hatte. Wie hatte er dieselbe eingekauft?

34) Ein Wohlthäter vertheilt Geld unter eine Anzahl Arme. Gibt er jedem derselben $3\frac{1}{2}$ fl., so bleiben ihm 12 fl. übrig, gibt er aber jedem $4\frac{1}{2}$ fl., so fehlen ihm 12 fl.; wie viel Arme waren es und wie viel Geld vertheilte er unter dieselben?

35) Ein Weinhändler bestimmte eine gewisse Summe zum Einkaufe von Wein. Würde er 17 Ohm kaufen, so fehlten ihm noch 5 fl., nähme er aber nur 16 Ohm, so blieben ihm 20 fl. übrig. Welche Summe hatte er zur Ausgabe bestimmt?

36) Um eine bestimmte Arbeit fertig zu bringen, braucht A allein 24 Tage, B allein 20 Tage und C allein 30 Tage. Wie lange brauchen dieselben zur Vollendung dieser Arbeit, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten?

37) Ein Wasserbehälter kann durch 3 Röhren gefüllt werden und zwar durch die erste allein in $4\frac{1}{2}$ Stunden, durch die zweite allein in $5\frac{1}{4}$ Stunden und durch die dritte allein in $3\frac{3}{4}$ Stunden. In wie viel Stunden würde der Behälter gefüllt, wenn man die drei Röhren zugleich öffnet?

38) Durch 3 Röhren, aus welchen zu gleicher Zeit Wasser in einen Behälter fließt, wird dieser in $1\frac{3}{8}$ Stunden gefüllt. Durch die erste Röhre allein geschieht die Füllung in 6 Stunden, durch die zweite allein in 8 Stunden; in welcher Zeit wird er durch die dritte Röhre allein gefüllt?

39) Ein Kaufmann kauft eine Waare um 375 fl. und verkauft dieselbe wieder mit 10% Gewinn, indem er an jedem Pfunde $1\frac{1}{2}$ kr. Nutzen hat. Wie viel hat er von der Waare eingekauft und was hat ihn das Pfund beim Einkauf gekostet?

40) Eine Partie Zucker wog 12 Centner, davon wurde ein gewisser Theil verkauft und man behielt 5 Centner mehr übrig, als verkauft wurde; wie viel wurde verkauft?

41) A leiht dem B eine gewisse Summe zu $4\frac{1}{2}$%, dem C eine um 200 fl. größere Summe zu 5% und erhält von beiden zusammen jährlich 276 fl. Zins; wie viel hat A jedem geliehen?

41a) Es besitzt Jemand einen Wald und vertauscht von demselben den achten Theil gegen Wiesen, den fünften Theil gegen Weinberge, den vierten Theil gegen Feld, wodurch er in den Besitz von $905\frac{1}{2}$ Morgen Land gelangt. Wenn nun angenommen wird, daß 10 Morgen Wald denselben Werth haben wie 7 Morg. Wiesen, 3 Morgen Wiesen so viel werth sind als $1\frac{3}{4}$ Morgen Weinberge und 7 Morg. Weinberg soviel als 11 Morg. Feld; wie viel Morgen Wald hatte derselbe vor der Vertauschung?

42) Unter A, B, C wurde eine Summe von 400 fl. in der Weise vertheilt, daß B $\frac{2}{3}$ soviel als A und C den Rest erhielt. Nach der Vertheilung schenkt aber A jedem der beiden anderen von dem Seinigen die Hälfte dessen, was sie schon besitzen und darnach schenkt wieder B den beiden anderen von seinem Antheil den fünften Theil dessen, was sie schon haben. Schließlich zeigt sich, daß C 40 fl. weniger hat als A und B zusammen. Wie viel hatte jeder zu Anfang?

43) Ein Weinhändler wurde nach dem Inhalte dreier seiner Fässer befragt. Er gab hierauf zur Antwort: „Fülle ich das erste aus dem zweiten, so bleibt in diesem noch $\frac{1}{6}$ seines Inhaltes, fülle ich aber das zweite aus dem dritten, so bleibt in diesem noch $\frac{1}{5}$ seines Inhaltes zurück. Um aber das erste und dritte Faß aus dem zweiten zu füllen, müßte dieses 130 Maas mehr fassen; wie viel faßt jedes dieser drei Fässer?

44) A und B spielen Piquet. Bald gewinnt der eine, bald der andere. Als sie aufhörten, hatte B nur noch den dritten Theil so viel Geld als A. Wie viel hatte A gewonnen, wenn er ursprünglich $12\frac{1}{3}$ fl., B aber 21 fl. bei sich hatte?

45) Ein Gutsbesitzer zieht von seinen Besitzungen jährlich 4500 fl. Renten, indem ihm drei Viertel derselben 5 %, das andere Viertel $7\frac{1}{2}$ % tragen. Wie viel sind seine Güter werth?

45a) Ein Spieler verlor in drei nach einander folgenden Spielen fast all sein Geld, das er bei sich hatte. Im ersten Spiele verlor er nämlich die Hälfte seines Geldes und noch 1 Gulden; im zweiten wieder die Hälfte des noch übrigen und noch 2 Gulden und im dritten Spiele abermals die Hälfte des Restes und noch 3 Gulden. Schließlich hatte er noch den 25sten Theil seines mitgebrachten Geldes übrig. Wie viel Gulden hatte er zu Anfang?

46) Es vermacht Jemand seinen Freunden eine bestimmte Summe zu gleichen Theilen in der Weise, daß der Jüngste 300 fl. und den fünften Theil des Restes, der nächst ältere 600 fl. und wieder den fünften Theil des Restes, der ihm im Alter folgende 900 fl. und wieder den fünften Theil des Restes u. s. f. jeder folgende 300 fl. mehr als der nächstvorhergehende und den fünften Theil des Restes erhalte. Wie viel Freunde erbten und wie groß war die vermachte Summe?

47) In einer Gesellschaft, welche aus Herren und Frauen bestand, wurden 900 fl. der Art vertheilt, daß jede Frau 30 fl., jeder Herr 36 fl. erhielt. Wie viel von jedem Geschlechte befanden sich in der Gesellschaft, wenn diese aus 27 Personen bestand?

47a) Es vermacht Jemand sechs Personen A, B, C, D, E, F sein ganzes Vermögen, welches besteht:

1) in 20000 fl. in Staatspapieren,

2) in einem Schuldscheine über 6000 fl. nebst den zu fordernden $2\frac{1}{2}$ jährigen einfachen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ %,

3) in einer Forderung von 9324 fl. nach 3 Jahren oder baar mit 4 % Rabatt (auf Hundert) zahlbar,

in der Weise, daß sich verhalte:

Antheil des A : Antheil des B	=	35 : 9
„ „ D : „ „ C	=	$\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$
„ „ E : „ „ F	=	4,5 : 43
„ „ B : „ „ D	=	$1\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$
„ „ C : „ „ E	=	$\frac{1}{2}$: 0,3.

Vor der Eröffnung des Testamentes stirbt A. Wie viel erhält nun gegenwärtig jede der noch lebenden fünf Personen?

48) Ein Kapital K steht n Jahre zu p %, ein anderes K′ aber n′ Jahre lang zu p′ %; nach wie viel Jahren sind beide gleich viel werth?

49) A leiht dem B 3500 fl., dem C 4200 fl. zu einem um $\frac{3}{4}$ % höheren Zinsfuße. Wie viel % muß jeder geben, wenn A von beiden jährlich zusammen 320 fl. 15 kr. Zins einnahm?

50) Ein Kaufmann A hatte 540 Pfd. Zucker eingekauft, es bietet ihm aber B 6 Kreuzer Gewinn am Pfunde und zahlt ihm dafür 379 fl.; wie theuer hatte A den Zucker eingekauft?

51) Eine Zahl hat die Eigenschaft, daß der Quotient aus 49 durch die Differenz dieser Zahl und 4 gleich ist dem Quotienten aus $122\frac{1}{2}$ durch die Differenz von $14\frac{1}{2}$ und jener Zahl; wie heißt dieselbe?

51a) Ein Weinhändler hat zweierlei Sorten Wein. Von der einen Sorte kostet die Maas 54 Kreuzer, von der anderen aber nur 30 Kreuzer. Wie viel muß derselbe von jeder dieser Sorten nehmen, um durch Mischung beider 240 Maas Wein zu erhalten, deren jede 48 Kreuzer werth ist?

52) Ein Weinhändler will 200 Maas Wein, wovon jede 45 kr. kostet, mit einer geringeren Sorte, wovon jede Maas 30 kr. kostet, vermischen, um so einen Wein zu erhalten, von welchem die Maas 36 kr. kostet. Wie viel muß er von dieser geringeren Sorte zusetzen?

53) Wenn 4 Personen in 6 Monaten 900 fl. und bei demselben Verbrauche ein andermal 5 Personen in 12 Monaten 2100 fl.

sammt den betreffenden Zinsen verbrauchten; wie lange hätten auf diese Weise 9 Personen mit 4200 fl. gereicht?

54) Jemand hat nach einem Jahre eine bestimmte Summe zu bezahlen. Rechnet man p %, so hat er baar a fl. weniger zu entrichten, als wenn man p' % rechnet. Welches ist die Schuldsumme?

54a) Ein Kaufmann versichert eine Waarensendung im Werthe von 760 fl. und zahlt als Prämie 5 %. Um aber im Falle eines Unglücks auch die bezahlte Prämie vergütet zu bekommen, glaubt er den Werth der Waare um einen der wirklichen Prämie entsprechenden Betrag höher angeben zu müssen. Welche Prämie hat er in diesem Falle zu entrichten?

55) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Kaffee zu 30 kr. und 24 kr. das Pfund. Er will daraus 2 Centner mischen, von welchen das Pfd. 28 kr. kostet; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

56) Von einer gewissen Summe Geldes nimmt man den dritten Theil hinweg, legt darauf wieder 400 fl. hinzu, vermindert die neue Summe nochmals um ihren fünften Theil und fügt wiederum 80 fl. zum Rest. Nachdem man hiervon nochmals den vierten Theil hinweggenommen hatte, behielt man genau die Hälfte der ursprünglichen Summe. Wie groß war diese?

56a) Aus einem Betriebskapitale wurden beim Beginn des Unternehmens und zu Anfang eines jeden folgenden Jahres 1000 fl. gezogen. Günstige Geschäfte machten es jedoch möglich, dasselbe jährlich um den dritten Theil dessen, was je nach Abzug der 1000 fl. übrig geblieben war, zu vermehren. Wie groß war das anfängliche Betriebskapital, wenn sich dasselbe nach 3 Jahren verdoppelt hatte?

57) Es verkaufte Jemand eine bestimmte Anzahl Centner einer Waare; die gleiche Anzahl verkaufte er später um 784 fl. und gewann dabei 12 % mehr als beim ersten Verkaufe; wie hoch belief sich dieser?

58) Es hatte Jemand ein gewisses Kapital 6 Jahre lang zu $3\frac{1}{2}$ % und ein anderes um 1150 fl. kleineres 10 Jahre lang zu 4 % ausstehen und im Ganzen 4664 fl. Zins eingenommen; wie groß waren die beiden Kapitalien?

59) Die Krone des Königs Hiero von Syrakus, welche aus Gold und Silber bestand, wog 20 Pfd., unter Wasser dagegen nur 18,71 Pfd. Wenn man nun weiß, daß 1 Pfd. Gold in Wasser $\frac{1}{19}$ Pfd., 1 Pfd. Silber aber $\frac{1}{10}$ Pfd. an Gewicht verliert; aus wie viel Gold und Silber bestand alsdann die Krone?

60) Zu 4 Mark reinem Gold setzt man $1\frac{1}{2}$ Mark Kupfer, wie fein wird die Mischung?

61) Man hat 12 Mark feines Gold und will daraus 20karätiges machen, wie viel Kupfer muß zugesetzt werden?

62) Aus 15 Mark 12löthigem Silber kann man wie viel 10löthiges machen?

63) Man will 24 Mark 12löthiges Silber aus 14löth. und 9löth. herstellen, wie viel muß man von jeder Sorte nehmen?

64) Ein Zinngießer mischt A Pfd. a pfündiges, B Pfd. b pfündiges und C Pfd. c pfündiges Zinn*); wie viel pfündig wird die Mischung?

65) Wie viel Kupfer muß man zu 18 Mark 14 löth. Silber zusetzen, um dasselbe in 12 löth. zu verwandeln?

66) Wie viel a löth. Silber muß man zu b Mark c löth. Silber zusetzen, damit die Mischung d löthig werde?

67) Ein Goldarbeiter hat 15 löth. und 10 löth. Silber und will dieses so mischen, daß er 12 Mark 13 löth. Silber erhält; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

68) Man hat 8 Mark 14 löth. Silber, wie viel 8 löth. muß man zusetzen, wenn der Gehalt 12 löth. werden soll?

69) Ein Wasserbehälter faßt 1500 Kubikfuß und wird durch 2 Röhren gefüllt, wovon die eine in jeder Minute 6 Kubikfuß, die andere 4 Kubikfuß Wasser liefert. Wenn nun die erste später als die zweite geöffnet wird und der Behälter $1\frac{1}{2}$ Stunde nach dem Oeffnen der zweiten Röhre gefüllt ist; um wie viel wurde diese früher geöffnet als jene?

69a) Ein Körper bewegt sich geradlinig von A gegen B. Als er noch 6′ von B entfernt war, bewegte er sich wieder um den 8ten Theil des zurückgelegten Weges in entgegengesetzter

---

*) Unter p pfündigem Zinn versteht man eine Mischung, in welcher auf 1 Pfd. Blei (p — 1) Pfd. reines Zinn kommen.

$12 \cdot 13 = x \cdot 15 + (12 - x)\,10$

Richtung, darauf wieder um den 14ten Theil der nun von A entfernten Strecke gegen B, alsdann um den 8ten Theil des nun erlangten Abstandes von A wieder gegen A und erreichte endlich, nachdem er sich nochmals um den 7. Theil des nun erreichten Abstandes von A gegen B bewegt hatte, den Ort B. Wie weit sind die Orte A und B von einander entfernt?

70) A reist von O. nach P. und legt in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ Meile zurück, 8 Stunden später wird ihm B von demselben Orte aus nachgeschickt, welcher in 2 Stunden 5 Meilen macht. Wann wird A von B eingeholt, wenn beide Tag und Nacht unausgesetzt reisen?

71) Ein Courier ist vor a Tagen abgereist und macht täglich b Meilen. Ihm wird ein anderer nachgeschickt, der täglich b′ Meilen macht; wann holt er jenen ein?

72) A und B reisen um dieselbe Zeit beziehungsweise von P. nach O. und von O. nach P.; A macht täglich a, B aber b Stunden. Nach wie viel Tagen begegnen sie einander, wenn P. und O. s Stunden von einander entfernt sind?

73) Ein Körper bewegt sich von A gegen B mit einer Geschwindigkeit = c Fuß, a Sekunden später geht von A ein zweiter Körper mit einer Geschwindigkeit = c′ Fuß gegen B; wann holt dieser den ersten ein, wenn $c' > c$ ist?

74) A reiste von einem Orte ab und legt in 7 Stunden 12 Meilen zurück. 4 Stunden später wird ihm von einem um 10 Meilen vom Ziele entfernteren Orte aus auf demselben Wege B nachgeschickt, welcher in 5 Stunden 14 Meilen zurücklegt. Wann wird A von B eingeholt?

74a) Ein Courier und ein Fußgänger bewegen sich auf demselben Wege von P. nach O. Der Fußgänger legt in 2 Stunden $\frac{1}{2}$ Meile zurück, der Courier dagegen in 5 Stunden 6 Meilen. Als der Courier den Ort P. verließ, hatte der Fußgänger bereits $1\frac{1}{2}$ Meile zurückgelegt. Nachdem der Courier in O. angekommen war und sich daselbst 4 Stunden aufgehalten hatte, kehrte er wieder zurück, legte aber in 5 Stunden nur 3 Meilen zurück. Wenn nun der Fußgänger zu derselben Zeit in O. ankam, als der Courier wieder in P.; wie weit waren alsdann auf dem betreffenden Wege die beiden Orte P. und O. von einander entfernt?

75) Ein Körper A bewegt sich in einer Geraden mit einer Geschwindigkeit von 20 Fuß. 8 Sekunden später bewegt sich ein anderer Körper in derselben Geraden und in der nämlichen Richtung von einem um 50 Fuß rückwärts gelegenen Punkte aus mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß. Nach welcher Zeit wird B den Körper A einholen?

76) A reist von O. nach dem 48 Meilen entfernten Orte P. und legt in jeder Stunde 2 Meilen zurück. Um ihm auf demselben Wege von P. aus entgegen zu gehen, reist B zu gleicher Zeit in P. ab und macht in 2 Stunden 5 Meilen. Wann und wo begegnen sie einander?

77) Wenn aber B 9 Stunden später von P. abgeht als A, wann und wo begegnen sie dann einander?

77a) Des Morgens um 7 Uhr fuhr ein Eilwagen von dem Orte P. weg gegen O. und legte in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ Meile zurück. 25 Minuten nach 1 Uhr des Nachmittags verläßt ein Courier den Ort O. und reist auf demselben Wege gegen P. Beide kommen zur gleichen Stunde an dem Orte ihrer Bestimmung an. Wie weit ist P. von O. entfernt, wenn der Courier in 5 Stunden 12 Meilen zurücklegte?

78) In welchem Augenblicke stehen zwischen 6 und 7 Uhr Minuten- und Stundenzeiger genau übereinander?

79) Ein Wasserbehälter hat durch 2 Röhren Zufluß und durch eine Röhre Abfluß. Wenn nun der volle Behälter durch letztere in a Stunden entleert wird, die erstere aber ihn allein in b Stunden, die zweite in c Stunden füllt: nach wie viel Stunden wird der Behälter geleert sein, wenn er jetzt ganz gefüllt ist, und die drei Röhren zugleich geöffnet werden und $a > b + c$?

80) A Arbeiter brauchen zu einer Arbeit a Tage, nachdem sie aber a' Tage gearbeitet haben, kommen noch B Arbeiter hinzu. In wie viel Tagen werden die A und B Arbeiter zusammen fertig?

81) In einen Wasserbehälter münden 2 Zuflußröhren A und B und eine Abflußröhre C. Durch die Röhre A allein wird der Behälter in 12 Stunden, durch die Röhre B allein in 15 Stunden gefüllt; durch die Röhre C wird der volle Behälter in 4 Stunden entleert, wenn die Zuflußröhren verschlossen

sind. Oeffnet man die 3 Röhren zugleich, so befinden sich nach 3 Stunden 1540 Kubikfuß Wasser im Behälter; wie viel Kubikfuß faßt derselbe?

82) Ein Taglöhner erhielt als Arbeitslohn für 28 Tage 3 Malter Frucht und noch 4 fl., ein anderes Mal bei gleichem Taglohn für 36 Tage $2\frac{1}{2}$ Malter Frucht und 16 fl.; wie hoch wurde das Malter Frucht berechnet und wie viel verdiente sich der Mann täglich?

82a) Von zwei Arbeitern A und B fördert A in je 4 Stunden 100 Kubikfuß Erde 500 Fuß weit, B dagegen in 5 Stunden 75 Kubikfuß 1600 Fuß weit. Beide Arbeiter führten von derselben Stelle aus nach dem gleichen Orte Erde und obgleich B 2 Stunden nach A zu arbeiten begonnen hat, so hatte er nach 8 Stunden dennoch 536 Kubikfuß mehr gefördert als A. Wie weit wurde die Erde verbracht?

83) Ein Kaufmann möchte an einem bestimmten Kaffeevorrath 17 fl. 12 kr. gewinnen. Er fand, daß, wenn er das Pfund zu 24 kr. gibt, 20 fl. verloren, wenn er aber das Pfund zu 34 kr. gibt, 42 fl. gewonnen werden. Wie theuer muß er das Pfund verkaufen?

84) Ein Vater vertheilt Nüsse unter seine Kinder. Will er jedem derselben 10 Stück geben, so hat er 12 zu wenig, gibt er aber jedem 5 Stück, so hat er 18 übrig. Wie viel Kinder waren es und wie viel Nüsse erhielt jedes derselben?

85) Eine Zahl wird mit 2 Ziffern geschrieben. Die Ziffer der Einer beträgt das Vierfache der Ziffer der Zehner und wenn man die Ziffern der Stellung nach vertauscht, so erhält man eine Zahl, welche um 26 größer ist, als das Doppelte der zu suchenden Zahl. Wie heißt diese Zahl?

86) Die Zahlen a und b sind gegeben, man soll von beiden eine Zahl subtrahiren, so daß die Quadratwurzeln aus den Differenzen sich wie c : d verhalten, welches ist die zu subtrahirende Zahl?

87) Eine Zahl wird mit 3 Ziffern geschrieben. Von den Einern gegen die Hunderter gezählt, ist jede Ziffer die Hälfte der zunächst vorhergehenden. Schreibt man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so ist die so erhaltene Zahl um 98 größer als das Dreifache der ursprünglichen Zahl; wie heißt diese?

88) Eine dreiziffrige Zahl, bei welcher die Summe der Ziffern, welche die Einer und Zehner ausdrücken, gleich der Ziffer der Hunderter und die Summe der Ziffern der Einer und Hunderter das Dreifache der Ziffer der Zehner beträgt, gibt, wenn man sie durch die in umgekehrter Ordnung geschriebene Zahl dividirt, 1 zum Quotienten und 198 zum Rest; wie heißt die Zahl?

89) N wurde gefragt wie alt er sei. Er antwortete: „Vor 6 Jahren war ich so alt als meine Frau jetzt ist, zusammen sind wir nun 102 Jahre alt.“ Wie alt ist N?

90) Ein Vater ist jetzt 34 Jahre alt, sein Sohn 6; nach wie viel Jahren ist der Vater nur noch dreimal so alt als der Sohn?

91) Wenn Jemand a fl. nach n Jahren zu zahlen hat, wie viel muß er noch bezahlen, wenn er m Jahre früher mit p % Rabatt seine Schuld abtragen will?

92) A hat mit B einen Vertrag abgeschlossen, wonach er 800 Schaafe 10 Monate lang auf dessen Weide treiben darf. A begeht dieselbe aber anfänglich nur mit 250 Schaafen, nach 3 Monaten mit 100 mehr, 2 Monate später schickt er noch 200 Stück mehr und 3 Monate nachher nochmals 150 Schaafe mehr. Wie viel Monate darf A die Weide nach Verlauf der 10 Monate noch benutzen, wenn keiner der Betheiligten Schaden leiden soll?

93) Die Seiten zweier Quadrate differiren um 12 Fuß, ihre Inhalte um 240 Quadratfuß. Man soll die Seiten und Inhalte der beiden Quadrate berechnen.

94) Die Seiten zweier Quadrate sind 8 Fuß und 5 Fuß lang. Um welche gemeinschaftliche Länge muß man diese vergrößern und jene verkleinern, damit man die Seiten zweier Quadrate von gleichem Inhalte bekommt?

b) Mit mehren Unbekannten.

α) Mit zwei Unbekannten.

§. 156. Erklärung.

Treten in einer Gleichung zwei von einander unabhängige unbekannte Zahlen auf, ist z. B. gegeben

$$\text{I} \quad 3x + 12y = 84$$

so läßt sich zwar die eine z. B. x wieder ausscheiden, also

$$x = \frac{84 - 12y}{3} = 28 - 4y$$

setzen, allein es ist diese Unbekannte nun ausgedrückt in der anderen y und somit so lange unbestimmt, als nicht y einen bestimmten Werth erhält. Eine Gleichung reicht somit in diesem Falle nicht zur Durchführung der Auflösung aus.

Ist nun aber weiter bekannt, daß

$$\text{II } 2x - 5y = -24$$

sei und daß x und y in den Gleichungen I und II beziehentlich einerlei Werthe haben, beide Gleichungen also zu gleicher Zeit bestehen, so lassen sich beide auf mannigfache Weise so mit einander verbinden, daß man schließlich nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, welche dann nach den obigen Regeln leicht bestimmt werden kann.

Je nach der Operationsart, welche man anwendet, um zu dieser Schlußgleichung zu gelangen, unterscheidet man vier Auflösungs- oder Eliminationsmethoden, nämlich

1) Die Substitutionsmethode,
2) die Comparations- oder Combinationsmethode,
3) die Additions- und Subtractionsmethode,
4) die Bézout'sche Methode.

Anmerkung. Wir bemerken hier noch, daß, bevor zur wirklichen Auflösung nach einer dieser Methoden geschritten wird, beide Gleichungen geordnet, d. h. auf die Form

$$ax + by = c$$

gebracht werden müssen, wenn dieses nicht schon der Fall sein sollte.

§. 157. Die Substitutionsmethode.

Man bestimme aus der einen der beiden Gleichungen eine Unbekannte und setze (substituire) deren Werth für diese Unbekannte in die andere Gleichung.

Um nach dieser Methode die Gleichungen

$$\text{I } 4x - 7y = 10$$

$$\text{II } 12x + 5y = 82$$

aufzulösen, bestimme man z. B. aus der Gleichung I die Unbekannte

$$x = \frac{10 + 7y}{4}$$

und substituire diesen Ausdruck für x in die Gleichung II. Man erhält alsdann

$$12\left(\frac{10 + 7y}{4}\right) + 5y = 82$$

oder $$30 + 21y + 5y = 82$$

und hieraus $$y = \frac{52}{26} = 2.$$

Substituirt man nun wieder diesen Werth für y in eine der vorgelegten Gleichungen z. B. in die erste, so erhält man

$$4x - 14 = 10$$

und hieraus $$x = \frac{24}{4} = 6.$$

§. 158. Die Comparations- oder Combinationsmethode.

Man bestimme aus jeder der beiden Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte und setze die gefundenen Werthe einander gleich.

Sind wieder

$$\text{I} \quad 4x - 7y = 10$$
$$\text{II} \quad 12x + 5y = 82$$

die vorgelegten Gleichungen, so findet man z. B.

aus I $$x = \frac{10 + 7y}{4}$$

„ II $$x = \frac{82 - 5y}{12}$$

also ist $$\frac{10 + 7y}{4} = \frac{82 - 5y}{12}$$

oder $$30 + 21y = 82 - 5y$$

somit $$y = 2,$$

also $$x = 6.$$

§. 159. Die Additions- und Subtractionsmethode.

Man mache zuerst die Coefficienten einer und derselben Unbekannten in beiden Gleichungen dadurch gleich (wenn sie es nicht schon sind), daß man zu denselben das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bestimmt und jede der beiden Gleichungen mit dem Quotienten

aus diesem Vielfachen durch den Coefficienten der betreffenden Unbekannten multiplicirt. Hierauf addire oder subtrahire man die so erhaltenen Gleichungen, je nachdem die Zeichen der zu eliminirenden Glieder entgegengesetzt oder gleich sind.

Sind z. B.

$$\text{I} \quad 5x - 8y = 18$$
$$\text{II} \quad 7x - 4y = 54$$

die gegebenen Gleichungen und man will y eliminiren, so multiplicire man die Gleichung II mit 2 und subtrahire von der erhaltenen Gleichung

$$14x - 8y = 108$$

die erste, um aus der Gleichung

$$9x = 90$$

den Werth von

$$x = 10$$

zu erhalten.

Wären

$$\text{I} \quad 4x - 7y = 10$$
$$\text{II} \quad 12x + 5y = 82$$

die vorgelegten Gleichungen und man wollte y eliminiren, so hätte man die Gleichung I mit 5, dagegen Gleichung II mit 7 zu multipliciren und die gefundenen Gleichungen zu addiren.

Man findet

$$\begin{array}{rrcll} \text{I} \,.\, 5) & 20x - 35y & = & 50 & \text{III} \\ \text{II} \,.\, 7) & 84x + 35y & = & 574 & \text{IV} \\ \hline \text{III} + \text{IV}) & 104x & = & 624 & \end{array}$$

also ist

$$x = 6.$$

Um x auf diese Weise zu eliminiren, multiplicire man I mit 3 und subtrahire II von der erhaltenen Gleichung.

Man bekommt alsdann:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} \,.\, 3) & 12x - 21y & = & 30 \quad \text{V} \\ \text{II} - \text{V}) & 26y & = & 52 \end{array}$$

somit für

$$y = 2.$$

Anmerkung. Diese Methode heißt auch die Eliminationsmethode im engeren Sinne.

§. 160. Die Bézout'sche Methode.

Man multiplicire eine der beiden Gleichungen mit einem zunächst noch ganz unbekannten Faktor α,

addire die erhaltene Gleichung zu der zweiten, setze in der neuen Gleichung den Coefficienten der auszuscheidenden Unbekannten gleich Null, bestimme aus dieser auf Null reducirten Gleichung den Werth von α und substituire diesen für α in die durch Addition erhaltene Gleichung.

Sind z. B.
$$\text{I } 3x + 4y = 36$$
$$\text{II } 2x - 5y = - 22$$
die gegebenen Gleichungen und man multiplicirt die Gleichung II mit α, so folgt:
$$2\alpha x - 5\alpha y = - 22\alpha$$
und wenn man hierzu die Gleichung I addirt:
$$3x + 2\alpha x + 4y - 5\alpha y = 36 - 22\alpha$$
oder $(3 + 2a)\ x + (4 - 5\alpha)\ y = 36 - 22\alpha$ III.

Wollen wir nun die Unbekannte y ausscheiden und setzen zu diesem Ende
$$4 - 5\alpha = 0$$
also
$$\alpha = \frac{4}{5},$$
so erhalten wir durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung III
$$\left(3 + 2 \cdot \frac{4}{5}\right) x = 36 - 22 \cdot \frac{4}{5},$$
oder
$$\frac{23}{5} x = \frac{92}{5},$$
somit für
$$x = \frac{92}{23} = 4;$$
demnach für
$$y = 6.$$

Anmerkung. Man kann die Bézout'sche Methode auch dahin erweitern, daß man jede der zwei Gleichungen mit einem beliebigen Faktor multiplicirt, die beiden erhaltenen Gleichungen addirt und nun beide Faktoren so bestimmt, daß aus der durch Summirung entstandenen Gleichung eine Unbekannte verschwindet.

Wenden wir diese Verfahrungsweise auf obige zwei Gleichungen an und multipliciren zu diesem Ende dieselben bezüglich mit den Faktoren α und β, so erhalten wir:
$$\text{I } 3\alpha x + 4\alpha y = 36\alpha$$
$$\text{II } 2\beta x - 5\beta y = - 22\beta$$
und hieraus durch Addition
$$(3\alpha + 2\beta)\ x + (4\alpha - 5\beta)\ y = 36\alpha - 22\beta.$$
Setzen wir nun, um x zu finden, $\alpha = 5$, $\beta = 4$,
so folgt
$$(15 + 8)\ x = 180 - 88;$$
also wird
$$x = \frac{92}{23} = 4.$$

Um y zu bestimmen, setze man dagegen $\alpha = -2$, $\beta = 3$, und es wird $(-8 - 15)\,y = -72 - 66$,

somit $y = \frac{138}{23} = 6$.

Im Allgemeinen wendet man am vortheilhaftesten die Additions- und Subtractionsmethode oder auch die Bézout'sche Methode an.

Beispiele.

Um nochmals im Zusammenhange die vier Auflösungsmethoden an einem Beispiele zu zeigen, seien

$$\text{I} \quad 3\tfrac{4}{5}\,x - 6 + 3\tfrac{1}{3}\,y = 2x + 11\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,y$$

$$\text{II} \quad 5y - 12\tfrac{1}{2} = 2x - 7\tfrac{1}{2}$$

die zwei gegebenen Gleichungen. Beseitigt man in denselben die Brüche und ordnet hierauf, so erhält man:

$$\text{I} \quad 54x + 85y = 525$$

$$\text{II} \quad 2x - 5y = -5$$

als die beiden Gleichungen, auf deren Auflösung obige Methoden anzuwenden sind.

Auflösung durch die Substitutionsmethode.

Aus II den Werth von $x = \frac{5y - 5}{2}$

in I substituirt gibt:

$$54\left(\frac{5y - 5}{2}\right) + 85y = 525,$$

woraus folgt $y = 3$.

Somit wird nach II $2x - 15 = -5$,

also $x = 5$.

Auflösung durch die Comparationsmethode.

Aus I folgt $x = \frac{525 - 85y}{54}$,

" II " $x = \frac{5y - 5}{2}$,

also ist $\frac{525 - 85y}{54} = \frac{5y - 5}{2}$;

folglich $y = 3$

und $x = 5$.

Auflösung durch die Additions- und Subtractionsmethode.

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 54x + 85y = 525 \\ \text{II} \,.\, 17) & 34x - 85y = -85 \quad \text{III} \\ \hline \text{I} + \text{III}) & 88x = 440 \end{array}$$

also $x = 5$.

und $y = 3$.

Auflösung durch die Bézout'sche Methode.

$$\text{I} \qquad 54x + 85y = 525$$
$$\text{II} \cdot \alpha) \quad 2\alpha x - 5\alpha y = -5\alpha \quad \text{III}$$
$$\text{I} + \text{III}) \quad (54 + 2\alpha)\,x + (85 - 5\alpha)\,y = 525 - 5\alpha \quad \text{IV}.$$

Aus $85 - 5\alpha = 0$

folgt $\alpha = 17.$

Durch Substitution dieses Werthes in IV erhält man:

$$(54 + 34)\,x = 525 - 85$$

also wird $x = \frac{440}{88} = 5$

und $y = 3.$

Anmerkung.

Multiplicirt man, um die beiden allgemeinen Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = b$$

nach x_1 und x_2 aufzulösen, die erste derselben mit α, die zweite mit β und addirt die erhaltenen Gleichungen, so folgt

$$(a_1\alpha + b_1\beta)\,x_1 + (a_2\alpha + b_2\beta)\,x_2 = a\alpha + b\beta$$

und wenn man hierin das eine Mal

$$\alpha = b_2 \;,\; \beta = -a_2$$

das andere Mal $\alpha = b_1 \;,\; \beta = -a_1$

setzt, bezüglich:

$$x_1 = \frac{ab_2 - a_2 b}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } x_2 = \frac{a_1 b - ab_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Man nennt in diesem Falle den für die beiden Unbekannten constanten Nenner $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die **Determinante** der vier Coefficienten a_1, a_2, b_1, b_2 und bezeichnet dieselbe durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hiernach wäre alsdann:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Man ersieht hieraus, daß die Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$ aus zwei Gliedern besteht, welche erhalten werden, wenn man in dem Produkte ab den Elementen a und b alle möglichen Versetzungen der Zahlen 1 und 2, nämlich 1, 2 und 2, 1 der Reihe nach bezüglich als Indices anhängt und zwar ist alsdann das betreffende Glied positiv oder negativ, je nachdem die Indices in der Ordnung der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgen oder nicht.

§. 161. Aufgaben zur Uebung.

1) I $x + y = 40$; II $x - y = 10$.

2) I $2x + y = 15$; II $x - 3y = -17$.

3) I $8x - 7y = -19$; II $12x + y = 29$.

4) I $5x + 8y = 14$; II $x - 4y = 7$.

4a) I $\frac{3}{2}x + y = 8$; II $5x - 2y = 48$.

5) I $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{3}$; II $3x + 2y = 24$.

6) I $4\frac{2}{3}x - 3\frac{4}{5}y = 18$; II $\frac{5}{6}x - 6\frac{7}{10}y = -57$.

6a) I $3\frac{3}{4}x + 2\frac{4}{5}y = 151\frac{1}{2}$
II $5\frac{2}{9}x - 7\frac{3}{8}y = -127\frac{1}{4}$.

7) I $7x - 2 = 5y - 3$
II $8x + 5 = 3y + 31$.

8) I $10x - 7y = 8x - 55$
II $6x + 15 = 11y - 60$.

9) I $9\frac{3}{5}x - 7 = 6\frac{1}{2}y - 4\frac{3}{5}$
II $3\frac{3}{4}y - 20\frac{1}{2} = -1\frac{7}{15}x - 8\frac{3}{4}$.

10) I $5\frac{3}{4}x - 7\frac{2}{3} = 8\frac{4}{5}y - 70\frac{2}{3}$
II $8x - 15\frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}y + 31\frac{3}{4}$.

11) I $\frac{5x - 7}{7} + 8 = \frac{4 + 5y}{4} + 21$
II $\frac{3x + 14}{8} - \frac{13 - 8y}{9} = 2$.

12) I $\frac{25 - 3x}{7} - \frac{7y - 20x}{15} = \frac{3y + 50}{5} - 95$
II $\frac{3\frac{1}{2}x - 40}{6} + 28\frac{3}{4} = \frac{2\frac{1}{2}y - 10}{24} + 2x - 16\frac{1}{4}$.

12a) I $\frac{5x - 7}{3} - \frac{8y - 5}{6} - \frac{8x + 2y - 3}{5} = \frac{4x - 5 - 33}{12}$
II $\frac{x}{4} - 12 = \frac{y}{5} + \frac{4x}{3} - 14\frac{1}{30}$.

13) I $(8x - 5)(3y + 4) - 16xy + 20 = 8xy - 7x + 51$
II $4x - 3 - \frac{7y - 4}{5} = 4$.

14) I $(x - 3)^2 - (y - 5)^2 = (x + y)(x - y) - 16$
II $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 8x + 4xy - 5y - 75$.

15) I $\frac{4x - y}{3 - x} - x = \frac{15 - 4x}{4} + 1\frac{1}{4}$
II $\frac{6x - 5y}{3 + 4y} - y = \frac{8 - 3y}{3} - 2\frac{13}{15}$.

16) I $3{,}25x - 8{,}73 = 7\tfrac{5}{8}y + 0{,}046$

II $36{,}74y - 6{,}98 = 10{,}53x.$

17) I $3{,}12x - 5{,}27 = 8{,}4y - 35{,}27$

II $6{,}8x - 2{,}54 = 6{,}3y - 13{,}89.$

18) I $\frac{8}{x} - \frac{15}{y} = -\frac{1}{2}$

II $\frac{14}{x} + \frac{19}{y} = 6\tfrac{2}{3}.$

19) I $\frac{3\frac{2}{3}}{x} - \frac{2\frac{1}{2}}{y} = 1\tfrac{5}{12}$

II $\frac{4\frac{3}{4}}{2x} + \frac{7\frac{1}{3}}{3y} = 1\tfrac{257}{432}.$

20) I $8\sqrt{x} - 12 = 5\sqrt{y} - 10$

II $5\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 54.$

21) I $a_1 x - b_1 y = c_1$

II $a_2 x - b_2 y = c_2.$

22) I $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = c_1$

II $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = c_2.$

23) I $(a + x)\, b + ab^2 - cd^2 = (c + y)\, d + ab\,(1 + 2b) - cd\,(1 + 2d)$

II $(c + x)\, d + cd\,(1 - b) = (a + y)\, b - ab\,(1 - d) + 2cd\,(1 - b).$

24) I $\frac{a - x}{b} - \frac{b - y}{a} = \frac{c^2}{ab}$

II $\frac{a - x}{b} + \frac{b - y}{a} = \frac{d^2}{ab}.$

24a) I $\frac{5x - 2y}{a} - a = \frac{2y - 3x}{b} + \frac{3a^2 + 3ab - b\,(a^2 + 2b)}{ab}$

II $\frac{x}{a} - \frac{a^2b + ab^2}{a + b} = \frac{y}{b} - ab\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1\right).$

25) I $abx + 5a = by + 3a$

II $b^3x - a^2y = -\frac{c\,(a^3 - b^3)}{ab} - \frac{2a^3}{b}.$

26) I $\frac{a}{b + x} = \frac{c}{d - y}$

II $\frac{b}{a - x} = \frac{d}{c + y}.$

27) I $\frac{a_1}{x} + \frac{b_2}{y} = c_1$

II $\frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} = c_2$.

28) I $\frac{1}{x} + a : \frac{1}{y} + b = c : d$

II $\frac{1}{x} - a : \frac{1}{y} - b = f : g$.

29) I $4^x \cdot 5^y = 2000$

II $3^x \cdot 4^y = 576$.

30) I $\sqrt[x]{256} \cdot \sqrt[y]{3375} = 240$

II $\sqrt[x]{676} \cdot \sqrt[y]{2197} = 338$.

§. 162. Anwendung zur Auflösung von Aufgaben mit Text.

Kommen in einer vorgelegten Aufgabe zwei unbekannte Größen vor, so lassen sich diese dadurch finden, daß man aus den in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen zwei von einander unabhängige Gleichungen bildet und aus diesen die betreffenden Unbekannten auf die oben gelehrte Weise bestimmt.

Zur Erläuterung folgen nachstehend einige

Beispiele.

1) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Kaffee. 12 Pfd. von der ersten und 7 Pfd. von der zweiten kosten zusammen 10 fl. 12 kr., ferner kosten 3 Pfd. von der ersten und 5 Pfd. von der zweiten Sorte zusammen $4\frac{1}{2}$ fl. Was kostet das Pfund von jeder Sorte?

Auflösung.

Bezeichnen wir den Preis eines Pfundes der ersten Sorte durch x, den der zweiten Sorte durch y, so erhalten wir die zwei Bedingungsgleichungen

$$\text{I } 12x + 7y = 10\tfrac{1}{5}$$
$$\text{II } 3x + 5y = 4\tfrac{1}{2}$$

und hieraus

x = 30 kr. als Preis der ersten,
y = 36 „ „ „ „ zweiten Sorte.

2) Zwei Zahlen verhalten sich zu einander wie 2 : 7; vergrößert man jede derselben um 4, so wird die zweite das Dreifache der ersten. Wie heißen diese Zahlen?

Auflösung.

Bezeichnen wir die beiden Zahlen durch x und y, so erhalten wir

$$\text{I} \quad x : y = 2 : 7$$
$$\text{II} \quad 3(x + 4) = y + 4$$

oder

$$\text{I} \quad 7x = 2y$$
$$\text{II} \quad 3x - y = -8$$

und hieraus

$$x = 16, \; y = 56.$$

3) Gibt B dem A den dritten Theil seines Geldes, so hat A 10 fl. mehr als das Dreifache dessen, was dem B noch bleibt, gibt aber A dem B den vierten Theil seiner Baarschaft, so hat dieser gerade 10 fl. mehr als dem A noch bleibt. Wie viel hat jeder?

Auflösung.

Bezeichnen wir den Antheil des A durch x, den des B durch y, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\text{I} \quad x + \frac{y}{3} = 3\left(y - \frac{y}{3}\right) + 10$$

$$\text{II} \quad y + \frac{x}{4} = \left(x - \frac{x}{4}\right) + 10$$

und hieraus

$$x = 160 \text{ fl. als Antheil des A,}$$
$$y = 90 \text{ fl. als Antheil des B.}$$

§. 163. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Summe zweier Zahlen beträgt 54, ihre Differenz 24; wie heißen diese Zahlen?

2) Wenn A dem B 25 fl. gibt, so haben beide gleichviel; gibt aber B dem A 50 fl., so hat dieser viermal so viel als jener. Wie viel hat jeder?

3) Das Sechsfache einer Zahl ist gleich dem Vierfachen einer anderen, und das Dreifache der ersten ist um 12 kleiner als das Dreifache der zweiten. Wie heißen die zwei Zahlen?

4) Das Neunfache einer Zahl ist um 18 kleiner als das Siebenfache einer anderen und das Fünffache von dieser um 15 größer als das Sechsfache von jener. Wie heißen die zwei Zahlen?

5) Bei einer Holzversteigerung wurden 4 Buchenstämme und 6 Tannenstämme um 72 fl. und bei demselben Preise 5 Buchenstämme und 8 Tannenstämme um 92 fl. verkauft. Was kostet ein Stamm einer jeden Holzgattung?

6) Von 2 silbernen Bechern ist der eine 50 fl. mehr werth als der andere; beide zusammen haben den $2\frac{1}{4}$fachen Werth des zweiten. Wie viel ist jeder werth?

7) Zweierlei Sorten einer Waare kosten zusammen 140 fl.; würde die eine aber $1\frac{1}{2}$mal, die andere $2\frac{1}{2}$mal so viel kosten als ihr wirklicher Werth ist, so wären sie zusammen 290 fl. werth. Was kostet jede Sorte?

8) Von 2 Gefäßen A und B hält das erste dreimal so viel als das andere und jenes enthält gefüllt 24 Maas mehr Wasser als dieses. Wenn nun beide zusammen 48 Maas halten, wie viel faßt jedes derselben?

9) Man soll 2 Zahlen von der Beschaffenheit angeben, daß wenn man die erste um ihre Hälfte, die andere um ihr Drittel vermehrt, die Summe beider $47\frac{1}{2}$ ausmacht, und wenn man die erste mit 3, die letzte mit 5 multiplicirt, das zweite Produkt um 66 größer ist als das erste.

10) Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß das Vierfache der zweiten um 34 größer ist als die erste, und das Siebenfache der ersten um 32 größer ist als die zweite.

11) Eine zweiziffrige Zahl hat die Eigenschaft, daß die Ziffer der Zehner um 2 größer ist als die Ziffer der Einer und daß wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung schreibt, eine Zahl erscheint, welche um 18 kleiner ist als die ursprüngliche. Wie heißt diese?

11a) Bei einer Holzversteigerung wurden 4 Buchen- und 6 Eichstämme um 148 fl. und wieder 7 Buchen und 5 Eichstämme um 174 fl. abgegeben; was kostete durchschnittlich ein Stamm jeder dieser Holzgattungen?

12) A und B handeln gemeinschaftlich. Zusammen besitzen sie 10000 fl. A gibt dazu den dritten Theil seines Vermögens, B den elften des seinigen und sie behalten für andere Unternehmungen zusammen noch 2500 fl. mehr übrig, als das Vermögen des B ausmacht. Wie viel besitzt jeder?

13) A hat zwei Kapitalien, eines von 3600 fl., das andere von 5400 fl., welche zu bestimmten Procenten ausgeliehen sind. B ersucht A, ihm die Kapitalien zu überlassen, da er ihm im Ganzen $67\frac{1}{2}$ fl. mehr Zins zu geben verspricht. Zu wie viel Procent waren die Kapitalien ausgeliehen und wie viel Procent

will B geben, wenn diese um $3\frac{1}{4}$ weniger betragen als das Doppelte der bisher von A bezogenen Procente?

14) Vergrößert man die eine von 2 Zahlen um 4 und vermindert die andere um 10, so wird das Produkt um 104 kleiner als das Produkt der Zahlen. Vermindert man aber die erste um 6 und vergrößert die zweite um 12, so erhält man ein Produkt, das um 24 kleiner ist als das der ursprünglichen Zahlen. Wie heißen diese Zahlen?

15) Ein Wasserbehälter hält 40 Ohm und kann durch zwei Röhren gefüllt werden, von welchen man weiß, daß wenn die erste 3 Stunden, die zweite 5 Stunden geöffnet bleibt, 10 Ohm zufließen, dagegen, wenn die erste 5 Stunden und die zweite 3 Stunden offen bleibt, nur 8 Ohm einströmen. a) Wie viel fließt durch jede Röhre in einer Stunde zu? b) Nach welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Röhren zugleich geöffnet werden?

16) Man hat 1685 fl. in 800 Stück, theils preußischen Thalern, theils Kronenthalern. Wie viel sind von jeder Gattung dabei?

17) Man hat zweierlei Weinsorten. 8 Maas der ersten Sorte und 15 Maas der zweiten kosten zusammen 8 fl. 39 kr., dagegen 11 Maas von der ersten Sorte und 16 Maas von der zweiten 9 fl. 58 kr. Was kostet die Maas von jeder Sorte?

18) Welcher Bruch hat die Eigenschaft, daß wenn man seinen Zähler um 1 vergrößert, der Werth $\frac{4}{5}$ wird und wenn man den Nenner um 7 vergrößert, der Werth in $\frac{1}{2}$ übergeht?

19) Es fragte Jemand nach dem Inhalte zweier Gefäße und erhielt zur Antwort: „Füllt man aus dem ersten 6 Maas in das zweite, so ist in diesem das Doppelte von jenem; füllt man aber aus dem zweiten 6 Maas in das erste, so hat man ihren Inhalt geradezu vertauscht." Wie viel Flüssigkeit ist in jedem dieser Gefäße enthalten?

20) A, B und C haben Geld ausstehen. B erhält jährlich 110 fl. mehr Zins als A, da er nicht allein 1500 fl. mehr als dieser ausgeliehen hat, sondern auch $\frac{1}{2}$ % mehr erhält; C bezieht aber $262\frac{1}{2}$ fl. Zins mehr als B, indem er 5000 fl. mehr ausstehen hat als dieser und zudem noch $\frac{1}{4}$ % mehr erhält. Wie groß ist das ausgeliehene Kapital eines jeden und wie viel Procent bezieht jeder?

21) A hat 11000 fl. mehr Kapital und zu $\frac{1}{2}$ % höher ausstehen als B, und ihm erwächst dadurch ein höherer Zinsertrag von 620 fl., C aber hat noch 23000 fl. mehr als B und um 1 % höher ausgeliehen, wodurch ihm 1400 fl. mehr Zins jährlich erwächst als diesem. Wie viel hat jeder ausstehen und zu wie viel Procent?

22) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Kaffee. Vermischt er 7 Pfd. der besseren mit 5 Pfd. der geringeren, so kann er das Pfd. um $28\frac{2}{3}$ kr. geben; mengt er aber 7 Pfd. der geringeren mit 3 Pfd. der besseren, so kann er das Pfd. um $26\frac{2}{5}$ kr. lassen. Was kostet ein Pfd. jeder Sorte?

23) Das specifische Gewicht des Silbers sei $= a$, das des Kupfers $= b$. Wenn man nun aus der Composition beider einen Pokal fertigt, der d Pfd. wiegt; wie viel ist von jedem Metall darin, wenn das spec. Gewicht der Mischung $= c$ ist?

24) Eine Composition besteht aus Kupfer und Zinn. Das specifische Gewicht des Kupfers ist 8,8, das des Zinns 7,3. a) Wie viel von jedem dieser Metalle ist in $4306\frac{1}{2}$ Pfd. enthalten, wenn diese einen Raum von 10 c′ einnehmen?*) b) Was wiegt jedes derselben?

25) Man hat s fl. in zwei verschiedenen Geldsorten A und B und zwar von A a Stück, von B b Stück erhalten. Ein anderes Mal erhielt man s′ fl. in denselben Sorten und zwar von der ersten a′, von der zweiten b′ Stück ausbezahlt. Wie hoch wurden die beiden Geldsorten berechnet?

26) Ein Vater war vor 10 Jahren viermal so alt als sein Sohn, nach 20 Jahren fehlen dem Vater nur noch 2 Jahre um doppelt so alt zu sein wie der Sohn; wie alt ist jeder gegenwärtig?

26a) Zwei Körper A und B sind um a Fuß von einander entfernt. Bewegen sich dieselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegen einander, so treffen sie nach t_1 Sekunden zusammen, bewegen sich dieselben aber in der gleichen Richtung in einerlei Geraden, so daß der die geringere Geschwindigkeit besitzende Körper B vorauseilt, so kommen sie nach t_2 Sekunden zusammen. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich jeder der beiden Körper?

*) Der Kubikfuß Wasser (bad.) wiegt 54 Pfd. (bad.)

26b) Der Körper A bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit von P nach Q und kehrt sofort mit derselben Geschwindigkeit nach P zurück. Nach t Sekunden bewegt sich ein anderer Körper B gleichförmig von Q nach P mit geringerer Geschwindigkeit, und trifft, vom Abgange an gerechnet, nach t_1 Sekunden zum ersten Male und nach t_2 Sekunden zum zweiten Male mit A zusammen. Welche Geschwindigkeit besaß jeder der beiden Körper, wenn die Entfernung PQ = a gesetzt wird?

27) Von zwei Personen A und B, welche von den zwei Orten O. und O′ abreisen, ist B um a Tage später abgereist als A, legt aber täglich b Stunden mehr zurück als dieser und beide treffen an einem Orte zusammen, welcher gleichweit von O. und O′ entfernt liegt. Wäre A a′ Tage früher abgereist, so hätte er b′ Stunden weniger zu machen brauchen, um an demselben Orte mit B zusammenzutreffen. Wie viel Tage war B bis zum Zusammentreffen unterwegs? und wie viel Stunden hat er täglich gemacht?

28) Bei einer Arbeit sind Männer und Frauen beschäftigt. Zusammen erhalten sie täglich h′ fl. Lohn, indem jeder Mann a′ fl. und jede Frau b′ fl. erhält. Nach einiger Zeit erhält jeder Mann a″ fl. und jede Frau b″ fl. tägliche Zulage, so daß sie zusammen nun h″ fl. erhalten. Wie viele Personen von jedem Geschlechte waren beschäftigt?

28a) Ein Dampfschiff legte bei der ersten Fahrt stromaufwärts a_1 Fuß, stromabwärts b_1 Fuß zusammen in t_1 Sekunden zurück, bei der zweiten Fahrt stromaufwärts a_2 Fuß, stromabwärts b_2 Fuß zusammen in t_2 Sekunden. Man soll hiernach bestimmen, welche Geschwindigkeit dem Schiffe durch den Dampf allein und die Strömung allein ertheilt wurde.

29) Eine dreiziffrige Zahl von folgenden Eigenschaften zu finden: Die Summe der drei Ziffern soll 12, die Summe der Ziffern der Hunderter und der Zehner um 2 größer sein, als die Ziffer der Einer, und die Zahl, welche entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Ordnung anschreibt, die ursprüngliche Zahl um 198 übertreffen.

30) Eine zweiziffrige Zahl von folgenden Eigenschaften zu finden: Durch Division der Summe der Ziffern in diese Zahl

soll man 8 zum Quotienten und 2 zum Rest erhalten; wenn man aber die zu suchende Zahl durch die Zahl dividirt, welche entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Ordnung schreibt, soll man 2 zum Quotienten und 26 zum Rest erhalten. Wie heißt die Zahl?

31) Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch, die Elle zu 1 fl. 45 kr. Davon verkauft er später 60 Ellen zu einem gewissen Preise, den Rest aber zu 1 fl. 48 kr. die Elle und gewinnt dadurch $19\frac{1}{2}$ fl. Hätte er 100 Ellen zu jenem Preise und den Rest zu 1 fl. 15 kr. verkauft, so würde er weder gewonnen noch verloren haben. Wie viel Ellen hatte dieser Kaufmann eingekauft und was erhielt er für jede der 60 Ellen?

32) A und B übernehmen zusammen die Aufführung eines Gebäudes. Nachdem A mit seinen Leuten 15 Tage, B aber $5\frac{1}{4}$ Tage länger daran gearbeitet hatte, war erst der vierte Theil vollendet. Als endlich das ganze Werk fertig war, zeigte sich, daß A 80 Tage und B 54 Tage daran hatte arbeiten lassen. Wie lange hätte jeder allein gebraucht, um diese Arbeit auszuführen?

33) Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren A und B gefüllt werden. Oeffnet man zuerst B und $2\frac{1}{2}$ Stunden später A, so wird nach $7\frac{1}{2}$ Stunden, von der Eröffnung der Röhre B an gerechnet, nur $\frac{1}{4}$ des ganzen Behälters gefüllt sein. Nachdem der Behälter voll war, zeigte sich, daß durch die Röhre A 15 Stunden, dagegen durch B $37\frac{1}{2}$ Stunden Wasser zugeflossen war. In welcher Zeit wird der Behälter mittelst jeder dieser Röhren allein gefüllt?

β) Mit mehr als zwei Unbekannten.

§. 164. Erklärung.

Auf ähnliche Weise, wie wir oben gezeigt haben, daß zur Auffindung zweier Unbekannten zwei von einander unabhängige, diese Unbekannten enthaltende, Gleichungen nothwendig waren, läßt sich nun weiter darthun, daß dieser Bedingung analog auch für die Auffindung von mehr als zwei Unbekannten Genüge geleistet werden muß, daß also zur Bestimmung von 3, 4, . . . n Unbekannten bezüglich 3, 4, . . . n von einander unabhängige

Gleichungen, welche diese Unbekannten theilweise oder alle enthalten, gegeben sein müssen.

Die Auflösung selbst kann wieder, nachdem die Gleichungen geordnet, d. h. auf die Form

$$ax + by + cz + du + \ldots = m$$

gebracht sind, durch jede der oben angeführten vier Methoden vorgenommen werden.

§. 165. Die Substitutionsmethode.

Man bestimme aus einer der n Gleichungen eine Unbekannte und führe deren Werth für diese Unbekannte in die (n — 1) übrigen Gleichungen ein. Hierdurch erhält man (n—1) Gleichungen mit höchstens (n — 1) Unbekannten. Diese bringe man durch ähnliche Operation auf (n—2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten und fahre so fort, bis man schließlich bei einer Gleichung mit einer Unbekannten angelangt ist. Hat man hieraus die Unbekannte bestimmt, so findet man die übrigen leicht durch Substitution aus den vorhergehenden Gleichungen.

Sind z. B.

$$\text{I} \quad 2x - 3y + 4z = 17$$
$$\text{II} \quad x - 2y + 3z = 12$$
$$\text{III} \quad 3x - y + 2z = 19$$

drei Gleichungen mit drei Unbekannten, so erhält man aus II

$$x = 2y - 3z + 12$$

und durch Substitution dieses Werthes in I und III bezüglich

$$4y - 6z + 24 - 3y + 4z = 17$$
$$6y - 9z + 36 - y + 2z = 19$$

oder

$$y - 2z = -7 \quad \text{IV}$$
$$5y - 7z = -17 \quad \text{V}.$$

Führt man nun wieder aus IV den Werth von

$$y = 2z - 7$$

in V ein, so folgt:

$$10z - 35 - 7z = -17$$

und hieraus $z = 6.$

Substituirt man diesen Werth rückwärts in IV, so erhält man für $y = 5,$

somit endlich aus II für

$$x = 4.$$

§. 166. Die Comparationsmethode.

Man bestimme aus jeder der vorgelegten n Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte, setze je zwei der gefundenen Ausdrücke einander gleich und wiederhole diese Operation, bis man schließlich nur eine Gleichung mit einer Unbekannten hat.

So folgt z. B. für die drei Gleichungen

$$\text{I}\quad 2x - 3y + 4z = 17$$
$$\text{II}\quad x - 2y + 3z = 12$$
$$\text{III}\quad 3x - y + 2z = 19$$

aus I $$x = \frac{3y - 4z + 17}{2}$$

aus II $$x = 2y - 3z + 12$$

aus III $$x = \frac{y - 2z + 19}{3}$$

also ist

$$\frac{3y - 4z + 17}{2} = 2y - 3z + 12$$

und $$2y - 3z + 12 = \frac{y - 2z + 19}{3},$$

oder $$-y + 2z = 7 \quad \text{IV}$$

und $$5y - 7z = -17 \quad \text{V}.$$

Nun erhält man wieder

aus IV $$y = 2z - 7$$

" V $$y = \frac{7z - 17}{5};$$

somit ist $$2z - 7 = \frac{7z - 17}{5}$$

folglich $z = 6$ u. s. w.

§. 167. Die Additions- und Subtractionsmethode.

Man eliminire auf die in §. 159 angegebene Weise aus je zwei der n gegebenen Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte, so erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Mit diesen nehme man dieselbe Operation vor u. s. f.

Sind z. B. die gegebenen Gleichungen:

$$\text{I}\quad 2x - 3y + 4z = 17$$
$$\text{II}\quad x - 2y - 3z = 12$$
$$\text{III}\quad 3x - y + 2z = 19$$

so folgt

$$\begin{aligned} III\,.\,3 - I)\ 7x + 2z &= 40\ IV \\ III\,.\,2 - II)\ 5x + z &= 26\ \ V \\ V\,.\,2 - IV)\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

§. 168. Die Bézout'sche Methode.

Man multiplicire alle Gleichungen bis auf eine mit beliebigen, nachher noch zu bestimmenden Faktoren, addire zur Summe der so erhaltenen Gleichungen jene nicht multiplicirte Gleichung, setze alsdann in dieser Summengleichung die Coefficienten von (n — 1) Unbekannten gleich Null, bestimme aus diesen auf Null reducirten Gleichungen der Reihe nach die betreffenden Faktoren und führe endlich deren Werthe in letztgenannte Summengleichung ein, um eine Gleichung mit einer Unbekannten zu erhalten. Sind z. B. die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} I\ \ 2x - 3y + 4z &= 17 \\ II\ \ x - 2y + 3z &= 12 \\ III\ \ 3x - y + 2z &= 19 \end{aligned}$$

und man multiplicirt I und II bezüglich mit α und β, so folgt

$$\begin{aligned} 2\alpha x - 3\alpha y + 4\alpha z &= 17\alpha\ IV \\ \beta x - 2\beta y + 3\beta z &= 12\beta\ \ V. \end{aligned}$$

Durch Addition von III, IV und V erhält man nun:

$$(3 + 2\alpha + \beta)\,x - (1 + 3\alpha + 2\beta)\,y + (2 + 4\alpha + 3\beta)\,z = 19 + 17\alpha + 12\beta\ \ VI$$

und wenn man

$$\begin{aligned} 3 + 2\alpha + \beta &= 0 \\ 1 + 3\alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= -3 \\ 3\alpha + 2\beta &= -1 \end{aligned}$$

setzt:

$$a = -5,\ \beta = 7.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung VI, so resultirt:

$$3z = 18$$

und hieraus

$$z = 6 \text{ u. s. w.}$$

Um nach dieser Methode noch eine Aufgabe zu lösen, seien

$$\begin{aligned} I\ \ a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 &= a \\ II\ \ b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + b_3\,x_3 &= b \\ III\ \ c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_3 &= c \end{aligned}$$

die vorgelegten drei Gleichungen. Multipliciren wir dieselben der

Reihe nach mit α, β, γ und addiren die drei erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$(a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1\,\gamma)\,x_1 + (a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2\,\gamma)\,x_2 + (a_3\,\alpha + b_3\,\beta + c_3\,\gamma)\,x_3 = a\alpha + b\beta + c\gamma \ldots \text{(IV)}.$$

Setzt man nun hierin, um x_1 zu bestimmen,

$$a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2\,\gamma = 0$$
$$a_3\,\alpha + b_3\,\beta + c_3\,\gamma = 0$$

so wird diesen Gleichungen Genüge geleistet, wenn man nimmt

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{*)}$$

Aus IV resultirt alsdann

$$x_1 = \frac{a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma} =$$

$$\frac{a\,b_2c_3 - a\,b_3c_2 + a_3b\,c_2 - a_2b\,c_3 + a_2b_3c - a_3b_2c}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1}$$

Setzt man, um in analoger Weise x_2 zu bestimmen, in Gl. IV

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0$$
$$a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma = 0$$

also

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

so folgt

$$x_2 = \frac{a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma} =$$

$$\frac{a_1b\,c_3 - a_1b_3c + a_3b_1c - a\,b_1c_3 + a\,b_3c_1 - a_3b\,c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1}$$

Setzt man endlich in IV

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0$$

oder

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

so folgt: $$x_3 = \frac{a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma}{a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma} =$$

$$\frac{a_1b_2c - a_1b\,c_2 + a\,b_1c_2 - a_2b_1c + a_2b\,c_1 - a\,b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1}$$

Man überzeugt sich durch den bloßen Anblick der gefundenen Werthe der drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3, daß sämmtliche Nenner derselben genau mit einander übereinstimmen und daß die zugehörigen Zähler erhalten werden, wenn man die Coefficienten der

*) Denn bestimmt man diese Determinanten und setzt für α, β, γ der Reihe nach $b_2c_3 - b_3c_2$, $c_2a_3 - c_3a_2$, $a_2b_3 - a_3b_2$, so gehen beide Gleichungen in der That in Null über.

$\alpha = b_2c_3 - b_3c_2$ $\alpha = b_3c_1 - b_1c_3$

$\alpha = b_1c_2 - b_2c_1$ $b_2c_3 - b_3c_2 = b_1c_2 - b_2c_1$

$b_2(c_3 + c_1) = c_2(b_1 + b_3)$

jedesmaligen Unbekannten durch die entsprechenden nicht accentuirten Buchstaben ersetzt.

Der Nenner

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

heißt die Determinante der neun Coefficienten:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$$

und wird bezeichnet durch $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Man erhält denselben, wenn man in dem Produkte abc den Elementen a, b und c alle möglichen Versetzungen der Indices 1, 2, 3

also: $\left\{\begin{matrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 3\ 2 \\ 2\ 1\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \\ 3\ 1\ 2 \\ 3\ 2\ 1 \end{matrix}\right.$ der Reihe nach in der gefundenen Ordnung anhängt und hierbei das Produkt positiv oder negativ nimmt, je nachdem bezüglich eine gerade oder eine ungerade Anzahl mal größere Indices vor kleineren stehen.

Analoge Gesetze gelten für 4, 5 . . . . n Gleichungen mit n Unbekannten, wie wir solches später nachweisen werden.

Anmerkung. Enthalten einzelne Gleichungen nicht alle Unbekannten, so bleibt das Auflösungsverfahren im Allgemeinen dasselbe, nur kann die Rechnung in solchen Fällen dadurch oft sehr vereinfacht werden, daß man die dem vorliegenden Falle entsprechende zweckmäßigste Methode in Anwendung bringt. Enthält z. B. eine der Gleichungen nur eine Unbekannte, so wird man wohl daran thun, diese zuerst zu bestimmen und den gefundenen Werth für diese Unbekannte in die noch übrigen Gleichungen zu substituiren.

§. 169. Aufgaben zur Uebung.

1) I $x - y = 2$
II $x + z = 7$
III $y - z = -1$

2) I $x + y = a$
II $y + z = b$
III $x + z = c$

3) I $5x - 12y = 1$
II $3y + 4z = 46$
III $5z = 50$

4) I $4x + 7y = 160$
II $3y - 5z = 98$
III $3x + 2z = 16$

5) I $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = 3$
II $\frac{5}{6}x + \frac{1}{5}z = 8$
III $\frac{4}{9}y - \frac{2}{3}z = -6$

6) I $\frac{15}{x} - \frac{12}{y} = 2$
II $\frac{2}{y} + \frac{5}{z} = 1\frac{1}{2}$
III $\frac{9}{x} - \frac{10}{z} = 1$

6a) I $x + y - z = 115$
II $x - y + z = 67$
III $-x + y + z = 59$

7) I $a_1x + b_1y = c_1$
II $a_2x + b_2y = c_2$
III $a_3y + b_3z = c_3$

8) I $x + y - z = 22$
II $x - y + z = -2$
III $x - y = -5$

9) I $2x - 3y + 4z = 16$
II $4x - 3y - 2z = 14$
III $6x - y + z = 47$

10) I $4x - 3y + 2z = 19$
II $5x - 4y - 3z = 3$
III $6x + 5y - 3z = -47$

10a) I $\frac{3x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 28$
II $\frac{x}{8} - \frac{y}{9} + \frac{z}{7} = 3$
III $x + y + z = 55.$

10b) I $\frac{x+1}{6} + \frac{y-1}{10} = \frac{z+3}{2}$
II $\frac{x-1}{10} + \frac{y-1}{3} = z - 3$
III $x + y + z = 89$

10c) I $2x + \frac{y+1}{4} + \frac{z+3}{10} = y + 1$
II $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{5} + \frac{z+1}{4} = y$
III $4x = y + 1.$

11) I $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z = 2$
II $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{8}z = 1\frac{7}{120}$
III $x - y + z = 3\frac{4}{15}$

12) I $x - y + z = 3\frac{5}{12}$
II $3x + 5y - 8z = -9\frac{5}{6}$
III $7x - 2y + 9z = 49\frac{1}{12}$

13) I $4x + \frac{3}{4}y - 24 = 8z - 4$
II $12y + 6\frac{7}{8} = 8z - \frac{3}{4}x + 167\frac{7}{8}$
III $\frac{3}{8}y + 4\frac{2}{3} = 5x - \frac{7}{12}z - 46\frac{5}{12}.$

14) I $\frac{12}{5x} - \frac{16}{3y} - \frac{24}{z} = -\frac{17}{15}$
II $\frac{6}{x} + \frac{4}{3y} - \frac{2}{3z} = \frac{5}{9}$
III $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{16}.$

15) I $x - y + z - u = -2$
II $2x + y - 3y + u = -1$
III $4x - 2y - z - u = -7$
IV $5x + 2y + 2z + u = 19.$

16) I $2x + 8y - 3z - 5u = 400$
II $x - 3y + 4z + 2u = 900$
III $4x + y - 5z - 4u = -1300$
IV $5x - 2y + 6z + u = 2000.$

17) I $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - z + \frac{1}{3}u = 33$
II $\frac{1}{10}x + \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z - u = 31$
III $\frac{1}{5}x - y - \frac{1}{2}z + \frac{2}{3}u = -35$
IV $x + \frac{3}{8}y - \frac{1}{10}z - \frac{1}{9}u = 33.$

18) I $\frac{15}{x} - \frac{14}{y} - \frac{10}{z} + \frac{13}{2u} = 1$
II $\frac{9}{x} + \frac{35}{3y} - \frac{15}{z} - \frac{2}{3u} = 1\frac{2}{3}$
III $\frac{12}{x} - \frac{1}{y} + \frac{5}{7z} + \frac{8}{5u} = 4$
IV $\frac{2}{3x} + \frac{7}{9y} - \frac{2}{z} + \frac{1}{u} = -\frac{1}{15}.$

19) I $x - 2y - 3z + u + v = -9$
II $2x - 3u + 2z - 4v + y = -118$
III $2y - 6z - 2u + 3x - v = -106$
IV $5z - 2v + 3u - 4x - y = 23$
V $2v - 4u + 3y - z + x = 11.$

20) I $2x - 5y + 3z - 2u + 4v = 22$
II $5x - y + 2z - 3u - 7v = -67$
III $x + 4y - 3z - 4u - 2v = -6$
IV $5x - 2y - 7z + u - 3v = -27$
V $4x + 3y - z - 5u + v = 25.$

20a) I $3x - 2y + 5z - 3u + 4v = 9$
II $2x + 3y - 7z + 2u - 3v = -3$
III $4x - 5y - 2z - u + v = 5$
IV $x + y - 3z + 4u - 2v = 3$
V $5x - 4y + 4z - 3u - 4v = -13.$

21) I $3x - 2y + z - u + 2v = 2$
II $2x - z + 3u + v - 2w = 2$
III $4x - y + 3u - 2v + w = 9$
IV $2y - 3z + 2u - v - 3w = -3$
V $3x - 2y + 4z - 3v + 2w = 14$
VI $2x - 3y + z - 4u + w = 0.$

22) $$\begin{aligned}
\text{I}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21 \\
\text{II}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 22 \\
\text{III}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 20 \\
\text{IV}\quad & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 25 \\
\text{V}\quad & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 23 \\
\text{VI}\quad & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24
\end{aligned}$$

23) $$\begin{aligned}
\text{I}\quad & x_2x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_3x_5 + \\
& x_1x_2x_3x_4 = \tfrac{31}{12}x_1x_2x_3x_4x_5 \\
\text{II}\quad & x_2x_3x_4x_6 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_2x_4x_6 + x_1x_2x_3x_6 + \\
& x_1x_2x_3x_4 = \tfrac{29}{12}x_1x_2x_3x_4x_6 \\
\text{III}\quad & x_2x_3x_5x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_2x_5x_6 + x_1x_2x_3x_6 + \\
& x_1x_2x_3x_5 = \tfrac{8}{3}x_1x_2x_3x_5x_6 \\
\text{IV}\quad & x_2x_4x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 + x_1x_2x_5x_6 + x_1x_2x_4x_6 + \\
& x_1x_2x_4x_5 = \tfrac{31}{12}x_1x_2x_4x_5x_6 \\
\text{V}\quad & x_3x_4x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_3x_4x_6 + \\
& x_1x_3x_4x_5 = \tfrac{23}{12}x_1x_3x_4x_5x_6 \\
\text{VI}\quad & x_3x_4x_5x_6 + x_2x_4x_5x_6 + x_2x_3x_5x_6 + x_2x_3x_4x_6 + \\
& x_2x_3x_4x_5 = \tfrac{29}{12}x_2x_3x_4x_5x_6
\end{aligned}$$

24) A, B und C haben zusammen eine bestimmte Summe und zwar besitzen A und B zusammen 6200 fl., A und C zusammen 6600 fl. und B und C zusammen 5850 fl. Wie viel hat jeder?

25) In jedem von drei Gefäßen befindet sich eine gewisse Quantität Wasser. Gießt man aus dem ersten 20 Maas in das zweite, so erhält dieses das Doppelte von jenem; gießt man aber 30 Maas aus dem ersten in das dritte, so enthält dieses 20 Maas weniger als das Vierfache des ersten noch beträgt und gießt man endlich 25 Maas aus dem zweiten in das dritte, so enthält dieses 50 Maas weniger als das Dreifache des zweiten noch ausmacht. Wie viel Wasser befand sich in jedem Gefäße?

26) Gibt A dem B die Hälfte seines Vermögens, so hat dieser $3\frac{1}{2}$mal so viel als A behält; gibt aber A dem C jene Hälfte, so hat dieser soviel als A vorher hatte und wenn endlich B dem C 9000 fl. gibt, so haben B und C gleichviel. Wie viel hat jeder?

27) Man soll drei Zahlen von folgenden Eigenschaften angeben: Vergrößert man die erste um 4 und verkleinert man die zweite um ebensoviel, so verhält sich jene Summe zu dieser

Differenz wie 3 : 4, vermindert man aber die erste um 8 und die dritte um 12, so verhalten sich diese beiden Differenzen wie 1 : 3 und wenn man endlich die zweite um die Hälfte der dritten vergrößert und die dritte um $\frac{3}{5}$ der ersten vermindert, so verhalten sich die resultirenden Zahlen wie 5 : 3. Wie heißen die drei Zahlen?

28) Man hat drei Stücke Silber. Das erste ist 14, das zweite 10 und das dritte 12löthig. Schmilzt man das 14löthige mit dem 12löthigen zusammen, so entsteht ein Silber, das $12\frac{6}{13}$löthig ist; schmilzt man das zweite und dritte zusammen, so erhält man $11\frac{1}{4}$löthiges und wenn man das erste und zweite zusammenschmilzt, $11\frac{1}{3}$löthiges. Wie viel wiegt jedes der drei Stücke?

29) Drei Kaufleute A, B, C kauften Kaffee, Zucker und Reis. A gab 205 fl. für $1\frac{1}{2}$ Centner Kaffee, 2 Centner Zucker und $\frac{3}{4}$ Centner Reis; B gab 255 fl. für 2 Centner Kaffee, $2\frac{1}{2}$ Centner Zucker und $\frac{1}{2}$ Centner Reis; C bezahlte 355 fl. für $3\frac{1}{4}$ Centner Kaffee, $2\frac{3}{4}$ Centner Zucker und $1\frac{1}{8}$ Centner Reis. Was kostete ein Centner von jeder Waare?

30) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren A, B und C gefüllt werden. Durch die Röhren A und B zusammen wird er in c Stunden, durch die Röhren A und C in b Stunden und durch die Röhren B und C in a Stunden gefüllt. In welcher Zeit wird der Behälter durch jede Röhre allein gefüllt, und wann, wenn alle drei zugleich geöffnet werden?

31) Drei Abtheilungen Infanterie A, B, C sollen eine Arbeit verrichten. Arbeiten A und B gemeinschaftlich, so brauchen sie 6 Tage, arbeiten aber A und C gemeinschaftlich, so brauchen sie dazu $6\frac{2}{3}$ Tage, wenn endlich B und C zusammen arbeiten, so brauchen sie $8\frac{4}{7}$ Tage. Wie lange würde jede Abtheilung allein brauchen, und wie lange die drei Abtheilungen bei gemeinschaftlicher Arbeit?

32) Ein Silberarbeiter hat drei Stücke Metall A, B und C, deren jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht; es besteht nämlich A aus 10 Loth Gold, 15 Loth Silber, 5 Loth Kupfer; B aus 15 Loth Gold, 25 Loth Silber, 30 Loth Kupfer; C aus 20 Loth Gold, 24 Loth Silber und 36 Loth Kupfer. Er will nun von jedem Stück soviel nehmen, daß, wenn er die hinweggenommenen Theile zusammenschmilzt, er eine Composition erhält,

welche genau 10 Loth Gold, 14 Loth Silber und 16 Loth Kupfer enthält; wie viel muß er von jedem wegnehmen?

32a) A pachtet ein Gut um den jährlichen Pachtzins von 1000 fl. Der Ertrag des Gutes fiel aber im ersten Jahre so gering aus, daß ihm nach Entrichtung der Steuern und nach Abzug der für seinen Lebensunterhalt nothwendigen Ausgaben noch 48 fl. fehlten, um den Pachtzins zu zahlen. Der Verpächter ließ ihm daher vom 2. Jahre an 4% am Pachtzins nach und da der Ertrag des Gutes sich gegen den des vorhergehenden Jahres um $\frac{1}{8}$ besser gestaltete, seine Ausgaben für den Unterhalt sich um $\frac{1}{10}$ vermindert hatten und außerdem auch die Steuern um $\frac{1}{6}$ herabgesetzt worden waren, so war der Pächter am Ende des zweiten Jahres im Stande nicht allein seine Schuld zu decken, sondern auch noch 212 fl. zurückzulegen. Während des dritten Jahres erhöhte sich der Ertrag noch weiter um $\frac{1}{10}$ gegen das verflossene Jahr und obgleich nun gegen eben dieses Jahr die Ausgaben des Pächters für den Haushalt um $\frac{1}{15}$ und für Steuern um $\frac{1}{8}$ größer waren, so hatte er sich doch 399 fl. erübrigt. Wie viel hat A im ersten Jahre für den Lebensunterhalt, wie viel für Steuern gebraucht und was war der Ertrag des Gutes im ersten Jahre?

33) Eine dreizifferige Zahl hat folgende Eigenschaften: Schreibt man die Ziffern in umgekehrter Ordnung, so ist die dadurch entstandene Zahl um 99 größer als die ursprüngliche; vertauscht man aber nur die Ziffern der Einer und Zehner in Bezug auf ihre Stelle, so entsteht eine Zahl, welche um 18 kleiner ist als die zu suchende und vertauscht man nur die Ziffern der Zehner und Hunderter hinsichtlich ihrer Stellung, so beträgt die gewonnene mit der zu bestimmenden Zahl zusammen 998. Wie heißt diese Zahl?

34) Eine vierzifferige Zahl hat folgende Eigenschaften: Die Summe der Ziffern der Einer und Zehner beträgt drei weniger als die Summe der Ziffern der Hunderter und Tausender, das Dreifache der Ziffern der Zehner ist gleich der zweizifferigen Zahl, welche die Ziffern der Hunderter zu Einern, die der Tausender zu Zehnern hat; die Summe der zwei mittlern Ziffern ist das 14fache der Summe der beiden äußersten Ziffern und die Summe der vier Ziffern beträgt gerade den vierten Theil der aus den

Einern und Zehnern der Zahl gebildeten zweizifferigen Zahl. Wie heißt die Zahl?

35) Man hat ein Kapital von 58830 fl. in der Weise in vier Jahresterminen sammt den Zinsen zu 5% abzutragen, daß man in jedem Jahre gleichviel an Kapital und Zins heimbezahlt. Wie viel muß jährlich bezahlt werden?

35a) Ein Weinhändler hat aus drei Sorten A, B, C 240 Maas Wein so gemischt, daß darin diese Sorten im Verhältnisse 3 : 4 : 5 enthalten sind. Zu diesen 240 Maas setzte er nun 160 Maas einer anderen, aus denselben drei Sorten bestehenden Mischung und erhielt so einen Wein, in welchem sich der Quantität nach die angeführten Sorten wie 8 : 5 : 7 verhielten. Wie viel von jeder der drei Sorten war in der zugesetzten Mischung enthalten?

36) Ein Wirth hat vier Sorten Wein. Davon kosten 5 Maas von der ersten, 2 Maas von der zweiten, 6 Maas von der dritten und 3 Maas von der vierten zusammen 5 fl. 52 kr.; 3 Maas von der ersten, 4 Maas von der zweiten, 2 Maas von der dritten und 8 Maas von der vierten zusammen 5 fl. 56 kr.; 10 Maas von der ersten, 12 Maas von der zweiten, 9 Maas von der dritten und 5 Maas von der vierten zusammen 14 fl. 16 kr.; 6 Maas von der ersten, 3 Maas von der zweiten, 5 Maas von der dritten und 4 Maas von der vierten zusammen 6 fl. 34 kr. Was kostet die Maas von jeder Sorte?

37) Drei Personen A, B und C spielten mit einander. Im ersten Spiele hatte A die Bank und die zwei anderen setzten die Hälfte ihres Geldes und gewannen. Im zweiten Spiele hatte B die Bank, die beiden anderen setzten wieder die Hälfte ihres Geldes und gewannen auch. Hierauf erhält C die Bank und die zwei anderen setzten die Hälfte ihres Geldes und gewannen ebenfalls. Am Ende des dritten Spieles zählten sie ihr Geld und fanden, daß jeder 81 fl. hatte. Wie viel hatte jeder vor Beginn des Spieles?

38) Eine Zahl wird mit 6 Ziffern geschrieben. Von links gegen rechts beträgt die Summe der fünf ersten Ziffern 18, die der vier ersten und der sechsten 20, die der drei ersten und der zwei letzten 22, die der zwei ersten und der drei letzten 24, die der ersten und der vier letzten 25 und endlich die Summe der fünf letzten Ziffern 26. Wie heißt jene Zahl?

B. Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.

a) Mit einer Unbekannten.

§. 170. Erklärung.

Kommt in einer Gleichung, nachdem dieselbe auf die zur Auflösung übliche Form gebracht und gehörig reducirt ist, die Unbekannte in der zweiten, aber in keiner höheren Potenz vor, so heißt diese Gleichung eine quadratische oder eine Gleichung des zweiten Grades.

Je nachdem die Unbekannte nur in der zweiten Potenz, oder auch in der ersten Potenz in der Gleichung auftritt, wird diese eine rein-quadratische oder unrein-quadratische (gemischt-quadratische) genannt.

§. 171. Auflösung rein-quadratischer Gleichungen.

Durch Division beider Seiten der Gleichung durch den etwa vorkommenden Coefficienten des unbekannten Gliedes läßt sich jede rein-quadratische Gleichung auf die Form bringen

$$x^2 = a$$

woraus unmittelbar folgt:

$$x = \pm \sqrt{a}.$$

Der Unbekannten entsprechen somit stets zwei gleiche entgegengesetzte Werthe oder Wurzeln.

Bezeichnen wir dieselben durch x_1 und x_2, so ist:

$$x_1 = + \sqrt{a};\ x_2 = - \sqrt{a}.$$

Beispiele.

1) $$12x^2 = 192$$

$$x^2 = \frac{192}{12} = 16$$

$$x = \pm \sqrt{16} = \pm 4.$$

Die beiden Werthe sind somit

$$x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -4.$$

2) $$(x + 3)(x - 3) = 4x^2 - 84$$

$$x^2 - 9 = 4x^2 - 84$$

$$-3x^2 = -75$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{75}{3}} = \pm \sqrt{25} = \pm 5.$$

Also ist $x_1 = 5,\ x_2 = -5.$

3) Eine positive Zahl zu suchen, deren dritter und vierter Theil mit einander multiplicirt 48 zum Produkte gibt.

Auflösung. Bezeichnen wir die Zahl durch x, so folgt aus der Bedingungs-Gleichung

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 48$$

$$x^2 = 48 \cdot 12 = 576$$

und hieraus $x = \pm \sqrt{576} = \pm 24.$

Da jedoch nach der vorliegenden Aufgabe nur der positive Werth Giltigkeit hat, so ist 24 die zu suchende Zahl.

Anmerkung. Der Werth — 24 genügt aber auch obiger Bedingung. Denn es ist $-\frac{24}{3} \cdot -\frac{24}{4} = -8 \cdot -6 = 48.$

§. 172. Aufgaben zur Uebung.

1) $8x^2 = 1800.$

2) $a^2x^2 = b^2.$

3) $\frac{3}{4}x^2 + 12 = 10 + \frac{7}{8}x^2.$

4) $(8 - 2x)\,3x = (10 + 4x)\,6x - 36x - 120.$

5) $\frac{10 + 5x^2}{17} - 4x = \frac{5 - 8x}{2} - 8x^2 + 827\frac{1}{2}.$

6) $(a + x)(a - x) + b = cx^2 + d.$

7) $\sqrt{(40 - 12x)} = 3x - 2.$

8) $6x^2 + 25 = 10x^2 + 125.$

9) Welche Zahlen geben zur zweiten Potenz erhoben 60516?

10) Eine positive Zahl anzugeben, deren dreifaches Quadrat 8112 ist.

11) Multiplicirt man den vierten und achten Theil einer Zahl miteinander, so erhält man als Produkt 2048; wie heißt die Zahl?

12) Welche zwei Zahlen geben mit einander multiplicirt das Produkt 864 und durch einander dividirt den Quotienten $1\frac{1}{2}$?

13) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 666, die Differenz aber nur 216; wie heißen diese Zahlen?

14) Verkauft man das Pfund einer Waare um $2\frac{3}{4}$mal so viel Kreuzer als die Anzahl der vorräthigen Pfunde beträgt, so löst man 3 fl. weniger, als wenn man das Pfund zu viermal so viel Kreuzer verkaufen würde als man Pfunde hat. Wie viel Pfunde sind vorräthig?

§. 173. Auflösung unrein-quadratischer Gleichungen.

1) Die allgemeine Form, auf welche jede unrein-quadratische Gleichung gebracht werden kann, wenn man auf der einen Seite derselben nach Potenzen der Unbekannten ordnet, alle bekannten Glieder auf die andere Seite bringt, dann durch den Coefficienten des Quadrats der Unbekannten die ganze Gleichung dividirt und, wenn derselbe negativ sein sollte, noch sämmtliche Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt, ist:

$$x^2 + px = q \; .\;.\;.\;.\; (1)$$

2) Um nun diese Gleichung aufzulösen, ergänzen wir zunächst die linke Seite derselben zu einem vollständigen Quadrate. Vergleichen wir zu diesem Ende den Ausdruck $x^2 + px$ mit dem Quadrate des Binoms $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, so erkennen wir sogleich, daß $2a$ die Stelle von p, also a die Stelle von $\frac{p}{2}$ vertritt, somit $x^2 + px$ durch $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ zu einem vollständigen Quadrate ergänzt und daß

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

sein wird.

Addirt man nun beiderseits der Gleichung den Werth $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, so geht dieselbe über in

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

und wenn man aus beiden Seiten die Quadratwurzel zieht, in

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)},$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}.$$

Die beiden Werthe von x sind daher:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)} = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)} = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}.$$

Prüfet diese Wurzeln durch Substitution in die ursprüngliche Gleichung (1).

3) Legen wir in der Fundamentalgleichung (1) den Buchstaben p und q die Bedeutung absoluter Zahlen bei, so lassen sich daraus, unter Berücksichtigung der möglichen Vorzeichen, welche man diesen Zahlen beisetzen kann, folgende vier besondere Formen entnehmen:

$$x^2 + px = q, \quad x^2 + px = -q,$$
$$x^2 - px = q, \quad x^2 - px = -q,$$

welche sich jedoch zu nachstehenden zwei Formen zusammenziehen lassen:

$$x^2 \pm px = q \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$
$$x^2 \pm px = -q \; . \; . \; . \; (3).$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind nach Obigem

α) im ersten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\mp p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2} \\ x_2 = \dfrac{\mp p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2} \end{array}\right\} \; . \; . \; (4)$$

β) im zweiten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\mp p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2} \\ x_2 = \dfrac{\mp p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2} \end{array}\right\} \; . \; . \; (5).$$

Aus (4) ersehen wir sogleich, daß in der Fundamentalform (1) einem positiven q der Unbekannten stets zwei reelle und von einander verschiedene Werthe entsprechen, aus (5) dagegen, daß für ein negatives q diese Werthe entweder reell und verschieden, oder reell und gleich, oder endlich imaginär sein können, je nachdem bezüglich $p^2 \gtreqless 4q$ ist.

Beispiele.

1) $x^2 + 8x = 65$
$x^2 + 8x + 4^2 = 4^2 + 65 = 81$
$(x + 4)^2 = 81$
$x + 4 = \pm 9$
$x = -4 \pm 9$
$x_1 = -4 + 9 = 5; \; x_2 = -4 - 9 = -13.$

2) $x^2 - 9x = 10$

$$x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 10$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

$$x - \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} = \pm\frac{11}{2}$$

$$x = \frac{9}{2} \pm \frac{11}{2}$$

$$x_1 = \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 10;\; x_2 = \frac{9}{2} - \frac{11}{2} = -1.$$

3) $x^2 + 8x = -15$

$$x^2 + 8x + 4^2 = 4^2 - 15$$
$$(x + 4)^2 = 1$$
$$x + 4 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$x = -4 \pm 1$$
$$x_1 = -4 + 1 = -3;\; x_2 = -4 - 1 = -5.$$

4) $x^2 + 10x + 25 = 0$

$$x^2 + 10x = -25$$
$$x^2 + 10x + 5^2 = 5^2 - 25$$
$$(x + 5)^2 = 0$$
$$x + 5 = 0$$

$x = -5$ für beide Werthe.

5) $x^2 + 6x + 25 = 0$

$$x^2 + 6x = -25$$
$$x^2 + 6x + 3^2 = 3^2 - 25$$
$$(x + 3)^2 = -16$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$$
$$x = -3 \pm 4i$$
$$x_1 = -3 + 4i;\; x_2 = -3 - 4i.$$

6) $\frac{x + 5}{x - 2} - \frac{4x}{3} = 4$

Durch Wegschaffung der Nenner erhält man

$$(x + 5)\,3 - (x - 2)\,4x = (x - 2)\,12$$
$$3x + 15 - 4x^2 + 8x = 12x - 24$$
$$-4x^2 - x = -39$$
$$x^2 + \frac{x}{4} = \frac{39}{4}$$
$$x^2 + \frac{x}{4} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{39}{4} = \frac{625}{64}$$
$$\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$$

$$x + \frac{1}{8} = \pm \sqrt{\frac{625}{64}} = \pm \frac{25}{8}$$

$$x_1 = -\frac{1}{8} + \frac{25}{8} = 3; \quad x_2 = -\frac{1}{8} - \frac{25}{8} = -3\frac{1}{4}.$$

7) $4\sqrt{(64 - 7x^2)} = 5x + 14$

$$16\,(64 - 7x^2) = (5x + 14)^2$$

$$1024 - 112x^2 = 25x^2 + 140x + 196$$

$$-137x^2 - 140x = -828$$

$$x^2 + \frac{140}{137}x = \frac{828}{137}$$

$$x^2 + \frac{140}{137}x + \left(\frac{70}{137}\right)^2 = \left(\frac{70}{137}\right)^2 + \frac{828}{137}$$

$$\left(x + \frac{70}{137}\right)^2 = \frac{118336}{1372}$$

$$x + \frac{70}{137} = \pm \sqrt{\frac{118336}{137^2}} = \pm \frac{344}{137}$$

$$x_1 = -\frac{70}{137} + \frac{344}{137} = 2; \quad x^2 = -\frac{70}{137} - \frac{344}{137} = -3\frac{3}{137}.$$

8) $ax^2 + ac = bx + \frac{a^3c^2}{b^2}$

$$ax^2 - bx = \frac{a^3c^2}{b^2} - ac$$

$$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{a^2c^2}{b^2} - c$$

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{a^2c^2}{b^2} - c$$

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^4 - 4a^2b^2c + 4a^4c^2}{4a^2b^2}$$

$$x - \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^4 - 4a^2b^2c + 4a^4c^2}{4a^2b^2}}$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{b^2 - 2a^2c}{2ab}$$

$$x_1 = \frac{b}{2a} + \frac{b^2 - 2a^2c}{2ab} = \frac{2b^2 - 2a^2c}{2ab} = \frac{b^2 - a^2c}{ab}$$

$$x_2 = \frac{b}{2a} - \frac{b^2 - 2a^2c}{2ab} = \frac{2a^2c}{2ab} = \frac{ac}{b}.$$

§. 174. Besondere Eigenschaften der Wurzeln einer unrein-quadratischen Gleichung.

1) Addirt und multiplicirt man die für x aus der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \;.\;.\; (1)$$

$x_1 + x_2 = -p$. $x_1 + \frac{q}{x_1} = -p$ $x_1^2 + px_1 = -q$

$x_1 \cdot x_2 = q$ $x_1^2 + q = -px_1$ $(x_1 + \frac{p}{2})^2 = -q + \frac{p^2}{4}$

$x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$

gefundenen Werthe x_1 und x_2, so erhält man nach §. 173. 3) (5)

$$x_1 + x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right] + \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right] = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right] = q,$$

d. h. die Summe der zwei Wurzeln ist gleich dem entgegengesetzten Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten und das Produkt derselben gleich dem bekannten Gliede der auf Null reducirten Gleichung.

2) Da

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2$$

$$= \left[x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right]\left[x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}\right]$$

$$= \left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\right]$$

und nach §. 173, 3) (5)

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)} \text{ und } -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

die Werthe x_1 und x_2 sind, welche man für x aus obiger Gleichung findet, so erhalten wir die Beziehung

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

d. h. wenn w ein Werth der Unbekannten x einer quadratischen Gleichung ist, so ist stets (x — w) ein Faktor der auf Null reducirten Gleichung.

Anmerkungen. 1) Dieser Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, quadratische Gleichungen anzuschreiben, in welchen die Unbekannte bestimmte Werthe hat.

Soll z. B. $x_1 = 5$, $x_2 = -7$ werden, so erhält man aus

$$(x - 5)(x + 7) = 0$$

die entsprechende Gleichung

$$x^2 + 2x = 35.$$

2) Aus Obigem ersehen wir ferner, daß sich jedes Polynom von der Form $x^2 + px + q$ in ein Produkt zweier Faktoren $(x - \alpha)(x - \beta)$ zerlegen läßt, wenn α und β Werthe bedeuten, welche für x substituirt, das vorgelegte Polynom auf Null bringen.

3) Sind die beiden Wurzeln rational, so müssen offenbar auch p und q rational sein, umgekehrt jedoch gilt diese Behauptung nicht, wie sich solches leicht aus den Werthen x_1 und x_2 erkennen läßt.

Sind die Werthe von x irrational, p und q aber rational, so haben jene stets die Formen

$$a + \sqrt{b} \text{ und } a - \sqrt{b};$$

denn nur unter dieser Voraussetzung können

$$x_1 + x_2 \text{ und } x_1 x_2$$

rational ausfallen.

Sind die Werthe von x imaginär, p und q aber reell, so müssen jene von der Form sein:

$$a + \sqrt{-b} \text{ und } a - \sqrt{-b},$$

weil wieder nur dann

$$x_1 + x_2 \text{ und } x_1 x_2$$

reell sein werden.

4) Um nun noch zu zeigen, daß der Unbekannten einer quadratischen Gleichung nicht mehr als zwei Wurzeln entsprechen, sei x_3 ein von x_1 und x_2 verschiedener Werth, welcher für x eingeführt der Gleichung Genüge leiste, so daß man hätte

$$x_3^2 + px_3 + q = 0;$$

dann müßte aber nach 2) auch

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$$

sein, was ungereimt ist, da x_3 von x_1 und x_2 verschieden angenommen wurde. Der Unbekannten können somit nicht mehr als zwei Werthe entsprechen.

5) Ueber die Auflösung der quadratischen Gleichungen mittelst goniometrischer Funktionen findet man das Nähere im §. 22 der zweiten Auflage meines Lehrbuches der ebenen Trigonometrie.

§. 175. Aufgaben zur Uebung.

1) $x^2 - 4x = 60.$

2) $x^2 + 8x = 48.$

3) $x^2 - 15x = -56.$

3a) $x^2 + 11x + 28 = 0.$

3b) $x^2 - \frac{5}{6}x = 1.$

3c) $x^2 + 0{,}9x = 8{,}5.$

3d) $6x + 40 - x^2 = 0.$

3e) $x(2x - 9) - 40 = 5(1 - x) + x^2.$

4) $4x^2 + 24x = 108.$

5) $7x^2 - 5x - 150 = 0.$

5a) $3\frac{1}{3}x^2 - 4x = 96.$

5b) $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{28}{3} = 0.$

6) $2\frac{1}{2}x^2 - 4\frac{2}{3}x = 304.$

7) $4{,}05x^2 - 7{,}2x = 1476.$

7a) $8x - x^2 - 12 = 23 - 4x.$

7b) $3x^2 + 8x - 3 = 13x + 2x^2 + 21.$

7c) $5x^2 - 7x - 48 = 0.$

8) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{8} + \frac{4}{5}x^2 = 2\frac{3}{4} - (4 + \frac{3}{2}x)\,x.$

9) $(x + 4)(12x - 5) + 4\frac{1}{2} = (7x^2 - 10)\,8 - 12\frac{3}{4}x.$

10) $4x^2 - 5 = -62.$

11) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 20\frac{1}{2} = 0.$

12) $\frac{5 + 3x}{12 - 5x} + 14 = \frac{8 - 7x}{3 + 4x} + 15.$

13) $\frac{2x}{x + 2} - \frac{3x}{x - 2} + \frac{14}{3} = 0.$

14) $6 + \sqrt{(4x^2 - 36)} = 2\frac{4}{5}x.$

14a) $\sqrt{(4x + 1)} = \sqrt{7x + 2} - 1.$

15) $\sqrt{(3x^2 - 479)} + 31 = 3x.$

16) $\frac{24}{37 - 13x} - \frac{5}{x} = -4.$

17) $\frac{6 + 5x}{4\,(5 - x)} - \frac{3x - 4}{5\,(5 + x)} + \frac{5 - 7x}{25 - x^2} - \frac{89}{105} = 0.$

18) $ax^2 + bx = c.$

18a) $x^2 - bx = (a - b)\,a.$

18b) $x + \frac{b^2 \sqrt{a}}{x} = b^2 + \sqrt{a}.$

19) $abx^2 + bfx = df + adx.$

20) $\frac{n^2x}{p} + mnx^2 - \frac{2mn\,(3m^2 + n^2)}{p^2} + \frac{3m^2px + 2n^2}{p^2}$
$= \frac{2n^2\,(2m^3n + 1)}{p^2}.$

20a) $x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2 - b^2}{c^2} = 0.$

20b) $x^2 + a^2 - c^2 = 2ax + (b - 2c)\,b.$

20c) $(m^2 + 2n^2)\,x^2 + (2a + b)\,a - (3a - b)\,mx$
$= 3mnx^2 + 6b^2 - (4a + b)\,nx.$

20d) $(2ax - 1)\,bx + \frac{3}{2b^2} = \frac{(a^2 - 2)\,3x}{2a} + \frac{2x}{b} + \frac{5a + 6b}{4a^2b}.$

21) $\frac{a^2cx^2}{b} - \frac{2abx}{c^2} + \frac{bc}{a} = 0.$

22) $x\left(x - \frac{a}{b}\right) = c\left(1 - \frac{bx}{a}\right).$

23) $-\frac{a}{bx} - \frac{2}{a} + \frac{b}{ax} + \frac{x}{ab} = 0.$

24) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}+\frac{20-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=3.$

24a) $(\sqrt{16x}-5)(15-\sqrt{25x})=(\sqrt{36x}-7)(7-\sqrt{4x})$

25) Man soll zwei Zahlen angeben, deren Summe 25 und deren Produkt 136 ausmacht.

26) Welche Zahl wird von ihrem Quadrate um 8190 übertroffen?

27) Eine Zahl von der Eigenschaft zu finden, daß wenn man den achten und neunten Theil derselben mit einander multiplicirt, zum Produkte das Doppelte der Zahl selbst addirt und die Summe nochmals mit 23 multiplicirt, man 216 weniger erhält, als das Quadrat der zu suchenden Zahl beträgt.

28) Es kauft Jemand mehre Centner Kaffee für 200 fl. Hätte er für eben dieses Geld $\frac{1}{3}$ Centner mehr bekommen, so würde ihn der Centner 1 fl. weniger gekostet haben. Wie viel Centner hatte er eingekauft?

29) Das Quadrat einer Zahl ist um 45 größer als das Zwölffache dieser Zahl, wie heißt diese?

29a) Den Werth des Ausdrucks

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

zu bestimmen, wenn derselbe unendlich viele Glieder hat.

30) Auf die Frage wie alt A sei, antwortete dieser: Multiplicire ich mein Alter vor 4 Jahren mit dem nach 6 Jahren, so erhalte ich eine Zahl, welche als Jahreszahl 6 Jahre später ausdrückt, als mein Geburtsjahr. Wie alt war er, da er im Jahre 1860 gefragt wurde?

31) Man soll die Zahl 48 so theilen, daß das Produkt der Theile zu der Differenz der Quadrate derselben addirt 1116 ausmacht; wie heißen die Theile?

31a) Die Zahl a in zwei Theile so zu theilen, daß der eine Theil die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen der ganzen Zahl und dem anderen Theile.

32) Von welchen 2 Zahlen beträgt die Summe 36 und die Summe ihrer Quadrate 656?

33) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von welchen die eine um 10 größer ist als die andere, beträgt 212; wie heißen diese Zahlen?

34) Zwei Regimenter A und B marschirten zu gleicher Zeit von O nach O′ ab, und zwar A von O gegen O′ und B von O′ gegen O. Als sich dieselben unterwegs begegneten, hatte A schon a Meilen mehr zurückgelegt als B und es zeigte sich hiernach, daß wenn sie in gleichem Verhältnisse fortmarschirten, das Regiment A von jetzt an schon in a′ Tagen in O′ sein, während B erst in b′ Tagen nach O kommen würde. Wie weit sind die Orte O und O′ von einander entfernt?

35) Es sollen 50 fl. unter eine gewisse Anzahl Arbeiter vertheilt werden. Wären es 5 Arbeiter weniger gewesen, so hätte jeder 50 kr. mehr erhalten. Wie viel Arbeiter waren es und was erhielt jeder?

36) Es kauft Jemand unter sehr billigen Bedingungen eine goldene Dose. Bald darauf verkauft er sie wieder um 30 fl. und gewinnt $2\frac{1}{2}$ mal so viel Procente als ihn die Dose gekostet hatte. Was gab er dafür?

37) Ein Weinhändler kauft zweierlei Sorten Wein A und B zusammen 11 Ohm für 493 fl. 20 kr. Verkauft er die Sorte A zu dem Preise von B, so nimmt er 170 fl. ein, verkauft er aber die Sorte B zu dem Preise der Sorte A, so löst er $253\frac{1}{3}$ fl. Wie viel hatte er von jeder Sorte und was kostet die Maas einer jeden?

38) A geht von dem Orte P nach dem Orte Q in 15 Stunden. Mit ihm geht gleichzeitig B von einem um 5 Meilen mehr rückwärts gelegenen Orte R nach demselben Ziele Q ab und kommt hier zugleich mit A an, indem er zu je 7 Meilen Weges eine halbe Stunde Zeit weniger brauchte. Wie weit sind die beiden Orte P und Q von einander entfernt?

39) Es hinterläßt Jemand ein Vermögen von 24000 fl., welches unter seine Freunde zu gleichen Theilen vertheilt werden soll. Vor der Vertheilung starben aber 4 derselben und nun erhielt jeder der noch Lebenden 1000 fl. mehr; wie viel Freunde waren noch am Leben?

39a) Zwei Grundstücke A und B umfassen zusammen 850 Morgen und haben im verflossenen Jahre gleich viel ertragen.

Wäre der Ertrag eines Morgens vom Stücke A derselbe gewesen, wie der eines Morgens von B, so hätte A allein 16000 fl. abgeworfen und wenn B auf den Morgen so viel geliefert hätte als ein Morgen von A, so würde B 13500 fl. eingetragen haben. Wie groß war jedes der beiden Grundstücke?

40) Multiplicirt man den achten Theil einer Zahl mit dem fünften Theile derselben und vermehrt das Produkt um das Doppelte der Zahl, so erhält man um $6\frac{2}{5}$ weniger als das Dreifache der zu suchenden Zahl; wie heißt diese?

41) A und B legen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung 5500 fl. zusammen. A läßt sein Geld 6 Monate, B das seinige 8 Monate lang im Geschäfte. Nach Beendigung desselben wurde der Gewinn nach Verhältniß der Einlage und Zeit vertheilt und es bekam A als Einlage und Gewinn 2300 fl., B dagegen 4200 fl.; wie viel hatte jeder beigeschossen?

42) Von den Zinsen eines Kapitals von 40000 fl. wurden am Ende des ersten Jahres 600 fl. weggenommen und der Rest zu $\frac{1}{2}$% höher ausgeliehen als das Kapital selbst. Am Ende des zweiten Jahres war dadurch das ursprüngliche Kapital zu 42645 fl. angewachsen. Zu wie viel Procent stand das Kapital aus?

42a) A hat dem B 100 fl. nach 1 Jahre und 140 fl. nach 2 Jahren zu zahlen. Nach 6 Monaten wünscht aber B, daß A die Schuld mit 200 fl. baar tilgen möge. Wie viel % Rabatt bewilligte B dem A?

43) A gründete ein Geschäft mit einem gewissen Kapitale. Nachdem dasselbe 3 Jahre bestanden hatte, betheiligte sich B dabei mit einer Einlage, welche um den vierten Theil größer war als die des A. Wieder ein Jahr später trat noch C dem Unternehmen bei und legte 5000 fl. weniger ein als B. Nachdem das Geschäft im Ganzen 8 Jahre lang betrieben worden war, mußte es verkauft werden, mit einem Verlust von 5840 fl., der auf die Betheiligten nach Verhältniß ihrer Einlage und der Zeit, während welcher sie diese im Geschäft hatten, vertheilt wurde, so daß dem B nach Abzug seines Verlustes nur noch 23000 fl. zufielen. Wie viel hatte jeder eingelegt und wie groß war der Verlust eines jeden?

44) Der Umfang eines Rechtecks von 22,88 Quadratfuß

Inhalt ist um 13 Fuß größer als die größere der zwei anstoßenden Seiten; wie groß sind diese Seiten?

45) Die Höhe eines Dreiecks ist um 8 Fuß größer als die Grundlinie; der Inhalt beträgt 44,02 Quadratfuß. Wie groß ist die Grundlinie?

46) Die Summe der zwei Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= s$, die Summe der Hypotenuse und einer Kathete $= S$; welchen Ausdruck erhält man für den Inhalt des Dreiecks?

47) Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 259 Fuß, die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete 296 Fuß; wie groß ist der Inhalt dieses Dreiecks?

48) Der Umfang eines Quadrates ist um 48 Fuß größer als die Diagonale; wie groß ist der Inhalt desselben?

49) Die Summe der Inhalte zweier Würfel beträgt 280 Kubikfuß, die Summe zweier Kanten derselben 10 Fuß; wie groß sind die Seiten dieser Würfel?

50) Der Kubikinhalt eines Pyramidenstumpfes von 12 Fuß Höhe ist 916 Kubikfuß, der Inhalt der einen Grundfläche 25 Quadratfuß; wie groß ist die andere Grundfläche?

51) Der Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels von 18 Fuß Höhe beträgt 1186,92 Kubikfuß, der Radius der einen Basis mißt 6 Fuß; wie groß ist der Halbmesser der anderen Basis?

§. 176. Anwendung der quadratischen Gleichungen zur Werthbestimmung eines periodischen Kettenbruches.

Auch die Bestimmung des Werthes eines periodischen Kettenbruches führt auf die Auflösung einer quadratischen Gleichung. Bezeichnen wir nämlich den Werth des periodischen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots + \cfrac{1}{n_m + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ldots + \cfrac{1}{n_m \ldots}}}}}}}$$

durch x, so können wir offenbar setzen:

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_m + x}}}}$$

und wenn wir nun die Näherungswerthe des endlichen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_m}}}}$$

der Reihe nach durch

$$\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \cdots \frac{Z_{m-2}}{N_{m-2}}, \frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}, \frac{Z_m}{N_m}$$

bezeichnen, so ist nach §. 86, 2:

$$x = \frac{(n_m + x)\, Z_{m-1} + Z_{m-2}}{(n_m + x)\, N_{m-1} + N_{m-2}}$$

$$= \frac{xZ_{m-1} + (n_m Z_{m-1} + Z_{m-2})}{xN_{m-1} + (n_m N_{m-1} + N_{m-2})}$$

oder da nach §. 86, 2

$$n_m Z_{m-1} + Z_{m-2} = Z_m$$
$$n_m N_{m-1} + N_{m-2} = N_m$$

so folgt

$$x = \frac{xZ_{m-1} + Z_m}{xN_{m-1} + N_m}$$

und hieraus die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{N_m - Z_{m-1}}{N_{m-1}}\, x = \frac{Z_m}{N_{m-1}}$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{Z_{m-1} - N_m \pm \sqrt{(4\, N_{m-1} Z_m + (N_m - Z_{m-1})^2)}}{2\, N_{m-1}}.$$

Da für unsere Zwecke nur das obere Zeichen des Doppelzeichens von Werth sein kann, so folgern wir hieraus, daß sich allgemein jeder periodische Kettenbruch auf die Form

$$\frac{a + \sqrt{b}}{c}$$

bringen läßt.

Es sei z. B. der Werth des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2} \ldots}}$$

zu bestimmen.

Setzt man $x = \frac{1}{2 + x}$,

so folgt hieraus $x^2 + 2x = 1$;

also ist $x = -1 + \sqrt{2} = 0{,}4142$.

Ebenso erhält man für den Werth des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$$

aus der Gleichung

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + x}}$$

$$x^2 + 3x = 3$$

und hieraus

$$x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} = 0{,}791288 \ldots$$

§. 177. Aufgaben zur Uebung.

Die Werthe der periodischen Kettenbrüche zu bestimmen, wenn die Nenner der jedesmaligen Periode der Reihe nach sind:

1) 1.	2) 2, 3.
1a) 4.	3) 1, 1, 2.
1b) 10.	4) 1, 2, 1.
1c) 3, 4.	5) 1, 2, 1, 3.
1d) 5, 2.	6) 3, 1, 2, 2, 1, 1.

○ §. 178. Anwendung der Kettenbrüche auf die Ausziehung der Quadratwurzel.

Die im §. 176 gemachte Bemerkung, daß man durch die Zurückführung eines periodischen Kettenbruches zur irrationalen Form $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ gelangt, führt uns unmittelbar zur umgekehrten Aufgabe, nämlich eine Quadratwurzel durch einen periodischen Kettenbruch auszudrücken und durch Aufsuchung der Näherungswerthe desselben die vorgelegte Wurzel auszuziehen.

Um das hierbei zu befolgende Verfahren sogleich an einem numerischen Beispiele zu erläutern, sei $\sqrt{45}$ der zu bestimmende Ausdruck.

Da $\sqrt{45}$ zwischen 6 und 7 liegt, so ziehen wir die Ganzen heraus und setzen

$$\sqrt{45} = 6 + \frac{\sqrt{45} - 6}{1}.$$

Bezeichnen wir nun den fehlenden Theil $\frac{\sqrt{45} - 6}{1}$ durch $\frac{1}{n_1}$, wo offenbar $n_1 > 1$, so folgt für

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{45} - 6} = \frac{\sqrt{45} + 6}{9} = 1 + \frac{\sqrt{45} - 3}{9}$$

und wenn wir wieder

$$\frac{\sqrt{45} - 3}{9} = \frac{1}{n_2}$$

setzen, so wird

$$n_2 = \frac{9}{\sqrt{45} - 3} = \frac{\sqrt{45} + 3}{4} = 2 + \frac{\sqrt{45} - 5}{4} = 2 + \frac{1}{n_3}.$$

Durch Fortsetzung dieser Operationsweise erhält man ferner:

$$n_3 = \frac{4}{\sqrt{45} - 5} = \frac{\sqrt{45} + 5}{5} = 2 + \frac{\sqrt{45} - 5}{5} = 2 + \frac{1}{n_4}$$

$$n_4 = \frac{5}{\sqrt{45} - 5} = \frac{\sqrt{45} + 5}{4} = 2 + \frac{\sqrt{45} - 3}{4} = 2 + \frac{1}{n_5}$$

$$n_5 = \frac{4}{\sqrt{45} - 3} = \frac{\sqrt{45} + 3}{9} = 1 + \frac{\sqrt{45} - 6}{9} = 1 + \frac{1}{n_6}$$

$$n_6 = \frac{9}{\sqrt{45} - 6} = \frac{\sqrt{45} + 6}{1} = 12 + \frac{\sqrt{45} - 6}{1}.$$

Da nun wieder der Werth, den wir oben durch $\frac{1}{n_1}$ bezeichnet haben, auftritt, so wiederholt sich von hier die Operation und es ist somit

$$\sqrt{45} = 6 + \frac{1}{n_1} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{n_2}} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{n_3}}} = \ldots.$$

$$= 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind der Reihe

$$6;\ 7;\ \frac{20}{3};\ \frac{47}{7};\ \frac{114}{17};\ \frac{161}{24};\ \frac{2046}{305}\ \text{ꝛc.}$$

oder $\quad 6;\ 7;\ 6{,}\dot{6};\ 6{,}71;\ 6{,}705;\ 6{,}708\dot{3};\ 6{,}70819$ ꝛc.

Der W. W. von $\sqrt{45}$ ist auf 6 Decimalstellen $= 6{,}708204$.

§. 179. Aufgaben zur Uebung.

1) $\sqrt{78}$.
2) $\sqrt{51}$.
3) $\sqrt{67}$.
4) $\sqrt{27}$.
5) $\sqrt{59}$.
6) $\sqrt{24}$.

§. 180. Gleichungen, welche sich nach Art der quadratischen auflösen lassen.

Jede Gleichung von der Form

$$x^{2n} + px^n = q,$$

oder
$$\sqrt[n]{x} + p\sqrt[2n]{x} = q$$

läßt sich auf eine quadratische Gleichung zurückführen.

Denn setzt man im ersten Falle x^n, im zweiten $\sqrt[2n]{x} = y$, so wird bezüglich x^{2n} und $\sqrt[n]{x} = y^2$ und obige Formen gehen über in

$$y^2 + py = q.$$

Hat man hieraus nach der früher angegebenen Methode y bestimmt, so wird

im ersten Falle $x = \sqrt[n]{y}$,
„ zweiten „ $x = y^{2n}$.

Beispiele.

1) $x^4 - 8x^2 = 9$
$x^2 = y$ oder $x = \sqrt{y}$ gesetzt, gibt:
$y^2 - 8y = 9$,
woraus folgt:
$y_1 = 4 + 5 = 9$, $y_2 = 4 - 5 = -1$.
Für x erhält man demnach die vier Werthe:
$x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = \sqrt{-1}$; $x_4 = -\sqrt{-1}$.

2) $x - 5\sqrt{x} = -4$.
Setze $\sqrt{x} = y$, $x = y^2$,
so folgt aus $y^2 - 5y = -4$
$y_1 = 4$; $y_2 = 1$.
Demnach ist
$x_1 = 4^2 = 16$; $x_2 = 1$.

Anmerkung. Außer den Gleichungen von der oben angeführten Form gibt es noch manche andere, die sich durch eine geschickt gewählte Substitution einer zweiten Unbekannten auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen. Eine allgemeine Regel zur Auflösung solcher Gleichungen läßt sich jedoch nicht angeben.

§. 181. Aufgaben zur Uebung.

1) $x^4 - 13x^2 = -36$.
2) $64x^4 - 364x^2 - 225 = 0$.
3) $\sqrt{y} - 8\sqrt[4]{y} + 15 = 0$.*)
4) $15z + 6\sqrt{z} = 13\frac{4}{5} - 8\sqrt{z}$.
4a) $5(y^2 - 5)^2 - 7(y - 5) = 52$.
5) $x^6 - 9x^3 = -8$.
6) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$.
7) $\sqrt[3]{(x + 30\frac{1}{2})} - \sqrt[3]{(x - 30\frac{1}{2})} = 1$.
8) $(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 1260$.
9) $x^4 - 5x^3 + \frac{83}{16}x^2 - 5x + 1 = 0$.

*) Bei dieser und den nachfolgenden Aufgaben sind nur die reellen Werthe der Unbekannten zu bestimmen.

9a) $x^4 - 3x^3 - \frac{634}{36}x^2 - 3x + 1 = 0.$

10) $\frac{1}{\sqrt{4 + x}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x}} = \frac{5}{6}.$

11) $(a - bx)\sqrt{x} = a\sqrt{x - a} + bx\sqrt{x + a}.$

b) Mit mehren Unbekannten.

§. 182. Auflösung mehrer Beispiele.

Im Allgemeinen führt die Auflösung zweier Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Unbekannten nach den oben gelehrten Methoden zu Endgleichungen, welche den zweiten Grad übersteigen; ist jedoch eine derselben nur vom ersten Grade, so ist die Schlußgleichung stets vom zweiten Grade. Durch vortheilhafte Behandlungsweise kann man jedoch häufig die Endgleichungen von höherem Grade umgehen und dafür quadratische Gleichungen erhalten. Allgemeine Vorschriften lassen sich aber dafür nicht angeben und Uebung und richtiges Auffassen der vorgelegten Aufgabe sind wohl die geeignetsten Mittel, welche hier zum Ziele führen. Statt aller weiteren Erörterungen wollen wir darum für eine Reihe von Aufgaben die bei der Auflösung einzuschlagenden Wege in Kürze angeben.

1) I $x + y = a$
II $xy = b^2$

Erste Auflösung. Substituire aus II den Werth von

$$y = \frac{b^2}{x}$$

in die Gleichung I, so folgt

$$x^2 - ax = -b^2$$

und hieraus

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}$$

Durch Substitution dieses Werthes in Gleichung I findet man

$$y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}.$$

Die zu suchenden Werthe sind somit:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2},\ x_2 = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}$$

$$y_1 = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2},\ y_2 = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}.$$

Da also

$$x_1 = y_2 \text{ und } y_1 = x_2,$$

so genügt der Aufgabe eigentlich nur ein Paar zusammengehöriger Werthe.

Anmerkung. Aus vorstehender Aufgabe ergibt sich zugleich die Wichtigkeit der richtigen Erkenntniß der zusammengehörigen Werthe der Unbekannten. Sorgfalt bei der Auflösung und aufmerksame Betrachtung der Natur der vorgelegten Aufgabe führen immer sicher zu richtigen Resultaten.

Zweite Auflösung. Substituire den Werth einer Unbekannten aus I in II u. s. w.

Dritte Auflösung. Wende die Comparationsmethode an.

Vierte Auflösung. Multiplicire die Gleichung I mit x und subtrahire von der erhaltenen Gleichung die Gleichung II.

Fünfte Auflösung.

$$\left.\begin{array}{ll} I^2 =) & x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \\ II.4 =) & 4xy = 4b^2 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b^2$$

also $x - y = \pm \sqrt{(a^2 - 4b^2)}$

und nach I $x + y = a$

folglich $2x = a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^2)}$ u. s. w.

2) I $x^2 + y^2 = a^2$

II $x + y = b$

Erste Auflösung. Substituire aus II den Werth der einen Unbekannten z. B. für

$$y = b - x$$

in die Gleichung I, so folgt:

$$x^2 - bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

also wird $x = \dfrac{b \pm \sqrt{(2a^2 - b^2)}}{2}$

und nach I $y = \dfrac{b \mp \sqrt{(2a^2 - b^2)}}{2}$.

Den Gleichungen entspricht somit nur ein Paar zusammengehöriger Werthe.

Zweite Auflösung. Quadrirt man Gleichung II, so folgt

$$x^2 + y^2 + 2xy = b^2,$$

oder nach Gleichung I

$$a^2 + 2xy = b^2,$$

oder $$\text{III } xy = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

II und III sind nun leicht nach Aufgabe 1) zu behandeln.

Dritte Auflösung. Erhebt man die Gleichung II zum Quadrat und subtrahirt hiervon die Gleichung I, so folgt:

$$\text{III } 2xy = b^2 - a^2.$$

Subtrahirt man nun III von I, so erhält man

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - b^2,$$

oder $$\text{IV } x - y = \pm \sqrt{(2a^2 - b^2)}.$$

Aus II und IV lassen sich nun x und y leicht durch Addition und Subtraction bestimmen.

3) $$\begin{array}{ll} \text{I} & x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \text{II} & x + y = b \end{array}$$

Erste Auflösung. Durch Substitution des Werthes der einen Unbekannten aus II in I.

Man findet $$x = \frac{b \pm \sqrt{(4a^2 - 3b^2)}}{2}$$

$$x = \frac{b \mp \sqrt{(4a^2 - 3b^2)}}{2}.$$

Man erhält somit wiederum nur ein Paar zusammengehöriger Werthe.

Zweite Auflösung. Subtrahirt man die Gleichung I von dem Quadrate der Gleichung II, so folgt

$$\text{III } xy = b^2 - a^2.$$

II und III lassen sich nun nach Aufgabe 1) lösen, oder man bilde III . 3 — I u. s. w.

4) $$\begin{array}{ll} \text{I} & x^2 + y^2 = a^2 \\ \text{II} & xy = b^2 \end{array}$$

Erste Auflösung. Substituirt man aus II für $y = \frac{b^2}{x}$ in I, so folgt

$$x^4 - a^2x^2 = - b^4$$

und hieraus

$$x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}.$$

Somit wird nach I

$$y^2 = \frac{a^2 \mp \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}.$$

Die zusammengehörigen Werthe sind daher nach II:

$$x_1 = \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}$$

und $$x_2 = -\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}.$$

Den Gleichungen entsprechen somit zwei Paare zusammengehöriger Werthe.

Zweite Auflösung. Aus II folgt

$$\text{III } 2xy = 2b^2,$$

somit aus

$$\text{I} + \text{III } x + y = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

und aus $$\text{I} - \text{III } x - y = \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Hieraus können nun x und y leicht durch Addition und Subtraction gefunden werden.

5) $$\text{I } x^2 + y^2 - x - y = a$$
$$\text{II } x + xy + y = b$$

Auflösung. Aus II folgt

$$\text{III } x + y = b - xy,$$

somit nach I, wenn wir

$$x + y = z$$

setzen: $$\text{IV } x^2 + y^2 - z = a.$$

Aus III erhält man aber

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2$$

und $$xy = b - z,$$

also auch $$x^2 + y^2 + 2b - 2z = z^2$$

oder $$\text{V } x^2 + y^2 - z^2 - 2z = -2b.$$

Subtrahirt man nun V von IV, so ergibt sich die Gleichung

$$z^2 + z = 2b + a$$

und hieraus für

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{8b + 4a + 1}}{2}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$x + y = z$$

und $$xy = b - z$$

lassen sich nun leicht die Werthe von x und y nach Aufgabe 1) bestimmen.

6) $$\begin{array}{ll} \text{I} & x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = a^2 \\ \text{II} & xy - y^2 = b^2 \end{array}$$

Auflösung. Gebe der Gleichung I die Form

$$(x + y)^2 + 2\,(x + y) = a^2,$$

suche hieraus

$$\text{III } x + y = -1 \pm \sqrt{(a^2 + 1)},$$

setze nach II

$$x - y = \frac{b^2}{y}$$

und subtrahire diese Gleichung von III um eine Gleichung in y zu erhalten u. s. w.

7) $$\begin{array}{ll} \text{I} & x^3 + y^3 = a^3 \\ \text{II} & x + y = b \end{array}$$

Erste Auflösung. Substituire den Werth der einen Unbekannten aus II in I. Man findet das eine Paar zusammengehöriger Werthe:

$$x_1 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{4a^3 - b^3}{12b}};\ y_1 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{4a^3 - b^3}{12b}}.$$

Zweite Auflösung. Aus I und II folgt:

$$\sqrt[3]{(a^3 - y^3)} = b - y.$$

Erhebe nun beide Seiten zur dritten Potenz u. s. w.

Dritte Auflösung. Erhebt man die Gleichung II zur dritten Potenz und zieht davon die Gleichung I ab, so folgt:

$$3x^2y + 3xy^2 = b^3 - a^3$$

oder $$3xy\,(x + y) = b^3 - a^3,$$

oder nach II: $$3bxy = b^3 - a^3;$$

also ist $$\text{III } xy = \frac{b^3 - a^3}{3b}.$$

Behandle nun II und III nach Aufgabe 1.

8) $$\begin{array}{ll} \text{I} & xy = a^2 \\ \text{II} & xz = b^2 \\ \text{III} & yz = c^2 \end{array}$$

Auflösung. Durch Multiplication der drei Gleichungen erhält man

$$\text{IV}\quad x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Dividirt man nun Gleichung IV durch das Quadrat einer jeden der drei gegebenen Gleichungen, so erhält man der Reihe nach

$$z = \pm \frac{bc}{a},\ y = \pm \frac{ac}{b},\ x = \pm \frac{ab}{c}$$

wo, nach der Natur der Aufgabe, entweder alle Werthe zugleich positiv oder zugleich negativ zu nehmen sind.

9) $\text{I}\quad xy + xz = a^2$

$\text{II}\quad xy + yz = b^2$

$\text{III}\quad xz + yz = c^2$

Auflösung. Addirt man vorstehende drei Gleichungen, so folgt

$$xy + xz + yz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

und wenn man hiervon der Reihe nach jede der drei gegebenen Gleichungen subtrahirt:

$$yz = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$xz = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$xy = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Die Bestimmung der Unbekannten geschieht nun auf die für Aufgabe 8 bezeichnete Weise.

10) $\text{I}\quad x^y = a$

$\text{II}\quad x^{y^2+m} = b$

Erste Auflösung. Erhebt man die Gleichung II auf die Potenz y, so folgt:

$$x^{y(y^2+m)} = b^y$$

oder

$$a^{y^2+m} = b^y$$

und wenn man beiderseits logarithmirt:

$$y^2 \log a - y \log b = - m \log a$$

oder

$$y^2 - \frac{\log b}{\log a}\, y = - m.$$

Bestimme nun aus dieser quadratischen Gleichung die Werthe von y und alsdann mittelst der Gleichung I die zugehörigen Werthe von x.

Zweite Auflösung. Logarithmirt man beide Gleichungen, so folgt: I $y \log x = \log a$

II $(y^2 + m) \log x = \log b$.

Substituirt man nun aus der ersten Gleichung den Werth von

$$\log x = \frac{\log a}{y}$$

in die zweite, so ergibt sich:

$$(y^2 + m) \frac{\log a}{y} = \log b$$

oder

$$y^2 - \frac{\log b}{\log a} y = - m,$$

wie vorhin.

§. 183. Aufgaben zur Uebung.

1) I $x + y = - 6$; II $xy = - 2592$.
1a) I $x + y = 82$; II $xy = 657$.
1b) I $x - y = 24$; II $xy = 4212$.
2) I $x - y = 5$; II $xy = 300$.
3) I $x^2 + y^2 = 1274$; II $x = 5y$.
4) I $x^2 + y^2 = 125$; II $x + y = 5$.
5) I $x^2 + xy + y^2 = 63$; II $x - y = - 3$.
6) I $x^2 - y^2 = 40$; II $xy = 21$.
6a) I $x^2 + y^2 = 6530$; II $xy = 3233$.
6b) I $x^2 + y^2 = 12385$; II $x - y = 11$.
6c) I $x^2 - y^2 = 3168$; II $x + y = 66$.
7) I $x^2 + y^2 + x + y = 176$;
II $x^2 - y^2 + x - y = 136$.
8) I $xy = x + y$; II $x^2 - y^2 = x + y$.
9) I $x^2 + y^2 - x - y = 92$;
II $x + y + xy = 32$.
10) I $x^2 + y^2 + x + y = 510$;
II $x^2 + y^2 - x - y = 490$.
11) I $\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} = 6$; II $x - y = 4$.
11a) I $x^2 - xy - 12y = 0$; II $y^2 - xy + \frac{4x}{3} = 0$.
12) I $x^2 + xy = 150$; II $y^2 + xy = 75$.
13) I $x^2 + xy - y^2 = - 31$;
II $x^2 - xy + y^2 = 49$.

14) I $x + y + \sqrt{x + y} = 12$;
II $x^2 + y^2 = 45$.

15) I $x + y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$;
II $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$.

16) I $x^3 + y^3 = 72$; II $x + y = 6$.

16a) I $x^3 + y^3 = 16021$; II $x + y = 37$.

16b) I $x^3 - y^3 = 57752$; II $x - y = 8$.

17) I $x^4 + y^4 = 337$; II $x - y = 1$.

18) I $x^5 + y^5 = 4149$; II $x + y = 9$.

19) I $xy = 35$; II $xz = 15$; III $yz = 21$.

20) I $\frac{x^2 + y^2}{xyz} = \frac{5}{6}$; II $\frac{x^2 + z^2}{xyz} = \frac{5}{3}$;
III $\frac{y^2 + z^2}{xyz} = \frac{13}{6}$.

21) I $\frac{xyz}{x + y} = \frac{9}{2}$; II $\frac{xyz}{x + z} = \frac{18}{7}$; III $\frac{xyz}{y + z} = 2$.

22) I $xyz = 6$; II $xyu = 8$;
III $xzu = 12$; IV $yzu = 24$.

22a) I $3^{\sqrt{x}} \cdot 9^{\sqrt{y}} = 243$;
II $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{y}} = \frac{1}{6561}$.

23) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe = 56 und deren Produkt = 720 ist.

24) Die Summe zweier Zahlen beträgt 44, die ihrer Quadrate 1000; wie heißen diese Zahlen?

25) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 2, das Quadrat der Summe der beiden Zahlen ist um 109 größer als das Produkt derselben; wie heißen die Zahlen?

26) A hat zweierlei Sorten Wein. Nimmt er die Summe der Quadratzahlen der Anzahl Maase beider Sorten, so erhält er 13844; nimmt er aber das Produkt beider, so bekommt er 6200. Wie viel Maas hat er von jeder Sorte?

27) Die Quadratsumme zweier Zahlen um die Summe dieser Zahlen vermindert gibt 222, dagegen die Summe der Zahlen um das Produkt derselben vermehrt 142; welches sind die Zahlen?

28) Addirt man zur Quadratsumme zweier Zahlen die Summe dieser, so erhält man 1840; subtrahirt man aber diese Summe

von jener Quadratsumme, so bleibt 1722 als Rest. Wie heißen die beiden Zahlen?

29) Addirt man zu dem Quadrate der einen von zwei Zahlen das Produkt dieser Zahlen, so erhält man 76, addirt man aber dieses Produkt zu dem Quadrate der anderen Zahl, so beträgt die Summe 285. Wie heißen die Zahlen?

30) Addirt man die Quadratsumme zweier Zahlen zur Differenz dieser Zahlen, so erhält man 292 als Summe, multiplicirt man aber beide Werthe mit einander, so erscheint 3091 als Produkt. Wie heißen die beiden Zahlen?

31) Eine dreiziffrige Zahl von folgender Beschaffenheit zu finden: Die Quadratsumme der Ziffern der Zehner und Hunderter soll 80, das Produkt der Ziffern der Einer und Hunderter 56 und die Differenz der Quadrate der Ziffern der Einer und Zehner 33 betragen. Wie heißt die Zahl?

32) Die Summe der beiden mittleren Glieder einer geometrischen Proportion beträgt 9, die der äußeren 12 und die Summe der Quadrate aller vier Glieder 145; wie heißt die Proportion?

33) Die Differenz der beiden mittleren Glieder einer geometrischen Proportion ist $= 5$, die der beiden äußeren $= 9$ und die Summe der Quadrate aller vier Glieder $= 250$; wie heißt die Proportion?

34) Man soll zwei Zahlen angeben, welche so beschaffen sind, daß das Quadrat der ersten zum Produkte aus der zweiten in die mittlere geometrische Proportionale der beiden Zahlen addirt, die Summe 81 liefert, dagegen das Quadrat der zweiten zum Produkte aus der ersten in jene Mittlere addirt, die Summe 162 gibt; wie heißen die beiden Zahlen?

34a) Man soll die Basis x eines Logarithmensystems von der Eigenschaft finden, daß

$$\overset{x}{\log}\, 1000 = (\overset{x}{\log}\, 10)^2 + 2.$$

34b) Die Basis x eines Logarithmensystems zu berechnen, für welches die Beziehung besteht:

$$\overset{x}{\log}\, 1000 = 3\, (\overset{x}{\log}\, 10)^2 - 6.$$

C. Auflösung der unbestimmten Gleichungen.

§. 184. Erklärung.

Unbestimmte oder diophantische*) Aufgaben heißen solche, welche auf weniger von einander unabhängige Gleichungen führen, als sie selbst Unbekannte enthalten. Je nachdem die Aufgabe nur eine oder mehr Unbekannte enthält, als sich Gleichungen bilden lassen, heißt dieselbe bezüglich einfach oder mehrfach unbestimmt.

Wir unterscheiden unbestimmte Gleichungen des ersten, zweiten rc. Grades mit zwei und mehr Unbekannten.

a) Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

α) Mit zwei Unbekannten.

§. 185. Satz.

1) In der Gleichung

$$ax \pm by = \pm c,$$

wo a, b und c ganze, keinen gemeinschaftlichen Theiler enthaltende Zahlen bezeichnen, können den Unbekannten nur dann ganze Zahlen entsprechen, wenn auch a und b keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, also relative Primzahlen sind.

Beweis. Sind a und b durch irgend eine Zahl n theilbar, so muß auch $ax \pm by$, somit auch die ganze Zahl c durch jene Zahl theilbar sein, was mit der Voraussetzung im Widerspruche steht.

So ist z. B. die Auflösung der Aufgabe $12x + 20y = 85$ nach ganzen Zahlen für x und y unmöglich, da $12x + 20y$ stets ein Vielfaches von 4 ausdrückt, demnach niemals 85 sein kann.

Zusatz.

Setzen wir voraus, daß den Unbekannten in den hier vorkommenden Aufgaben nur ganze positive Werthe zukommen sollen,

*) Nach dem alexandrinischen Mathematiker Diophantus, der um die Mitte des vierten Jahrhunderts n. Chr. gelebt und sich vielfach mit der Lösung hierher gehöriger Aufgaben beschäftigt hat.

so ist die Anzahl der Auflösungen für eine Gleichung von der Form

$$ax + by = c$$

stets eine begrenzte, da $by < c$ sein muß, wenn x positiv ausfallen soll; dagegen für eine Gleichung von der Form

$$ax - by = c$$

ist dieselbe unendlich groß.

§. 186. Aufgabe.

Eine unbestimmte Gleichung von der Form

$$ax \pm by = c$$

für ganze positive Werthe der Unbekannten aufzulösen.

Auflösung.

Um das Verfahren sogleich an einem numerischen Beispiele zu erläutern, sei

$$8x - 3y = 11$$

die vorgelegte Gleichung.

Man drücke zunächst diejenige Unbekannte, deren Coefficient der kleinere ist, in der ganzen Zahl und der anderen Unbekannten aus und zwar in der Weise, daß man den Theil derselben, der jedenfalls eine ganze Zahl ausdrückt, sogleich ausscheidet.

In vorliegendem Falle erhält man dann:

$$y = \frac{8x - 11}{3} = 2x - 3 + \frac{2x - 2}{3}.$$

Soll nun y eine ganze Zahl sein, so muß offenbar $\frac{2x - 2}{3}$ ebenfalls eine solche sein, da $2x - 3$ für jedes ganze x eine ganze Zahl wird. Bezeichnen wir nun die durch $\frac{2x - 2}{3}$ dargestellte ganze Zahl durch a und setzen also

$$\frac{2x - 2}{3} = a,$$

so folgt für

$$x = \frac{3a + 2}{2} = a + 1 + \frac{a}{2}.$$

Damit nun x eine ganze Zahl werde, muß $\frac{a}{2}$ eine solche sein. Setzen wir darum

$$\frac{a}{2} = b,$$

so wird $a = 2b$

und wir erhalten somit durch Substitution für die Unbekannten folgende ganzzahligen Formen:

$$x = 2b + 1 + b = 3b + 1$$
$$y = 2x - 3 + 2b = 8b - 1$$

worin für b alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ gesetzt werden können. Die Aufgabe läßt demnach unendlich viele Auflösungen zu.

Man findet z. B. für

$$b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$
$$x = 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16, \ldots$$
$$y = 7,\ 15,\ 23,\ 31,\ 39, \ldots$$

Anmerkung.

Die Gleichung von der Form

$$ax - by = \pm c$$

kann auch durch Anwendung der Kettenbrüche aufgelöst werden.

Setzen wir zu diesem Ende vorerst $c = 1$, so wird

$$ax - by = \pm 1,$$

oder
$$\frac{x}{y} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 1}{ay}.$$

Verwandelt man nun den Bruch $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch und bestimmt den vorletzten Näherungswerth desselben also $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$, so ist nach §. 88, 2

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 1}{a\,N_{n-1}},$$

oder
$$a\,Z_{n-1} - b\,N_{n-1} = \pm 1;$$

folglich auch
$$ac\,Z_{n-1} - bcN_{n-1} = \pm c.$$

Setzt man somit

$$x = c\,Z_{n-1} \text{ und } y = c\,N_{n-1}$$

so ergeben sich, je nachdem

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{b}{a}$$

positiv oder negativ ist, sämmtliche Werthe der Unbekannten aus den Auflösungsformeln

$$x_n = x + nb = c\,Z_{n-1} + nb$$
$$y_n = y + na = c\,Z_{n-1} + na,$$

oder
$$x_n = nb - x = nb - c\,Z_{n-1}$$

und
$$y_n = na - y = na - c\,Z_{n-1},$$

wo n willkürlich ist.

Um z. B. die Gleichung

$$37x - 24y = 41$$

nach vorstehender Methode aufzulösen, verwandle man $\frac{24}{37}$ in einen Kettenbruch. Man findet als Nenner der Reihe nach: 1, 1, 1, 5, 2; folglich nach §. 86

	1,	1,	1,	5,	2
0	1	1	2	11	24
1	1	2	3	17	37

somit $$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{11}{17}$$
und $$x = 41 \,.\, 11 = 451$$
$$y = 41 \,.\, 17 = 697.$$

Nun ist aber $\frac{11}{17} - \frac{24}{37}$ negativ, folglich heißen die Auflösungsformeln:
$$x_n = 24n - 451$$
$$y_n = 37n - 697.$$

Für jeden Werth von n innerhalb der Grenzen $-\infty$ bis $+\infty$ erhält man die entsprechenden Werthe von x und y. Um für diese Unbekannten nur ganzzahlige Werthe zu erhalten, müssen auch für n ganze Zahlen substituirt werden. Will man nur die ganzen positiven Werthe von x und y kennen, so muß stets $n > \frac{451}{24}$ und $> \frac{697}{37}$, also jedenfalls $n > 18$ angenommen werden.

So erhält man z. B. der Reihe nach für
$$n = 19,\ 20,\ 21,\ 22, \ldots$$
$$x = 5,\ 29,\ 53,\ 77, \ldots$$
$$y = 6,\ 43,\ 80,\ 117, \ldots$$

Ist die Gleichung von der Form
$$ax + by = \pm c,$$
so bestimme man zuerst die allgemeinen Werthe für x und y, welche der Gleichung $ax - by = \pm c$ genügen, und nehme alsdann die für y gefundenen Werthe negativ.

Beispiele.

1) Zwei Fässer A und B enthalten zusammen für 125 fl. Wein von verschiedener Güte. Die Maas aus dem Fasse A kostet 30 kr., die aus dem Fasse B nur 20 kr. Wie viel Maas befinden sich in jedem Fasse?

Auflösung.

Befinden sich in dem Fasse A x Maas, in dem Fasse B y Maas,

so soll sein $$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 125$$
oder $$3x + 2y = 750,$$
folglich ist $$y = \frac{750 - 3x}{2} = 375 - x - \frac{x}{2}.$$

Aus $$\frac{x}{2} = a$$
folgt aber $$x = 2a$$
und die Auflösungsformeln sind daher
$$x = 2a$$
$$y = 375 - 2a - a = 375 - 3a.$$

Man erhält somit für
$$a = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots 124$$
$$x = 2,\ 4,\ 6, \ldots\ldots 248$$
$$y = 372,\ 369,\ 366, \ldots\ldots 3.$$

Der Aufgabe entsprechen hiernach 124 Auflösungen.

2) Welche Zahlen lassen durch 4 dividirt 2, und durch 5 dividirt 3 zum Rest?

Auflösung.

Bezeichnen wir die Quotienten in beiden Fällen bezüglich durch x und y, so soll nach der Aufgabe die Bedingungsgleichung bestehen:

$$4x + 2 = 5y + 3$$

woraus man erhält

$$x = \frac{5y + 1}{4} = y + \frac{y + 1}{4}.$$

Setzt man $\frac{y + 1}{4} = a,$

so wird $y = 4a - 1.$

Die Auflösungsformeln für die Quotienten heißen daher

$$x = 4a - 1 + a = 5a - 1$$
$$y = 4a - 1;$$

somit sind die zu suchenden Zahlen von der Form:

$$4(5a - 1) + 2 = 20a - 2$$

oder $5(4a - 1) + 3 = 20a - 2.$

Je nachdem man nun

$$a = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

setzt, erhält man als verlangte Zahl

$$18, 38, 58, 78, 98, \ldots.$$

§. 187. Aufgaben zur Uebung.

1) Welche ganze positive Werthe entsprechen den Unbekannten in der Gleichung $3x + 4y = 90$?

2) Zwei ganze positive zweiziffrige Zahlen von der Eigenschaft anzugeben, daß die Summe aus der sechsfachen ersten und zehnfachen zweiten 222 ausmacht.

3) Addirt man den vierten Theil der einen von zwei zweiziffrigen Zahlen zum fünften Theile der anderen, so erhält man 31 als Summe; wie heißen die zwei Zahlen?

4) Es verkauft Jemand das Pfund einer Waarensorte um 20 kr., das einer anderen um 12 kr., und löst im Ganzen 14 fl.; wie viel Pfund hat er von jeder Sorte verkauft?

4a) Es wurde eine Anzahl Buchen- und Eichenstämme zusammen um 4450 fl. verkauft. Im Durchschnitt kostete 1 Buchenstamm 10 fl., 1 Eichstamm 15 fl. Wie viel Stämme von jeder Gattung wurden verkauft, wenn man weiß, daß die Anzahl sämmtlicher nahezu 240 betrug?

5) Man soll eine dreiziffrige Zahl angeben, welche durch 85 dividirt 8 und durch 37 dividirt 15 zum Rest läßt.

6) Welche Vielfache von 20 lassen durch 29 dividirt 15 zum Rest?

7) Die Zahl 726 soll in zwei Theile zerlegt werden, von welchen der eine durch 16, der andere durch 27 theilbar ist; wie heißen diese Theile?

8) Man soll 219 fl. in preußischen Thalern und Kronenthalern bezahlen; wie viel Stück muß man von jeder dieser Geldsorten nehmen?

9) Die Zahl 942 in zwei solche Theile zu zerlegen, daß der eine durch 54 dividirt 30, der andere durch 35 dividirt 3 als Rest läßt; wie heißen die Theile?

10) Ein Bauer bringt nahezu 100 Stück Geflügel, nämlich Hühner und Tauben zu Markt. Für jedes Stück der ersten bekam er 28 kr., für jede Taube 12 kr., im Ganzen nahm er für die Tauben 28 kr. mehr ein als für die Hühner. Wie viel Stück hatte er von jeder Gattung?

11) Es kaufte Jemand zweierlei Sorten einer Waare. Für ein Pfund der besseren gab er 36 kr., für ein Pfund der geringeren nur 24 kr. und gab so für diese Sorte im Ganzen 48 kr. mehr aus als für jene. Wie viel Pfund hatte er von jeder Sorte gekauft?

12) Welche ganze positive Zahlen sind durch 8 theilbar und lassen durch 11 dividirt 7 zum Rest?

13) Den Bruch $\frac{23}{30}$ in zwei positive Brüche zu zerlegen, deren Nenner 12 und 20 heißen.

14) Dividirt man eine um 1 vermehrte Jahreszahl durch 19, so nennt man den bei der Division bleibenden Rest die goldene Zahl, und den Rest, welchen die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 läßt, den Sonnenzirkel des betreffenden Jahres. Welches Jahr des nächsten Jahrhunderts hat nun die goldene Zahl 17 und den Sonnenzirkel 21?

15) Dividirt man eine um 3 vermehrte Jahreszahl durch 15, so heißt der übrig bleibende Rest die Römer-Zinszahl. Welches Jahr unseres Jahrhunderts hatte den Sonnenzirkel 22 und die Römer-Zinszahl 6?

β) Mit mehren Unbekannten.

§. 188. Auflösungsmethode.

Hier sind zur Bestimmung von

3, 4, 5, . . . n Unbekannten

nur 2, 3, 4, . . .(n — 1) Gleichungen gegeben.

Um dieselben aufzulösen entwickle man nach den früher gelehrten Eliminationsmethoden eine Gleichung mit zwei Unbekannten, löse diese nach §. 186 auf und suche alsdann mittelst Substitution der gefundenen Werthe die übrigen Unbekannten.

Beispiele.

1) Welche ganze positive Werthe entsprechen den Unbekannten in den Gleichungen

$$\text{I} \quad 3x + 4y + 2z = 17$$
$$\text{II} \quad x + y + z = 6$$

Auflösung. Durch Elimination von z folgt:

$$x = 5 - 2y$$

und hiernach $z = 1 + y$.

Damit nun die Werthe der Unbekannten positiv ausfallen, muß $y < 3$ sein.

Man findet

für $y = 1 : x = 3,\ z = 2$

„ $y = 2 : x = 1,\ z = 3$.

2) Man soll ganze positive Zahlen angeben, welche durch 12 dividirt 3, durch 19 dividirt 4 und durch 20 dividirt 7 zum Rest lassen.

Auflösung. Bezeichnen wir die Quotienten der Reihe nach durch x, y und z, so hat man

$$\text{I} \quad 12x + 3 = 19y + 4$$
$$\text{II} \quad 12x + 3 = 20z + 7$$

oder

$$\text{I} \quad 12x = 19y + 1$$
$$\text{II} \quad 12x = 20z + 4$$

also auch

$$19y + 1 = 20z + 4$$

$$y = \frac{20z + 3}{19} = z + \frac{z + 3}{19}.$$

Setzt man $\frac{z + 3}{19} = a$

so wird $z = 19a - 3$

folglich $y = 19a - 3 + a = 20a - 3$

und nach I $x = \frac{19(20a - 3) + 1}{12} = \frac{95a - 14}{3}$

$$= 31a - 4 + \frac{2a - 2}{3}.$$

Da nun aber auch x für jeden ganzen Werth von a eine ganze Zahl werden soll, so setzen wir

$$\frac{2a - 2}{3} = b$$

und bestimmen hieraus

$$a = \frac{3b + 2}{2} = b + 1 + \frac{b}{2}$$

und ebenso aus $\frac{b}{2} = c$

$$b = 2c.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe rückwärts, so erhält man

$$a = 2c + 1 + c = 3c + 1$$
$$x = 31(3c + 1) - 4 + 2c = 95c + 27.$$

Die allgemeine Form der zu suchenden Zahlen ist daher

$$12x + 3 = 12(95c + 27) + 3 = 1140c + 327$$

und man erhält der Reihe nach

für c = 0, 1, 2, 3, . . .
als Zahl: 327, 1467, 2607, 3747, . .

§. 189. Aufgaben zur Uebung.

1) Drei ganze positive Zahlen von der Eigenschaft anzugeben, daß die doppelte erste mit den zwei anderen zusammen 48 ausmacht und die Differenz der zwei letzten 8 beträgt.

2) Welche ganze positive Zahlen lassen durch 6, 8 und 15 dividirt der Reihe nach die Reste 4, 4, 13?

3) Welche ganze positive Zahlen sind durch 30 theilbar und lassen durch 4 und 9 dividirt bezüglich die Reste 2 und 6?

4) Welche ganze positive Zahlen sind durch 8 und 12 zugleich theilbar, lassen aber durch 14 dividirt 6 zum Rest?

5) A, B und C erhalten zusammen nicht ganz 200 fl. A und B erhalten zusammen 10 fl. weniger als das Vierfache des C beträgt, und B und C erhalten zusammen nur 30 fl. mehr als A. Wie viel bekam Jeder?

6) Man soll drei ganze positive Zahlen von der Eigenschaft bestimmen, daß ihre Summe = 58 und die Summe aus der dreifachen ersten, der doppelten zweiten und der vierfachen dritten = 199 sei.

7) Die Zahl 360 so in drei ganze positive Theile zu zerlegen, daß der dritte Theil des ersten, der siebente Theil des zweiten und der neunte Theil des dritten Theiles zusammen 68 ausmachen. Wie heißen die Theile?

8) Welches Jahr unseres Jahrhunderts hat zur goldenen Zahl 1, zum Sonnenzirkel 23 und zur Römer-Zinszahl 5?

9) Welche Zahlen lassen durch 3, 4, 5, 8 dividirt der Reihe nach die Reste 1, 3, 4, 3?

10) Vier zweiziffrige Zahlen haben folgende Eigenschaften: Die doppelte erste ist um 7 größer als die zweite, die Summe der ersten und zweiten übertrifft die dritte um 9 und die Summe der drei ersten ist um 23 kleiner als die doppelte vierte Zahl. Wie heißen die Zahlen?

11) Welche dreiziffrige positive Zahl läßt durch 42, 11, 53 und 57 dividirt, der Reihe nach die Reste 24, 6, 16 und 9?

12) „Wie viel Mann zählt Ihre Kompagnie?" fragte A den Hauptmann B. Dieser antwortete: „Da sie nicht vollzählig ist, so habe ich nicht ganz 180, aber doch über 140 Mann. Lasse ich dieselben nun zu 8 Mann aufmarschiren, so bleiben mir 2 Mann übrig; lasse ich sie 7 Mann hoch aufmarschiren, so bleibt nur noch ein Mann übrig; stelle ich sie 5 Mann hoch auf, so bleiben mir wiederum 2 Mann und wenn ich sie endlich 6 Mann hoch antreten lasse, so werden sämmtliche Reihen vollständig." Wie stark war die Kompagnie?

13) Es soll eine Summe von 1641 fl. in 769 Geldstücken, bestehend aus preuß. Thalern, Fünffrankenthalern und Kronenthalern, ausbezahlt werden. Auf wie viel Arten kann die gewünschte Auszahlung geschehen und wie viel Stück einer jeden Geldsorte sind bei jeder Zahlungsweise erforderlich?

Anmerkung.

Enthält eine Gleichung drei Unbekannte, ist dieselbe also mehrfach unbestimmt, so verfahre man ähnlich wie oben, wähle schließlich für eine der Unbekannten einen, der etwa gestellten Beschränkung entsprechenden, Werth und bestimme hiernach die beiden anderen Unbekannten. Analog nehme man, wenn eine Gleichung n Unbekannte enthält, (n — 2) Unbekannte willkürlich an und bestimme hiernach die noch übrigen zwei.

Um z. B. die Gleichung

$$3x + 4y + 5z = 153$$

für ganze positive Werthe, welche $>$ 10, aber $<$ 20 sind, zu lösen, bestimme man die mit dem kleinsten Coefficienten versehene Unbekannte

$$x = \frac{153 - 4y - 5z}{3} = 51 - y - z - \frac{y + 2z}{3}$$

und setze nun

$$\frac{y + 2z}{3} = a,$$

so folgt für

$$y = 3a - 2z \;.\;.\; (1)$$

also für $x = 51 - 3a + 2z - z - a = 51 - 4a + z \;.\;.\;.\; (2)$.

Da aber x, y und z positiv ausfallen sollen, so muß wegen Gleichung (1)

$$a > \frac{2}{3}z \text{ und wegen (2) } a < \frac{51 + z}{4} \text{ sein.}$$

Nehmen wir nun an, da die Unbekannten > 10, aber < 20 sein sollen, es sei $z = 11$ und setzen der Reihe nach

$$a = 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

so erhalten wir für

$$y = 11,\ 14,\ 17,\ 20$$
$$x = 18,\ 14,\ 10,\ \ 6.$$

Ebenso folgt für

$z = 12$

und $a = 12,\ 13,\ 14 \ldots$

$y = 12,\ 15,\ 18 \ldots$

$x = 15,\ 11,\ \ 7 \ldots$

für $z = 13$

und $a = 13,\ 14 \ldots$

$y = 13,\ 16 \ldots$

$x = 12,\ \ 8 \ldots$

für $z = 14$

und $a = 13,\ 14 \ldots$

folgt $y = 11,\ 14 \ldots$

$x = 13,\ \ 9 \ldots$

für $z = 15$

und $a = 14,\ 15 \ldots$

$y = 12,\ 15 \ldots$

$x = 10,\ \ 6 \ldots$

Die verlangten Zahlen sind somit:

18, 11, 11; 14, 14, 11; 15, 12, 12; 11, 15, 12; 12, 13, 13; 13, 11, 14.

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man von vorn herein für eine der Unbekannten entsprechende Werthe annimmt und hiernach die Gleichung als eine einfach unbestimmte behandelt.

Setzt man z. B. $z = 11$, so geht die vorgelegte Gleichung über in

$$3x + 4y = 98;$$

also wird

$$x = \frac{98 - 4y}{3} = 32 - y + \frac{2 - y}{3}$$

und wenn $\frac{2 - y}{3} = a$ gesetzt wird, folgt für

$$y = 2 - 3a,$$

demnach für

$$x = 32 - 2 + 3a + a = 30 + 4a.$$

Aus dem Ausdrucke für y ersehen wir, daß a negativ zu nehmen und wenigstens $= -3$ zu setzen sei. Man findet für

$$a = -3,\ -4,\ -5$$
$$y = 11,\ \ 14,\ \ 17$$
$$x = 18,\ \ 14,\ \ 10$$

also wie oben 18, 11, 11 und 14, 14, 11.

Um die übrigen Zahlen zu finden, setze $-z = 12, 13, \ldots$ und operire wie oben.

b) Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. 190. Auflösung einiger Aufgaben.

Die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades ist oft mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft und die allgemeinen Auflösungsmethoden, welche man dafür aufgefunden hat, eignen sich nicht wohl zur Aufnahme in ein Lehrbuch über Elementar-Mathematik.

Wir wollen deßhalb statt aller weiteren Erläuterungen nachstehend einige Beispiele vollständig auflösen.

1) Man soll zwei ganze positive Zahlen von der Eigenschaft angeben, daß die Summe aus der ersten Zahl, deren Quadrat und dem Produkte der beiden Zahlen gleich 44 sei.

Auflösung.

Bezeichnen wir die erste Zahl durch x, die zweite durch y, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$x + x^2 + xy = 44$$

oder

$$x(y + 1) = 44 - x^2$$

woraus folgt

$$y = \frac{44}{x} - x - 1.$$

Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß x ein Faktor von 44 sein. Die Faktoren von 44 sind aber: 1, 2, 4, 11, 22, 44.

Setzen wir darum der Reihe nach

$$x = 1,\ 2,\ 4,\ 11,\ 22,\ 44,$$

so folgt

$$y = 42,\ 19,\ 6,\ -8,\ -21,\ -44$$

und für die vorgelegte Aufgabe erhalten wir somit die drei Auflösungen:

1 und 42; 2 und 19; 4 und 6.

2) Zwei ganze positive Zahlen anzugeben, deren Summe um 27 kleiner ist als das Produkt beider.

Auflösung.

Bezeichnen wir die beiden Zahlen durch x und y, so erhält man als Bedingungsgleichung:

$$x + y = xy - 27,$$

woraus folgt

$$y = \frac{x + 27}{x - 1} = 1 + \frac{28}{x - 1}.$$

Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß x — 1 ein Faktor von 28 sein. Die Faktoren von 28 sind aber: 1, 2, 4, 7, 14 und 28. Setzen wir solche der Reihe nach für x — 1, also entsprechend

$$x = 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 15,\ 29,$$

so wird

$$y = 29,\ 15,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2.$$

Der Aufgabe entsprechen hiernach die drei Auflösungen

2 und 29; 3 und 15; 5 und 8.

3) Welche ganze positive Werthe der Unbekannten genügen der Gleichung

$$x^2 + xy = 30.$$

Auflösung.

Man erhält aus der vorgelegten Gleichung

$$y = \frac{30 - x^2}{x} = \frac{30}{x} - x.$$

Damit also y eine ganze positive Zahl werde, muß $x < \sqrt{30}$ und ein Faktor von 30 sein. Setzen wir deßhalb der Reihe nach

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 5,$$

so wird

$$y = 29,\ 13,\ 7,\ 1.$$

4) Zwei ganze positive Zahlen anzugeben, deren sechsfache Differenz um 18 kleiner ist, als das Quadrat der größeren von beiden Zahlen.

Auflösung.

Die größere der beiden Zahlen sei x, die kleinere y, so heißt die Bedingungsgleichung

$$6(x - y) = x^2 - 18,$$

woraus folgt

$$y = \frac{6x - x^2 + 18}{6} = x + 3 - \frac{x^2}{6}.$$

Damit y eine ganze Zahl werde, muß auch $\frac{x^2}{6}$ eine ganze Zahl sein, also x^2 die Form 6a haben, wo a wieder von der Form $6b^2$ sein muß, da nur unter dieser Voraussetzung

$$x^2 = 6a = 36b^2,$$

also gleich einem vollständigen Quadrate wird.

Durch Einführung dieses Ausdruckes für x^2 folgt:

$$y = x + 3 - \frac{36b^2}{6} = x + 3 - 6b^2.$$

Damit ferner $x + 3 - \frac{x^2}{6}$ positiv ausfalle, muß

$$x^2 < 6x + 18 \text{ oder } x^2 - 6x < 18,$$

also $$x < 3 + \sqrt{18 + 9} \text{ oder } < 9,$$

folglich $$b < \sqrt{\frac{81}{36}} \text{ oder } < 2 \text{ sein.}$$

Setzen wir darum

$$b = 1 \text{ also } a = 6,$$

so wird $$x^2 = 36,$$

folglich $$x = 6$$

und $$y = 6 + 3 - 6 = 3.$$

Vorstehende Aufgabe läßt somit nur eine Auflösung zu.

5) Zwei ganze positive Zahlen zu suchen, deren Quadratsumme 106 beträgt.

Auflösung.

Die Zahlen seien x und y, so ist die Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 = 106,$$

also $$y = \sqrt{106 - x^2}.$$

Soll nun y eine rationale Zahl sein, so muß auch $\sqrt{106 - x^2}$ rational sein. Da aber x nicht größer als 10 angenommen werden darf, so setze man der Reihe nach

$$x = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \; 10$$

und berechne hiernach den entsprechenden Werth von

$$106 - x^2 = 105, \; 102, \; 97, \; 90, \; 81, \; 70, \; 57, \; 42, \; 25, \; 6;$$

so ersieht man hieraus, daß nur für $x = 5$ und 9 der Werth von x rational und zwar bezüglich $\sqrt{81}$ und $\sqrt{25}$ oder 9 und 5 wird.

Vorliegende Aufgabe läßt hiernach nur eine Auflösung zu.

Die beiden zu suchenden Zahlen sind 5 und 9.

6) In der Gleichung $y = \sqrt{x^2 + a}$, x so zu bestimmen, daß y rational wird.

Auflösung.

Da offenbar $\sqrt{(x^2 + a)} > x$ sein muß, so setze man

$$\sqrt{(x^2 + a)} = x + n,$$

wo n jede beliebige rationale Zahl bezeichnet, so wird

$$x^2 + a = x^2 + 2nx + n^2$$

also

$$x = \frac{a - n^2}{2n}.$$

Für jede Annahme von n wird alsdann

$$y = \sqrt{(x^2 + a)} = x + n = \frac{a + n^2}{2n},$$

also rational.

7) **Zwei ganze Zahlen anzugeben, deren Quadratensumme dem Quadrate einer dritten Zahl gleich ist.**

Auflösung.

Bezeichnen wir die drei Zahlen der Reihe nach durch x, y, z, so folgt aus der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Da nun offenbar $\sqrt{(x^2 + y^2)} > x$ aber $< (x + y)$ ist, so setze man

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = x + \frac{m}{n} y$$

wo m und n relative Primzahlen unter einander sind und $m < n$ ist, dann erhält man

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{2m}{n} xy + \frac{m^2}{n^2} y^2$$

und hieraus

$$2mnx = (n^2 - m^2)\, y$$

also für

$$\frac{x}{y} = \frac{n^2 - m^2}{2mn}.$$

Setzt man nun

$$x = n^2 - m^2$$

so wird

$$y = 2mn$$

und

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(n^4 + 2m^2n^2 + m^4)}$$
$$= n^2 + m^2.$$

Man erhält demnach für

$$m = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots$$

und	n =	2,	3,	3,	4,	4,	4,	5,	5,	5,	5 . . .
	x =	3,	8,	5,	15,	12,	7,	24,	21,	16,	9 . . .
	y =	4,	6,	12,	8,	16,	24,	10,	20,	30,	40 . . .
	z =	5,	10,	13,	17,	20,	25,	26,	29,	34,	41 . . .

Anmerkung. Die zusammengehörigen Zahlen heißen pythagoräische Zahlen, da sie die Seiten von pythagoräischen Dreiecken ausdrücken.

8) Für welche Werthe von x wird

$$y = \sqrt{(ax^2 + bx + c)}$$

rational?

Auflösung.

Erster Fall. Es sei a ein vollständiges Quadrat und zwar $a = \alpha^2$.

Setzt man

$$y = \sqrt{(\alpha^2 x^2 + bx + c)} = \alpha x + m$$

also $$bx + c = m^2 + 2m\alpha x,$$

wo m eine beliebige rationale Zahl bedeutet, so wird

$$x = \frac{m^2 - c}{b - 2m\alpha},$$

folglich $$y = \alpha x + m$$

$$= \frac{bm - m^2\alpha - c\alpha}{b - 2m\alpha},$$

somit rational.

Zweiter Fall. a sei kein vollständiges Quadrat, wohl aber c und zwar $c = \gamma^2$.

In diesem Falle setze man:

$$y = \sqrt{(ax^2 + bx + \gamma^2)} = mx + \gamma$$

also $$ax^2 + bx + \gamma^2 = (mx + \gamma)^2$$

und bestimme hieraus

$$x = \frac{2m\gamma - b}{a - m^2}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in obigen Ausdruck wird

$$y = mx + \gamma = \frac{a\gamma + m^2\gamma - bm}{a - m^2}$$

also wieder rational.

Dritter Fall. Es sei weder a noch c ein Quadrat, dagegen lasse sich das Trinom in zwei rationale Faktoren zerlegen.

Ist z. B. $y = \sqrt{(6x^2 - 7x - 5)}$, so setze man das Trinom

$$6x^2 - 7x - 5 = 0$$

und bestimme hieraus die beiden Werthe der Unbekannten

$$x_1 = -\tfrac{1}{2},\ x_2 = \tfrac{5}{3},$$

alsdann ergeben sich

$$2x + 1 \text{ und } 3x - 5$$

als Faktoren des Trinoms und es ist somit

$$y = \sqrt{(2x + 1)(3x - 5)}.$$

Setzen wir nun

$$\sqrt{(2x + 1)(3x - 5)} = m(3x - 5),$$

so folgt $\qquad 2x + 1 = m^2(3x - 5)$

und hieraus

$$x = \frac{5m^2 + 1}{3m^2 - 2}$$

wo m jede beliebige rationale Zahl bedeuten kann.

Für $m = 1$ folgt $x = 6$

„ $m = 2$ „ $x = \frac{21}{10}$ ꝛc.

Vierter Fall. Es sei ein Werth von x bekannt, für welchen y rational wird, man soll noch andere Werthe für x von dieser Eigenschaft bestimmen.

Angenommen $y = \sqrt{(ax^2 + bx + c)}$ werde für $x = \alpha$ rational und gleich β.

Setzt man hierin

$$x = \alpha + z,$$

so wird

$$y = \sqrt{(a(\alpha + z)^2 + b(\alpha + z) + c)}$$
$$= \sqrt{(az^2 + z(2a\alpha + b) + \beta^2)}$$

und die Aufgabe ist nun auf den zweiten Fall zurückgeführt.

Es sei z. B. $y = \sqrt{(3x^2 - 5x + 11)}$, so findet man leicht, daß y für $x = 1$ rational und gleich 3 wird. Setzt man darum $x = 1 + z$, so wird $y = \sqrt{3z^2 + z + 9}$ und wenn man nun $y = 3 + mz$ einführt, so erhält man

$$z = \frac{1 - 6m}{m^2 - 3},$$

also

$$x = \frac{m^2 - 6m - 2}{m^2 - 3}.$$

Nehmen wir hierin $m = 2$, so wird $x = -10$, $y = 19$, ebenso folgt für $m = -2$, $x = 14$ und $y = 23$.

○ 9) Man soll ein Dreieck, welches einen Winkel von 60° enthält, so bestimmen, daß dessen Seitenlängen durch ganze Zahlen ausgedrückt werden.

Auflösung.

Bezeichnen x und y die zwei den gegebenen Winkel einschließenden Seiten, z die dritte Seite,

so ist $$z = \sqrt{(x^2 - xy + y^2)}\,^{*)}.$$

Setzen wir nun nach dem zweiten Falle der Aufgabe 8

$$z = mx + y,$$

so folgt $$y = \frac{x\,(1 - m^2)}{2m + 1},$$

also wird $$z = \frac{x\,(m^2 + m + 1)}{2m + 1}.$$

Da aber m jede beliebige rationale Zahl bedeuten kann, so sei $m = \frac{p}{q}$, wo p und q beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Führen wir diesen Werth in die vorigen Gleichungen ein, so nehmen dieselben nachstehende Formen an:

$$y = \frac{x\,(q^2 - p^2)}{q\,(2p + q)}$$

$$z = \frac{x\,(p^2 + pq + q^2)}{q\,(2p + q)}.$$

Setzen wir der Einfachheit wegen

$$x = 2pq + q^2$$

so wird $$y = q^2 - p^2$$

und $$z = p^2 + pq + q^2.$$

So folgt z. B. für

$$p = 1,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

und $$q = 2,\ 3,\ 3,\ \ldots$$

$$x = 8,\ 15,\ 21,\ \ldots$$

$$y = 3,\ 8,\ 5,\ \ldots$$

$$z = 7,\ 13,\ 19,\ \ldots$$

Nimmt man statt des Winkels von 60° einen Winkel von 120°, so erhält man mit Beibehaltung obiger Bezeichnung

$$z = \sqrt{(x^2 + xy + y^2)},$$

welcher Ausdruck auf analoge Weise wie vorhin rational gemacht werden kann.

---

*) E. G. §. 128.

O D. Auflösung der Gleichungen des dritten Grades mit einer Unbekannten.

§. 190a. Auflösung rein-cubischer Gleichungen.

Jede rein-cubische Gleichung läßt sich auf die Form bringen

$$x^3 \mp a^3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Denn ist die Unbekannte mit einem Coefficienten behaftet und die vorgelegte Gleichung etwa von der allgemeinen Form

$$bx^3 \mp c = 0,$$

so kann man dieselbe durch b dividiren und hierauf

$$\frac{c}{b} = a^3$$

setzen, wo unter

$$a = \sqrt[3]{\frac{c}{b}}$$

der diesem Wurzelausdrucke entsprechende reelle Werth zu verstehen ist (vergl. §. 112, 7.).

Aus der Gleichung (1) folgt unmittelbar

$$x = \sqrt[3]{\pm a^3} = \pm a \sqrt[3]{1}.$$

Nach §. 116a, Zus. 5. entsprechen aber dem Ausdrucke $\sqrt[3]{1}$ nachstehende drei Werthe:

$$1_{0^0}, \quad 1_{\frac{2 \,.\, 180^0}{3}}, \quad 1_{\frac{4 \,.\, 180^0}{3}}$$

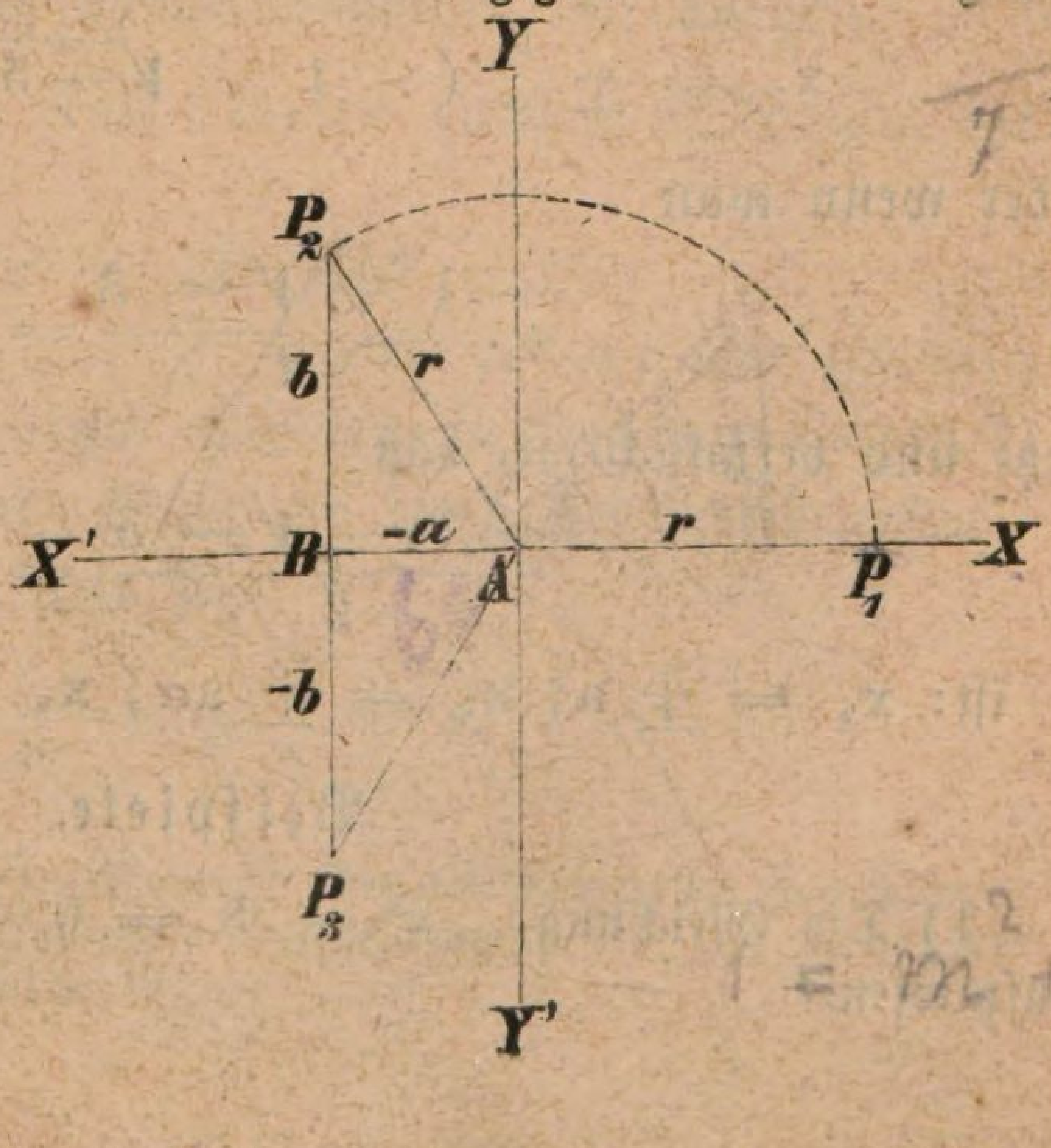
oder

$$1_{0^0}, \quad 1_{120^0}, \quad 1_{240^0}$$

und es sind somit die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) der Reihe nach:

$$x_1 = a \,.\, 1_{0^0}; \; x_2 = a \,.\, 1_{120^0}; \; x_3 = a \,.\, 1_{240^0}.$$

Fig. 7



Um nun die Werthe von 1_{0^0}, 1_{120^0} und 1_{240^0} zu ermitteln, mache man (Fig. 7) nach §. 116a, Zus. 1

$\sphericalangle\, P_2AX = 120^0$,

$\sphericalangle\, P_3AX = 240^0$,

trage r gleich der Einheit nach AP_1, AP_2 und AP_3, so repräsentiren die drei Punkte P_1, P_2, P_3 die betreffenden drei

Werthe von $\sqrt[3]{1}$ und da deren Coordinaten bezüglich r und 0, — a und b, — a und — b sind, so ist nach §. 116a, Zus. 1

$$\left.\begin{aligned} 1_{0^0} &= r \\ 1_{120^0} &= -a + bi \\ 1_{240^0} &= -a - bi \end{aligned}\right\} \ldots . (2)$$

Nun ist aber $\qquad r = AP_1 = 1$

$$\measuredangle P_2AB = \measuredangle P_3AB = 60^0,$$

also $\qquad \measuredangle AP_2B = 30^0$

und ABP_2 ein halbes gleichseitiges Dreieck.

Man hat daher

$$a = AB = \frac{AP_2}{2} = \frac{1}{2}$$

und nach E. G. §. 126

$$b = P_2B = \sqrt{(\overline{AP}_2^2 - \overline{AB}^2)} = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es gehen somit nach (2) die drei Werthe von $\sqrt[3]{1}$ über in

$$\left.\begin{aligned} 1_{0^0} &= 1 \\ 1_{120^0} &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ 1_{240^0} &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

und es sind daher die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung (1):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \pm a \\ x_2 &= \pm \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{-3}) \\ x_3 &= \pm \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{-3}) \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

oder wenn man

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \alpha \ldots (5)$$

setzt und berücksichtigt, daß

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \alpha^2 \ldots (6)$$

ist: $x_1 = \pm a$; $x_2 = \pm a\alpha$; $x_3 = \pm a\alpha^2 \ldots (7)$

Beispiele.

1) Die Gleichung $\quad x^3 - 8 = 0$
aufzulösen.

Auflösung.

Man erhält hieraus $x^3 = 8$, also $x = \sqrt[3]{8}$, und da hiernach in den Werthen (3) $a = 2$ wird, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1 + \sqrt{-3}$$
$$x_3 = -1 - \sqrt{-3}$$

2) Die zu lösende Gleichung sei

$$x^3 + 64 = 0.$$

Auflösung.

Setzt man in (3)

$$a = \sqrt[3]{-64} = -4,$$

so folgt:

$$x_1 = -4$$
$$x_2 = -2(-1 + \sqrt{-3})$$
$$x_3 = -2(-1 - \sqrt{-3}).$$

§. 190b. Aufgaben zur Uebung.

1) $x^3 - 64 = 0$

2) $x^3 + 343 = 0.$

3) $\frac{3x^3}{10} = 37{,}5.$

4) $5x\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 4x^2 = -\frac{6x^2 + 540}{x}.$

§. 190c. Auflösung unrein-cubischer Gleichungen.

1) Jede geordnete auf Null reducirte cubische Gleichung hat die Form

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

wo die Coefficienten a, b, ... irgend positive oder negative reelle Werthe bezeichnen, jedoch auch einzeln Null sein können.*)

Dividirt man vorstehende Gleichung durch den Coefficienten a der höchsten Potenz von x und setzt

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q, \quad \frac{d}{a} = r,$$

*) Gleichungen, deren Glieder theilweise oder alle imaginäre Coefficienten haben, schließen wir bei nachstehenden Betrachtungen aus, da solche dem Zwecke dieses Lehrbuches ganz ferne liegen.

so folgt:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \ldots (1)$$

als Form, auf welche jede cubische Gleichung gebracht werden kann und die wir darum auch allen folgenden Untersuchungen zu Grunde legen.

2) Schreibt man statt der Gleichung (1)

$$x^3 + 3x^2\left(\frac{p}{3}\right) + 3x\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 - 3x\left(\frac{p}{3}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$$
$$+ qx + r = 0,$$

berücksichtigt, daß nach §. 106

$$x^3 + 3x^2\left(\frac{p}{3}\right) + 3x\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{p}{3}\right)^3$$

und addirt und subtrahirt gleichzeitig

$$\frac{pq}{3} - \frac{p^3}{9},$$

so geht die Gleichung (1) über in

$$\left(x+\frac{p}{3}\right)^3 + \left(q-\frac{p^2}{3}\right)\left(x+\frac{p}{3}\right) + r + \frac{p^3}{9} - \frac{pq}{3} - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

oder wenn man

$$x + \frac{p}{3} = y \ldots (2)$$

und die bekannten Coefficienten

$$q - \frac{p^2}{3} = P$$

$$r + \frac{p^3}{9} - \frac{pq}{3} - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = Q$$

setzt, in $y^3 + Py + Q = 0 \ldots (3)$.

Sind nun m und n irgend zwei noch zu bestimmende Zahlen, so ist nach §. 106

$$(m + n)^3 = m^3 + n^3 + 3mn\,(m + n)$$

oder wenn man $m + n = y$

setzt und auf Null reducirt,

$$y^3 - 3mny - (m^3 + n^3) = 0 \ldots (4).$$

Dieser Gleichung entspricht aber offenbar die eine Wurzel

$$y_1 = m + n.$$

Um die beiden anderen Wurzeln derselben zu bestimmen, berücksichtige man, daß, wenn m_μ und n_ν irgend zwei allgemeine Richtungszahlen bedeuten, nach §. 106 und §. 116a die Beziehung besteht:

$$(m_\mu + n_\nu)^3 = m^3_{3\mu} + (3m^2n)_{2\mu+\nu} + (3mn^2)_{\mu+2\nu} + n^3_{3\nu}$$
$$= (3mn)_{\mu+\nu}(m_\mu + n_\nu) + m^3_{3\mu} + n^3_{3\nu}$$

oder wenn man

$$m_\mu + n_\nu = y$$

setzt und auf Null reducirt

$$y^3 - (3mn)_{\mu+\nu}\, y - (m^3_{3\mu} + n^3_{3\nu}) = 0.$$

Damit nun diese Gleichung mit der obigen Gleichung (4) identisch wird, muß offenbar

$$\mu = 120^0 \text{ oder } 240^0$$

und entsprechend $\nu = 240^0$ „ 120^0

sein; denn es geht dieselbe alsdann wieder über in

$$y^3 - (3mn)_{\substack{120+240\\240+120}}\, y - \left(m^3_{\substack{360\\720}} + n^3_{\substack{720\\360}}\right) = 0$$

oder in $y^3 - 3mny - (m^3 + n^3) = 0.$

Man erkennt hieraus, daß die drei Wurzeln der Gleichung (4) sein werden:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m + n \\ y_2 &= m_{120} + n_{240} = m \,.\, 1_{120} + n \,.\, 1_{240} \\ y_3 &= m_{240} + n_{120} = m \,.\, 1_{240} + n \,.\, 1_{120} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

Nun stimmen aber die beiden Gleichungen (3) und (4) in Bezug auf ihre Form vollkommen überein und man wird somit zur Bestimmung der Wurzeln jener Gleichung (3) nur m und n durch P und Q auszudrücken haben.

Setzt man zu diesem Ende

$$\left.\begin{aligned} \text{I} \quad 3mn &= -P \\ \text{II} \quad m^3 + n^3 &= -Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (6)$$

führt den Werth

$$n = -\frac{P}{3m}$$

aus I in II und reducirt, so folgt:

$$m^6 + Qm^3 = \left(\frac{P}{3}\right)^3$$

und hieraus

$$m^3 = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad \ldots . (7)$$

und somit nach II

$$n^3 = -\frac{Q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad \ldots . (8)$$

Nach §. 116a Zus. 5. genügen aber der Gleichung (7) die drei Werthe:

$$m \,.\, 1_{0^0}, \quad m \,.\, 1_{120^0}, \quad m \,.\, 1_{240^0}$$

und der Gleichung (8) die drei Werthe:

$$n \,.\, 1_{0^0}, \quad n \,.\, 1_{120^0}, \quad n \,.\, 1_{240^0}$$

wo m und n die reellen Werthe von $\sqrt[3]{m^3}$ und $\sqrt[3]{n^3}$ sind.

Da nun zwar

$$y = m + n,$$

nach I der Gleichung (6) aber nur solche Werthe von $\sqrt[3]{m}$ und $\sqrt[3]{n}$ als zusammengehörig angesehen werden können, deren Produkt reell ausfällt, deren Richtungswinkel also zusammen nach §. 116a, 3. 0^0, 180^0 oder 360^0 ausmachen, so erhält man als Wurzeln der Gleichung (3) nur die drei in (5) angegebenen Werthe.

Nach §. 190a (3) kann man dafür schreiben:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m + n \\ y_2 &= \frac{m}{2}(-1+\sqrt{-3}) + \frac{n}{2}(-1-\sqrt{-3}) \\ &= -\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3} \\ y_3 &= \frac{m}{2}(-1-\sqrt{-3}) + \frac{n}{2}(-1+\sqrt{-3}) \\ &= -\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (9)$$

oder nach §. 190a (5) und (6)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m + n \\ y_2 &= m\alpha + n\alpha^2 \\ y_3 &= m\alpha^2 + n\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (10)$$

3) Um sämmtliche Wurzeln der cubischen Gleichung (3) in einem Ausdrucke darzustellen, führe man die Werthe von m und n aus (7) und (8) in die Gleichung (4) ein.

Man erhält alsdann:

$$\left.\begin{aligned} y = &\sqrt[3]{\left[-\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}\right]} + \\ &\sqrt[3]{\left[-\frac{Q}{2}-\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}\right]} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

Dieser von dem Italiener Hieronymus Cardanus (geb. 1501 zu Pavia, gest. 1575 zu Rom) zuerst veröffentlichte Ausdruck zur Wurzelbestimmung einer cubischen Gleichung wird die cardanische Formel genannt.

Anmerkung. Schon zu Anfang des 16. Jahrhunderts hatten Scipio Ferreo aus Bologna nnd Tartaglia aus Brescia (gest. 1557 zu Venedig) die Auflösung der cubischen Gleichungen für besondere Fälle gefunden. Allein Cardanus, dem Tartaglia die Lösung unter dem Siegel der Verschwiegenheit mitgetheilt hatte, übergab solche um die Mitte des 16. Jahrhunderts der Oeffentlichkeit.

4) Man wird die Wurzeln aus (11) immer finden, sobald P positiv, oder wenn andernfalls $\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < \left(\frac{Q}{2}\right)^2$ ist.

Die beiden anderen Wurzeln sind in diesem Falle nach (9) imaginär.

Für
$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 = 0$$
folgt
$$m^3 = n^3 = -\frac{Q}{2}$$
und die drei Wurzeln sind alsdann nach (9):
$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$
$$y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$
also reell.

5) Ist P negativ und
$$\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > \left(\frac{Q}{2}\right)^2$$
so fallen die beiden Ausdrücke für m und n nach (7) und (8) imaginär aus und es nimmt demnach die cardanische Formel (11) ebenfalls eine imaginäre Form an, obgleich, wie wir eben gesehen haben, derselben wenigstens ein reeller Werth entsprechen, ja, wie wir sogleich nachweisen wollen, die Gleichung (3) in diesem Falle drei reelle Wurzeln haben muß.

Setzt man nämlich allgemein
$$y = m_{\mu+\varphi} + n_{\nu+\psi}$$
so findet man analog wie oben:
$$y^3 - (3mn)_{\mu+\varphi+\nu+\psi}\, y - \left(m^3_{3\mu+3\varphi} + n^3_{3\nu+3\psi}\right) = 0.$$

Für $\varphi = \begin{cases} 0^0 \\ 120^0 \\ 240^0 \end{cases} \quad \psi = \begin{cases} 0^0 \\ 240^0 \\ 120^0 \end{cases}$

geht diese Gleichung über in

$$y^3 - (3mn)_{\mu+\nu}\, y - (m^3_{3\mu} + n^3_{3\nu}) = 0 \ . \ . \ . \ (12)$$

und ihr genügen nun folgende drei Werthe:

$$m_\mu + n_\nu;$$
$$m_{\mu+120^0} + n_{\nu+240^0}$$
und $$m_{\mu+240^0} + n_{\nu+120^0}.$$

Um eine Identität der Gleichung (12) und (3) zu erzielen, setze man

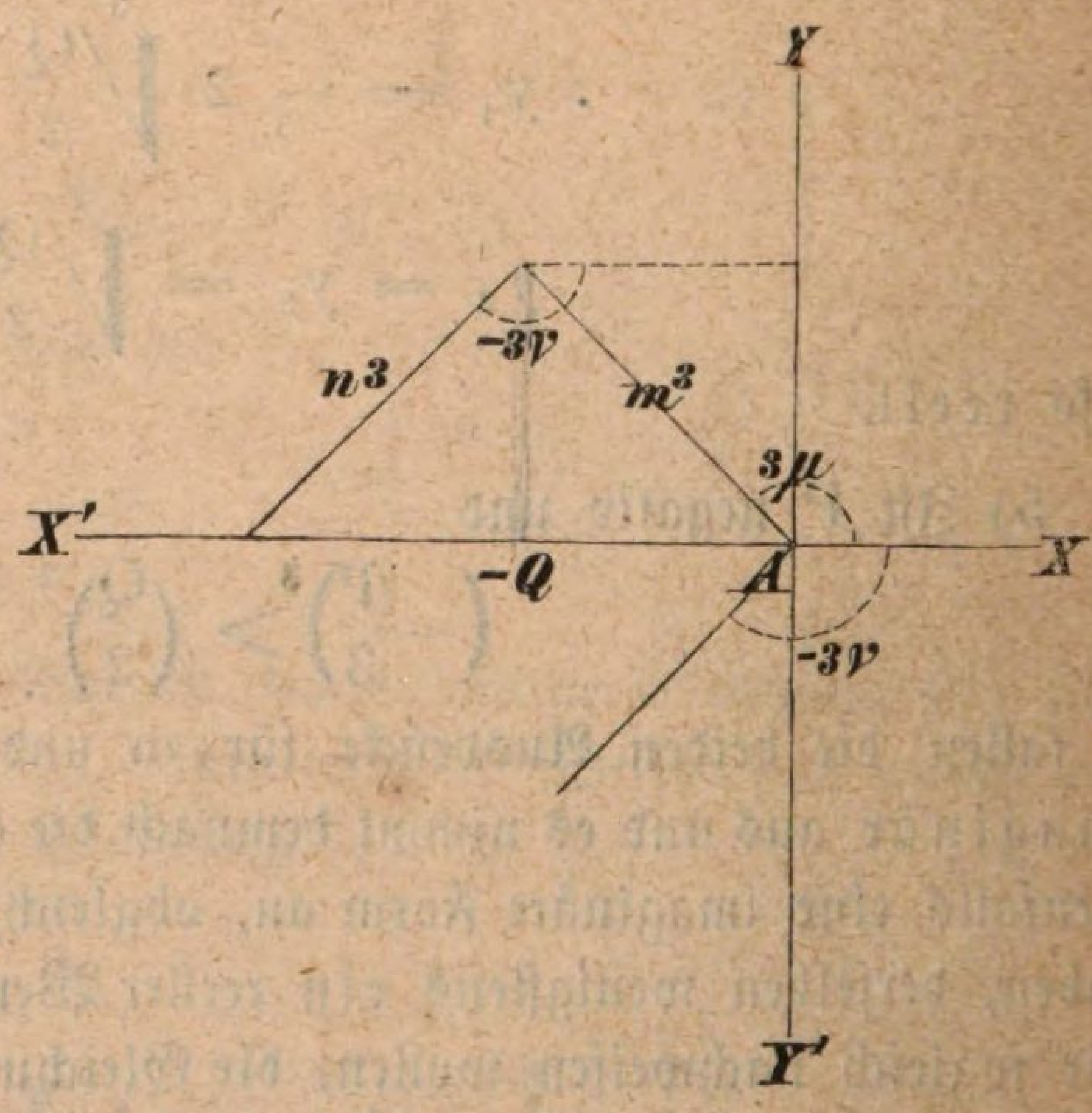
$$\text{I} \quad (3mn)_{\mu+\nu} = -P$$
$$\text{II} \quad m^3_{3\mu} + n^3_{3\nu} = -Q$$

oder da P und Q reelle Zahlen bezeichnen:

$$\mu + \nu = 0 \text{ oder } \nu = -\mu,$$

also $$\text{III} \quad 3mn = -P.$$

(Fig. 8)



Denkt man sich hiernach die Addition $m^3_{3\mu} + n^3_{3\nu}$ ausgeführt (§. 116a. 1.), so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck (Fig. 8), indem wegen der absoluten Gleichheit der Winkel μ und ν die Werthe m^3 und n^3 gleich werden. Setzt man aber $m^3 = n^3$ oder $m = n$, so folgt aus III

$$m = n = \sqrt{-\frac{P}{3}} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13).$$

Da ferner

$$-Q = m^3 \cos 3\mu + n^3 \cos 3\nu$$
$$= 2m^3 \cos 3\mu = 2n^3 \cos 3\nu$$

so folgt für $\cos 3\mu = -\frac{Q}{2m^3} = -\frac{\frac{Q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{P}{3}\right)^3}}$ . . . (14),

woraus μ bestimmt werden kann.

Hat man $\measuredangle\ \mu$ berechnet, so sind nach Obigem die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m_\mu + m_{-\mu} \\ y_2 &= m_{\mu+120^0} + m_{-\mu+240^0} \\ y_3 &= m_{\mu+240^0} + m_{-\mu+120^0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (15).$$

Berücksichtigt man, daß nach §. 116a, Zusatz 1. auch gesetzt werden kann

$$m_\mu = m \,.\, 1_\mu = (\cos \mu + i \sin \mu) \sqrt{-\frac{P}{3}}$$

$$m_{-\mu} = m \,.\, 1_{-\mu} = (\cos \mu - i \sin \mu) \sqrt{-\frac{P}{3}}$$

so gehen diese Werthe über in

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2 \cos \mu \sqrt{-\frac{P}{3}} \\ y_2 &= 2 \cos (\mu + 120^0) \sqrt{-\frac{P}{3}} \\ y_3 &= 2 \cos (\mu + 240^0) \sqrt{-\frac{P}{3}} \end{aligned}\right\} \ldots . (16).$$

Anmerkung. Den zuletzt betrachteten Fall nennt man den irreducibelen (casus irreducibilis). Wir wurden auf denselben durch die Annahme geführt, daß P negativ und zugleich

$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 < \left(-\frac{P}{3}\right)^3$$

sei. Für ein negatives P werden aber die durch die Gleichungen (13) und (14) dargestellten Werthe jedenfalls reell und die vorgelegte Gleichung (3) hat somit in diesem Falle in der That drei reelle Wurzeln, obgleich die cardanische Formel (11) unter der gemachten Voraussetzung unter imaginärer Form erscheint.

Beispiele.

1) Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 15x - 72 = 0$$

zu bestimmen.

Auflösung.

Setzt man nach (3) in den allgemeinen Ausdrücken (7) und (8)

$$P = 15,\ Q = -72,$$

so folgt

$$m^3 = 36 + \sqrt{36^2 + 5^3} = 36 + \sqrt{1421} = 73{,}69614$$

$$n^3 = 36 - \sqrt{36^2 + 5^3} = 36 - \sqrt{1421} = -1{,}69614.$$

Nach (9) sind somit die Wurzeln:

$$x_1 = \sqrt[3]{73{,}69614} - \sqrt[3]{1{,}69614}$$

$$= 4{,}19258 - 1{,}19258 = 3;$$

$$x_2 = 2{,}09629\,(-1 + \sqrt{-3}) - 0{,}59629\,(-1 - \sqrt{-3})$$

$$= -1{,}5 + 2{,}69258\,\sqrt{-3};$$

$$x_3 = 2{,}09629\,(-1 - \sqrt{-3}) + 0{,}59629\,(-1 + \sqrt{-3})$$

$$= -2{,}69258 - 1{,}5\,\sqrt{-3}.$$

2) Die Gleichung

$$x^3 + 9x^2 + 21x + 13 = 0$$

aufzulösen.

Auflösung.

Schreibt man nach §. 190c 2. dafür

$$x^3 + 3x^2 . 3 + 3x . 3^2 + 3^3 - 3x . 3^2 - 3^3 + 21x + 13 = 0$$

oder $$(x + 3)^3 - 6x - 14 = 0$$

oder $$(x + 3)^3 - 6\,(x + 3) + 4 = 0$$

und setzt nun $$x + 3 = y,$$

so folgt $$y^3 - 6y + 4 = 0.$$

Setzt man nun nach Gleichung (3)

$$P = -6,\ Q = 4,$$

so ersieht man sofort, daß absolut genommen

$$\left(\frac{P}{3}\right)^3 > \left(\frac{Q}{2}\right)^2$$

ausfällt, also nach (7) und (8) m und n imaginär werden. Die vorgelegte Gleichung führt somit auf den irreducibelen Fall.

Wir haben daher zunächst aus Gleichung (14):

$$\cos 3\mu = -\frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Nach E. T. §. 7, (13) ist daher

$$3\mu = 180^0 - 45^0 = 135^0$$

oder $$3\mu = 180^0 + 45^0 = 225^0,$$

also $$\mu = 45^0 \text{ oder } 75^0.$$

Da ferner nach (13)

$$m = n = \sqrt{-\frac{P}{3}} = \sqrt{2}$$

ist, so sind für $\mu = 45^0$ nach (16) die drei Wurzeln der Gleichung in y:

$$y_1 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^0 = 2\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 2$$
$$y_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 165^0 = -2\sqrt{2} \cdot \cos 15^0 = -2{,}73205$$
$$y_3 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 285^0 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 75^0 = 0{,}73205.$$

Für $\mu = 75^0$ würde man

$$y_1 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 75^0 = 0{,}73205$$
$$y_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 195^0 = -2\sqrt{2} \cdot \cos 15^0 = -2{,}73205$$
$$y_3 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 315^0 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^0 = 2,$$

also dieselben Werthe erhalten haben.

Da aber $x + 3 = y$ oder $x = y - 3$ gesetzt wurde, so sind die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = 2 - 3 = -1$$
$$x_2 = -2{,}73205 - 3 = -5{,}73205$$
$$x_3 = 0{,}73205 - 3 = -2{,}26795.$$

3) Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 12x - 9 = 0$$

zu bestimmen.

Auflösung.

Wie man sich leicht überzeugt, führt vorstehende Gleichung abermals auf den irreducibelen Fall. Setzt man daher in (13) und (14)

$$P = -12, \; Q = -9,$$

so folgt:

$$m = n = \sqrt{\tfrac{12}{3}} = 2$$
$$\cos 3\mu = \frac{9}{2\sqrt{64}} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$
$$\log \cos 3\mu = \log 0{,}5625 = 0{,}7501225 - 1$$
$$3\mu = 55^0\, 46'\, 16{,}12'' \text{ oder } 304^0\, 13'\, 43{,}88''$$
$$\mu = 18^0\, 35'\, 25{,}37'' \text{ oder } 101^0\, 24'\, 34{,}63''.$$

Für jeden dieser Werthe erhält man endlich nach (16) die drei Wurzeln:

$$x_1 = 4 \cos 18^0\, 35'\, 25{,}37'' = 3{,}79128$$
$$x_2 = 4 \cos 138^0\, 35'\, 25{,}37'' = -3$$
$$x_3 = 4 \cos 258^0\, 35'\, 25{,}37'' = -0{,}79128.$$

§. 190d. Aufgaben zur Uebung.

1) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50 = 0.$

2) $x^3 + 6x^2 + 37x + 58 = 0.$

3) $x^3 - \tfrac{15}{2}x^2 + 54x - 67\tfrac{1}{2} = 0.$

4) $x^3 - \tfrac{28}{5}x^2 + 13x - 6 = 0.$

5) $x^3 - 39x + 70 = 0.$

6) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$

7) Die Hälfte, der dritte und vierte Theil einer Zahl mit einander multiplicirt, liefert ein Produkt, das um 12 kleiner ist, als das Fünffache jener Zahl; wie heißt dieselbe?

8) Das Produkt dreier Zahlen beträgt 252. Die zweite ist um 4, die dritte um 9 größer als die erste; wie heißen die drei Zahlen?

9) Die dritte Potenz einer Zahl übertrifft das Dreifache dieser Zahl um 8,125. Wie heißt die Zahl?

10) Das Quadrat einer Zahl ist um 4384048 kleiner als der Cubus derselben. Wie heißt die Zahl?

11) Von den drei aneinander stoßenden Kanten eines rechteckigen Parallelepipedons von 180c′ Inhalt ist die eine um 2′, die andere um 9′ größer als die dritte; wie groß sind diese Kanten?

12) Die Höhe eines Cylinders von $62\frac{4}{5}$c′ Inhalt übertrifft den Halbmesser der Grundfläche um 3′; wie groß ist dieser? ($\pi = 3{,}14$.)

13) Die Seite eines jeden von vier Würfeln übertrifft die Seite des zunächst kleineren um $\frac{1}{2}$ Fuß an Länge; zusammen haben sie einen Inhalt von $12\frac{1}{2}$c′. Wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden der vier Würfel?

14) Die Seite der Basis einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Basis ist um 15′ kleiner als die Höhe des Körpers; der Kubikinhalt desselben beträgt 66,429c′. Wie groß ist die Basisseite?

15) Die Höhe eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen ist um 3′ größer als die Seite der größeren und um 4′ größer als die der kleineren Basis. Wie groß sind diese Elemente, wenn das Gewicht 5745,6 Pfd. beträgt? (spec. Gew. = 2,8; 1c′ Wasser = 54 Pfd.)

16) Den Durchmesser und die Höhe eines Cylinders zu berechnen, wenn dessen Kubikinhalt = 25,12′ und dessen Oberfläche = 56,52□′.

17) Ein Kegelstumpf hat 615,44c′ Inhalt; die Höhe ist um 2′ größer als der Durchmesser der größeren Basis und dieser übertrifft den Radius der kleineren Basis um 7′. Wie groß sind die beiden Radien?

18) Wie tief sinkt eine hölzerne Kugel von 2′ Durchmesser im Wasser ein, wenn das spec. Gewicht = 0,7 ist?

○ E. Auflösung der Gleichungen des vierten Grades mit einer Unbekannten.

§. 190e. Auflösung der rein-biquadratischen Gleichungen.

Jede rein-biquadratische Gleichung läßt sich auf die Form bringen:

$$x^4 \mp a^4 = 0,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$x = \sqrt[4]{\pm a^4} = a\sqrt[4]{\pm 1}.$$

Nach §. 116a. Zus. 5. sind aber die vier Werthe von $\sqrt[4]{+1}$ der Reihe nach

$$1_{0^0} = 1;\ 1_{90^0} = i;\ 1_{180^0} = -1;\ 1_{270^0} = -i$$

und die von $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^0}}$:

$$1_{\frac{180^0}{4}} = 1_{45^0} = \frac{i+1}{2}\sqrt{2};\ 1_{\frac{180^0+360^0}{4}} = 1_{135^0} = \frac{i-1}{2}\sqrt{2};$$

$$1_{\frac{180^0+720^0}{4}} = 1_{225^0} = -\frac{i+1}{2}\sqrt{2};\ 1_{\frac{180^0+1080^0}{4}} = 1_{320^0} = -\frac{i-1}{2}\sqrt{2}.$$

woraus sich sofort die Wurzeln der Gleichungen

$$x^4 - a^4 = 0 \text{ und } x^4 + a^4 = 0$$

ergeben.

§. 190f. Auflösung unrein-biquadratischer Gleichungen.

Erste Methode. Bringt man die Gleichung auf die allgemeine Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ldots (1),$$

so kann man dafür schreiben:

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)x^2 + \left(c - \frac{a^3}{4^2}\right)x + d - \frac{a^4}{4^4} = 0$$

oder wenn man der Kürze halber die bekannten Coefficienten

$$b - \frac{3a^2}{8} = b';\ c - \frac{a^3}{4^2} = c';\ d - \frac{a^4}{a^4} = d'$$

setzt:

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^4 + b' x^2 + c' x + d' = 0$$

oder

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^4 + b' \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(c' - \frac{ab'}{2}\right) x + d' - \frac{a^2 b'}{4^2} = 0$$

oder für

$$c' - \frac{ab'}{2} = c''; \; d' - \frac{a^2 b'}{4^2} = d'' \text{ gesetzt:}$$

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^4 + b' \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + c'' x + d'' = 0$$

oder

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^4 + b' \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + c'' \left(x + \frac{a}{4}\right) + d'' - \frac{ac''}{4} = 0.$$

Führt man hierin

$$x + \frac{a}{4} = y \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$d'' - \frac{ac''}{4} = d'''$$

ein, so nimmt die Gleichung (1) die Form an:

$$y^4 + b' y^2 + c'' y + d''' = 0 \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

wofür man auch schreiben kann

$$\left(y^2 + \frac{b'}{2}\right)^2 = \frac{b'^2}{4} - d''' - c'' y$$

oder, wenn man

$$\frac{b'}{2} = -P; \; \frac{b'^2}{4} - d''' = 4Q; \; c'' = -8R \; . \; . \; . \; (4)$$

setzt:

$$(y^2 - P)^2 = 4Q + 8Ry \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

worin also zu nehmen ist:

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{b}{2} + \frac{3a^2}{16} \\ Q &= \frac{b^2}{16} - \frac{d}{4} + \frac{ac}{16} - \frac{a^2 b}{16} + \frac{3a^4}{256} \\ R &= -\frac{c}{8} + \frac{ab}{16} - \frac{a^3}{64} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Nun ist aber identisch

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),$$

$$[2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)]^2 = 4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)+8\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),$$

und hiernach für $\alpha + \beta + \gamma = y$:

$$[y^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]^2 = 4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)+8\alpha\beta\gamma y \quad ..(7)$$

Wählen wir nun α, β, γ so, daß

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = P \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = Q \\ \alpha\beta\gamma = R \text{ oder } \alpha^2\beta^2\gamma^2 = R^2 \end{array}\right\} \quad . . . (8)$$

wird, so geht durch Einführung dieser Werthe die Gleichung (7) über in die Gleichung (5).

Auf die identische Gleichung (5) wird man aber auch geführt, wenn man $y = \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma$ setzt und die Zeichen so wählt, daß das Produkt der drei Posten einerlei Zeichen mit R hat. Ist demnach R positiv, so kann sein:

	α	β	γ
	+	+	+
oder	+	—	—
oder	—	+	—
oder	—	—	+

dagegen für ein negatives R

	α	β	γ
	—	—	—
oder	+	+	—
oder	+	—	+
oder	—	+	+.

Berücksichtigt man ferner, daß

$$(z - \alpha^2)(z - \beta^2)(z - \gamma^2) = z^3 - Pz^2 + Qz - R^2$$

ist, so ergibt sich hieraus, daß α^2, β^2, γ^2 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R^2 = 0 \quad . . . . (9)$$

sind. Diese cubische Gleichung (9) ist aber unmittelbar gegeben, sobald man die biquadratische Gleichung auf die Form (5) gebracht hat.

Um daher eine biquadratische Gleichung aufzulösen, bringe man sie zunächst auf die Form (5), bestimme alsdann die Wurzeln α^2, β^2, γ^2 der cubischen Gleichung (9), so sind die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung enthalten in dem Ausdrucke

$$y = \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma,$$

wo die Zeichencombination immer nach dem Zeichen von R zu bestimmen ist.

Beispiele.

1) Es sei

$$x^4 + 16x^3 + 68x^2 - 16x - 384 = 0$$

die vorgelegte Gleichung.

Setzt man in (6)

$$a = 16;\ b = 68;\ c = -16;\ d = -384,$$

so wird

$$P = 14;\ Q = 49;\ R = 6$$

und die Gleichung (5) geht über in

$$(y^2 - 14)^2 = 196 + 48y,$$

wo nach (2)

$$y = x + 4.$$

Die entsprechende cubische Gleichung (9) ist daher:

$$z^3 - 14z^2 + 49z - 36 = 0$$

und deren Wurzeln sind: 1, 4 und 9.

Da R positiv ist, so sind die vier Werthe von y:

$$1 + 2 + 3 = 6; \quad 1 - 2 - 3 = -4$$
$$-1 + 2 - 3 = -2; \quad -1 - 2 + 3 = 0$$

und die Werthe von y — 4 oder x:

$$2;\ -8;\ -6;\ -4.$$

2) Gegeben sei:

$$x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 80x + 100 = 0.$$

In (6) $a = -8;\ b = 32;\ c = -80;\ d = 100$ gesetzt, gibt:

$$P = -4;\ Q = -1;\ R = 2$$

und statt der Gleichung (5) hat man:

$$(y^2 + 4)^2 = -4 + 16y,$$

wo nach (2) $y = x - 2.$

Die entsprechende cubische Gleichung heißt somit:

$$z^3 + 4z^2 - z - 4 = 0$$

und deren Wurzeln sind: 1; — 1; — 4.

Da R positiv ist, so sind die vier Werthe von y:

$$-1 - i - 2i = -3i - 1$$
$$1 + i - 2i = -i + 1$$
$$1 - i + 2i = i + 1$$
$$-1 + i + 2i = 3i - 1$$

und somit die vier Werthe von y + 2 oder x:

$$-3i + 1;\ -i + 3;\ i + 3;\ 3i + 1.$$

Zweite Methode. Es sei wieder

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

die gegebene Gleichung.

Schreibt man dafür

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right) x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right) x$$
$$+ \frac{y^2}{4} - d \; .\;.\;.\;. \; (10),$$

so wird die rechte Seite dieser Gleichung ein vollständiges Quadrat, wenn

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 = 4 \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right) \left(\frac{y^2}{4} - d\right)$$

oder

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)\, y - c^2 - (a^2 - 4b)\, d = 0 \; .\;.\;. \; (11).$$

Hat man nun eine Wurzel dieser cubischen Gleichung (11) bestimmt, so erhält man nach Gleichung (10) durch Quadratwurzelausziehung zur Bestimmung der vier Werthe von x zwei quadratische Gleichungen.

Beispiele.

1) Ist $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ die gegebene Gleichung und man setzt in Gleichung (1)

$$a = -10; \; b = 35; \; c = -50; \; d = 24,$$

so erhält man die cubische Gleichung

$$y^3 - 35y^2 + 404y - 1540 = 0$$

und hieraus für y die drei Werthe: 14; 11 und 10.

Für $y = 14$ geht aber Gleichung (10) über in

$$(x^2 - 5x + 7)^2 = 4x^2 - 20x + 25,$$

woraus man folgert, daß entweder

$$x^2 - 5x + 7 = 2x - 5$$

oder

$$x^2 - 5x + 7 = -2x + 5.$$

Zur Bestimmung der Werthe von x hat man daher die zwei quadratischen Gleichungen:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

und

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

woraus folgt:

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3, \; x_4 = 4.$$

Für $y = 11$ oder 10 werden dieselben vier Werthe von x gefunden.

2) Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{16} = 0.$$

Als cubische Gleichung erhält man

$$y^3 - \tfrac{1}{8} = 0,$$

wenn man in Gleichung (11)

$$a = 1;\ b = 0;\ c = \tfrac{1}{4};\ d = \tfrac{1}{16}$$

setzt. Die Wurzeln dieser cubischen Gleichung sind:

$$\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right);\ \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right).$$

Für $y = \frac{1}{2}$ folgt aus Gleichung (10)

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

und es ist somit entweder

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

oder

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergeben sich für x die Werthe

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{3}) + \sqrt{-\tfrac{1}{8}\sqrt{3}};\ x_2 = -\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{3}) - \sqrt{-\tfrac{1}{8}\sqrt{3}}$$

und aus der zweiten:

$$x_3 = -\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}) + \sqrt{\tfrac{1}{8}\sqrt{3}};\ x_4 = -\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}) - \sqrt{\tfrac{1}{8}\sqrt{3}}.$$

§. 190g. Aufgaben zur Uebung.

Nach der zweiten Methode aufzulösen:

1) $x^4 - 5x^3 + 36x^2 + 28x - 1040 = 0.$
2) $x^4 - 23x^3 + 180x^2 - 404x - 608 = 0.$
3) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 48x - 2016 = 0.$
4) $x^4 + 17x^3 + 60x^2 - 252x - 1296 = 0.$
5) $x^4 + 7x^3 - 18x^2 + 84x - 360 = 0.$
6) $x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 476x - 1568 = 0.$
7) $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0.$
8) $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 8x - 160 = 0.$
9) $x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 360x - 864 = 0.$
10) $x^4 - x^3 - 3x^2 - 59x - 130 = 0.$
11) $x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 20x + 56 = 0.$
12) $x^4 - 5x^3 - 66x^2 + 468x - 648 = 0.$
13) $x^4 + x^3 - 54x^2 + 280x - 800 = 0.$
14) $x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 16x - 336 = 0.$

Nach der ersten Methode aufzulösen:

15) $x^4 + 20x^3 + 90x^2 - 180x - 891 = 0.$
16) $x^4 - 16x^3 + 38x^2 + 16x - 39 = 0.$

Neunter Abschnitt.

Von den Reihen oder Progressionen.

---

§. 191. Von den Reihen im Allgemeinen.

1) Eine Folge von Größen oder Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen arithmetischen Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe oder Progression.

2) Die einzelnen Größen oder Zahlen werden Glieder genannt und von links gegen rechts gezählt.

3) Je nachdem jedes folgende Glied einer Reihe größer oder kleiner ist, als das nächst vorhergehende, heißt dieselbe eine zunehmende (steigende) oder abnehmende (fallende).

4) Die Zahl, welche andeutet, die wie vielte Stelle ein Glied in einer Reihe einnimmt, heißt Zeiger. Wird dieser allgemein durch n bezeichnet, so heißt das entsprechende Glied das allgemeine Glied.

5) Ein Ausdruck, welcher für jeden Werth von n die Summe der n Glieder liefert, heißt die Summenformel oder das summatorische Glied.

6) Wir betrachten hier zunächst zwei Arten von Reihen. Entweder entsteht nämlich jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden, wenn man zu diesem Einerlei addirt, oder dasselbe mit Einerlei multiplicirt. Im ersten Falle erhält man eine arithmetische, im zweiten eine geometrische Reihe.

7) Die Zahl, welche man zu jedem Gliede einer arithmetischen Reihe addiren muß, um das nächstfolgende Glied zu erhalten, heißt die Differenz, und diejenige, mit welcher man jedes Glied einer geometrischen Reihe zu multipliciren hat, um das

darauf folgende Glied zu bekommen, der Quotient oder Exponent der betreffenden Reihe.

So ist z. B.

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ \ldots$$

eine steigende arithmetische Reihe mit der Differenz 4,

$$12,\ 7,\ 2,\ -3,\ -8,\ -13,\ \ldots$$

eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz — 5,

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ \ldots$$

eine steigende geometrische Reihe mit dem Quotienten 3, und

$$3,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \ldots$$

eine abnehmende geometrische Reihe, deren Quotient $\frac{1}{3}$ ist.

8) Außer den hier angeführten arithmetischen Reihen, bei welchen die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern constant ist, gibt es aber auch noch solche, bei welchen die Differenzen ungleich, und erst die Differenzen dieser oder einer späteren Differenzenreihe constant sind.

Man nennt solche Reihen arithmetische Reihen höheren Ranges oder höhere arithmetische Reihen und zum Unterschiede von diesen die oben besprochenen, arithmetische Reihen des ersten Ranges oder niedere arithmetische Reihen.

9) Eine höhere arithmetische Reihe ist vom zweiten, dritten ꝛc. nten Range, je nachdem erst die Glieder der zweiten, dritten ꝛc. nten Differenzreihe constant ausfallen.

Z. B. die Zahlen

$$5,\ 8,\ 13,\ 24,\ 45,\ 80,\ 133,\ \ldots$$

bilden eine Reihe vom dritten Range; denn aus der

Hauptreihe:	5, 8, 13, 24, 45, 80, 133, . .
folgt die erste Differenzenreihe:	3, 5, 11, 21, 35, 53, . .
„ zweite „	2, 6, 10, 14, 18, . .
„ dritte „	4, 4, 4, 4, . . .

So bilden ferner die Quadratzahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

eine Reihe vom zweiten und die Kubikzahlen

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots$$

eine Reihe vom dritten Range, wie man sich leicht durch Bildung der Differenzenreihen überzeugt.

10) Multiplicirt man der Reihe nach die, gleichen Zeigern entsprechenden, Glieder einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe mit einander, so bilden die aufeinanderfolgenden Produkte eine zusammengesetzte Reihe.

Ist z. B. 2, 5, 8, 11, 14, . . . die arithmetische,
und 1, 2, 4, 8, 16, . . . die geometrische Reihe,
so folgt: 2, 10, 32, 88, 224, . . . als zusammengesetzte Reihe.

11) Eine Reihe, bei welcher je drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder eine stetige harmonische Proportion bilden, heißt eine harmonische Reihe.

Z. B. 6, 4, 3, $2\frac{2}{5}$, 2, ...

A. Niedere arithmetische Reihen.

§. 192. Bestimmung des allgemeinen und summatorischen Gliedes.

1) Bezeichnen wir allgemein das erste Glied einer niederen arithmetischen Reihe durch a, deren Differenz durch d, so heißt das zweite Glied a + d, also das dritte a + 2d, das vierte a + 3d u. s. w.

Es besteht somit jedes Glied aus dem ersten Gliede und der so vielfachen Differenz, als der Zeiger des nächst vorhergehenden Gliedes Einheiten hat.

Das nte Glied heißt demnach a + (n — 1) d und es ist also das allgemeine Glied

$$t = a + (n - 1)\, d \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Ist die Reihe eine abnehmende, so wird d negativ, also

$$t = a - (n - 1)\, d \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

2) Bezeichnen wir nun, um die Summe der n ersten Glieder oder das summatorische Glied s zu bestimmen, das letzte Glied wieder durch t, so ist das summatorische Glied

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (t - d) + t,$$

oder auch

$$s = t + (t - d) + (t - 2d) + \ldots + (a + d) + a.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$2s = (a \overset{1}{+} t) + (a \overset{2}{+} t) + (a \overset{3}{+} t) + \ldots + (a \overset{n-1}{+} t) + (a \overset{n}{+} t)$$

oder 2s = n (a + t).

Folglich ist

$$s = \frac{n}{2}\,(a + t) \;.\;.\;.\; (3)$$

d. h. die Summe der n ersten Glieder wird erhalten, wenn man die Summe des ersten und nten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt.

3) Führt man für t in die vorstehende Formel dessen Werth aus (1) ein, so erhält man:

$$s = \frac{n}{2}\left[a + a + (n-1)d\right]$$

oder

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right] \ldots (4)$$

Von dieser Gleichung wird Gebrauch gemacht, wenn die Summe einer Anzahl von Gliedern aus dem ersten Gliede, der Differenz und dem Zeiger unmittelbar bestimmt werden soll.

4) Die Formeln (1) und (3) setzen uns in den Stand, alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen. Da beide Gleichungen zusammen aber fünf verschiedene Stücke enthalten, so müssen jederzeit drei derselben bekannt sein, oder sich doch aus irgend welchen Bedingungen der Aufgabe angeben lassen, wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll.

Beispiele.

1) Wie heißt das 40ste Glied und die Summe der 40 ersten Glieder der Reihe 2, 6, 10, 14, ...?

Auflösung. Setzt man

$$a = 2,\ d = 4,\ n = 40,$$

so folgt nach (1)

$$t = 2 + (40 - 1)\,4 = 2 + 39\,.\,4 = 158$$

und nach (3)

$$s = \frac{40}{2}\,(2 + 158) = 20\,.\,160 = 3200.$$

2) Man soll das 20ste Glied und die Summe der 20 ersten Glieder der Reihe 8, $5\frac{1}{2}$, 3, ... bestimmen.

Auflösung. Hier ist $a = 8$, $d = -\,2\frac{1}{2}$ und $n = 20$, also wird nach (1)

$$t = 8 - (20 - 1)\,\tfrac{5}{2} = 8 - 19\,.\,\tfrac{5}{2} = -\,39\tfrac{1}{2}$$

und nach (3)

$$s = \frac{20}{2}\,(8 - 39\tfrac{1}{2}) = 10\,.\,-\,31\tfrac{1}{2} = -\,315.$$

3) Es hat sich Jemand im ersten Jahre 20 fl. und in jedem folgenden Jahre 15 fl. mehr als im nächst vorhergehenden erspart; wie viel betrug die ersparte Summe am Ende des 18. Jahres?

Auflösung. Da hier nicht nach dem allgemeinen Gliede t gefragt ist, so bringen wir sogleich die Formel (4) in Anwendung, indem wir $a = 20$, $d = 15$, und $n = 18$ setzen. Es ergibt sich alsdann für

$$s = \frac{18}{2} [2 \,.\, 20 + (18 - 1)\, 15]$$
$$= 9\,(40 + 17 \,.\, 15) = 9\,(40 + 255) = 2655 \text{ fl.}$$

4) Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe beträgt 975, das erste Glied derselben ist 3 und die Differenz = 3; wie viel Glieder hat die Reihe?

Auflösung. Setzen wir in der Formel (4)

$$a = 3,\ d = 3 \text{ und } s = 975,$$

so folgt $$975 = \frac{n}{2} [6 + (n - 1)\, 3]$$

oder $$975 = 3n + \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

oder $$n^2 + n = 650,$$

woraus sich ergibt:

$$n = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{650 + \tfrac{1}{4}} = 25.$$

5) Die Summe des ersten und elften Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 56, die des fünften und vierzehnten 91; wie heißt diese Reihe?

Auflösung. Die allgemeine Form des

	1ten	5ten	11ten	14ten Gliedes
ist	a,	$a + 4d$,	$a + 10d$,	$a + 13d$.

Man erhält somit die beiden Gleichungen:

$$\text{I} \quad a + a + 10d = 56$$
$$\text{II} \quad a + 4d + a + 13d = 91,$$

oder

$$\text{I} \quad 2a + 10d = 56$$
$$\text{II} \quad 2a + 17d = 91$$

und findet hieraus: $a = 3$, $d = 5$.

Die Reihe heißt demnach:

$$\underbrace{3}_{1},\ \underbrace{8}_{2},\ \underbrace{13}_{3},\ \underbrace{18}_{4},\ \underbrace{23}_{5},\ \underbrace{28}_{6},\ \underbrace{33}_{7},\ \underbrace{38}_{8},\ \underbrace{43}_{9},\ \underbrace{48}_{10},\ \underbrace{53}_{11},\ \underbrace{58}_{12},\ \underbrace{63}_{13},\ \underbrace{68}_{14}.$$

6) Zwischen die zwei Zahlen 10 und 50 sollen 34 andere eingeschaltet oder interpolirt werden, so daß diese mit den gegebenen Zahlen eine arithmetische Reihe bilden; wie heißen die 8 ersten Glieder derselben?

Auflösung. Die Reihe hat 36 Glieder. Setzt man daher in der Formel (1) $a = 10$, $n = 36$, $t = 50$,

so folgt: $$50 = 10 + (36 - 1)\, d$$

und hieraus $$d = \frac{50 - 10}{35} = \frac{40}{35} = 1\tfrac{1}{7}.$$

Die Reihe heißt also:

$$10,\ 11\tfrac{1}{7},\ 12\tfrac{2}{7},\ 13\tfrac{3}{7},\ 14\tfrac{4}{7},\ 15\tfrac{5}{7},\ 16\tfrac{6}{7},\ 18.$$

7) Von einer arithmetischen Reihe kennt man die Anzahl der Glieder $= n$, das letzte Glied $= t$ und die Summe aller Glieder $= s$; man soll das erste Glied a und die Differenz d daraus bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

folgt unmittelbar $a = \frac{2s}{n} - t.$

Führt man diesen Werth in die Formel (1) des §. 192 ein, so erhält man

$$t = \frac{2s}{n} - t + (n - 1)\,d$$

und hieraus $d = \frac{2\,(nt - s)}{n\,(n - 1)}.$

§. 193. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie heißt das 25ste Glied und die Summe der 25 ersten Glieder der Reihe 3, 7, 11, 15, ... ?

2) Man soll das 30ste Glied und die Summe der 30 ersten Glieder der Reihe 24, $22\frac{1}{4}$, $20\frac{1}{2}$, ... bestimmen.

3) Es erspart sich Jemand im ersten Jahre 25 fl. und in jedem folgenden 6 fl. mehr als im nächst vorhergehenden; wie viel legt er im 20. Jahre zurück und wie viel hat er sich in diesen 20 Jahren erspart?

4) Es läßt Jemand einen Brunnen von 36 Fuß Tiefe graben und zahlt für den ersten Fuß 56 kr., für jeden folgenden aber 2 kr. mehr, als für den nächst vorhergehenden. Wie viel kostet ihn das Graben des Brunnens?

5) Es hat Jemand 4500 fl. zu 5% auf Zinsen stehen und legt jährlich noch 200 fl. hinzu; wie viel Zins hat er nach 15 Jahren vom Kapital und den zugelegten 200 fl. eingenommen?

6) Man kennt das 41ste Glied einer Reihe $= 82$ und deren Differenz $= 2$ und soll das erste Glied und die Summe der 41 ersten Glieder bestimmen.

7) Ein Beamter hatte sich dadurch im 24sten Jahre seiner Anstellung 266 fl. zurücklegen können, daß er jedes Jahr 10 fl.

mehr zu erübrigen suchte, als im nächst vorhergehenden. Man soll nun berechnen, wie viel er sich im ersten Jahre erspart hat.

8) Wie groß ist die Summe: a) der n ersten geraden, b) der n ersten ungeraden, c) überhaupt der n ersten ganzen Zahlen unserer Zahlenreihe?

9) Man soll die Differenz einer Reihe suchen, deren erstes Glied = 16 und deren 50stes Glied = $40\frac{1}{2}$ ist.

10) Die Summe der 60 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied = 3 ist, beträgt 4605; wie groß ist die Differenz und wie heißt das 60ste Glied?

11) Man kennt von einer arithmetischen Reihe das erste Glied a, die Summe der n ersten Glieder = s und soll hieraus die Differenz d bestimmen.

12) Wie viel Glieder hat eine arithmetische Reihe, wenn deren erstes Glied = 5, deren Differenz = 3 ist und die Summe aller Glieder 3624 beträgt?

13) Vier Zahlen anzugeben, welche eine steigende arithmetische Reihe mit positiven Gliedern bilden, deren beide äußere 205 und deren beide innere 493 als Produkt geben.

14) Ein Vater hat für seinen Sohn in der Weise ein Vermögen von 6750 fl. erspart, daß er bei dessen Geburt 100 fl. und nun jedes Jahr 25 fl. mehr zurückgelegt hat, als im nächst vorhergehenden. Wie alt war der Sohn, als ihm der Vater obige Summe einhändigen konnte, wenn auf die Zinsen keine Rücksicht genommen wird?

15) Leitet einen Ausdruck für die Anzahl n der Glieder einer arithmetischen Reihe her, wenn deren erstes Glied a, die Differenz d und die Summe s gegeben sind.

16) Ein Werkmeister hatte, als er angestellt wurde, 500 fl. Besoldung, erhielt aber jedes Jahr eine Zulage von 25 fl. und hat nun, seit er im Dienste ist, 20000 fl. bezogen. Wie lange ist dies her und welchen Gehalt hat er jetzt?

17) Jeder Körper durchfällt im luftleeren Raum in der ersten Sekunde 16,35 bad. Fuß, in jeder folgenden Sekunde aber immer um das Doppelte dieser Zahl mehr, als in der zunächst vorhergehenden. Wie hoch fällt er in der 8ten Sekunde und welchen Raum durchfällt er in den 8 Sekunden?

18) Welche Ausdrücke erhält man für den in der nten Sekunde allein, und für den ganzen in n Sekunden durchfallenen Raum, wenn man allgemein den Weg der ersten Sekunde durch $\frac{g}{2}$ bezeichnet?

19) Welche Zeit braucht ein im luftleeren Raum fallender Körper, um einen Weg von $2354\frac{2}{5}$ Fuß zurückzulegen?

20) Es hat sich Jemand dadurch in diesem Jahre 214 fl. und im Ganzen jetzt 3810 fl. erspart, daß er jedes folgende Jahr von seiner Besoldung 6 fl. mehr zurückgelegt hat, als im vorhergehenden; wie lange bezieht derselbe schon einen Gehalt, und wie viel hat er sich im ersten Jahre erspart?

21) Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe in dem letzten Gliede t, der Summe aller Glieder = s und der Differenz d auszudrücken.

22) Es hat Jemand eine Zahlung von 2850 fl. in Jahresterminen in der Weise abzutragen, daß er im ersten Jahre 100 fl., in jedem folgenden aber 25 fl. mehr bezahlt, als im nächst vorhergehenden. Nach wie viel Jahren ist die Schuld getilgt und wie viel hat er im letzten Jahre zu zahlen?

23) Die Summe des ersten und achten Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 28, die des 5ten und 20sten aber 60; wie heißen die 8 ersten Glieder dieser Reihe?

24) Die Summe der beiden mittleren Glieder einer arithmetischen Reihe von 20 Gliedern beträgt $89\frac{1}{2}$, die Differenz des ersten und letzten Gliedes $85\frac{1}{2}$; wie heißt die Reihe?

25) Die Summe des dritten und achten Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 29, das Produkt des fünften und zwölften aber 442; wie heißt das erste Glied und die Differenz?

26) Ein Reisender wünscht in 13 Tagen an einen bestimmten Ort zu kommen und beschleunigt darum seine Reise in der Art, daß er jeden Tag $\frac{3}{4}$ Stunden mehr zurücklegt, als am vorhergehenden; wie viel Stunden hat er am letzten Tage und wie viel im Ganzen zurückzulegen, wenn er am ersten Tage 5 Stunden macht?

27) Ein Wohlthäter vertheilte 99 fl. unter eine Anzahl Kinder in der Weise, daß das älteste eine bestimmte Summe, das nächst jüngere einen Gulden weniger, wieder das nächst

jüngere einen Gulden weniger als dieses u. s. w., das jüngste 4 fl. erhielt; wie viel Kinder waren es und wie viel erhielt das älteste unter ihnen?

28) Unter eine Anzahl Arbeiter wurde eine bestimmte Summe in einer gewissen Ordnung als Belohnung vertheilt, indem nämlich jeder folgende immer um ein Bestimmtes mehr erhielt, als der nächst vorhergehende. Nun waren aber der siebente und der zwölfte nicht gegenwärtig und der vierte und achte nahmen bezüglich deren Geld in Empfang, um es ihnen einzuhändigen. Dadurch erhielt nun der vierte 12 fl. 27 kr. und der achte dagegen 12 fl. 54 kr. Wie viel hatte der erste anzusprechen, wie viel jeder folgende mehr, und wie viel Arbeiter waren dabei betheiligt, wenn die zu vertheilende Summe 95 fl. 15 kr. betrug?

29) Unter 20 Soldaten, welche bei der Bestürmung einer Festung zuerst den Wall erstiegen haben, sollen 6700 fl. in der Weise vertheilt werden, daß jeder nachfolgende 30 fl. weniger erhalte, als der nächst vorhergehende. Wie viel erhielten der erste und letzte?

30) Einige Soldaten sollen ihrer Tapferkeit wegen in der Weise belohnt werden, daß der tapferste 300 fl., jeder folgende aber 10 fl. weniger erhalte, als der nächst vorhergehende; wie viel solcher Tapferen zählte man, wenn 4550 fl. unter sie vertheilt wurden?

31) Ein Vater wurde nach dem Alter seiner Kinder gefragt und gab hierauf zur Antwort: „Das Alter von je zwei aufeinanderfolgenden differirt um 2 Jahre, summirt man die Jahre aller Kinder, so erhält man die Zahl 77, und multiplicirt man die Summe der Alter des zweiten und fünften mit dem Alter des dritten, so bekommt man das 13fache Alter des sechsten.“ Wie viel Kinder hatte dieser Mann und wie alt waren das jüngste und älteste derselben?

32) Zwei Personen A und B reisen zu gleicher Zeit von zwei um 245 Meilen von einander entfernten Orten P. und Q. ab; A von P. gegen Q., B von Q. gegen P. A macht täglich 5 Meilen, B aber den ersten Tag nur $2\frac{1}{2}$ Meilen, jeden folgenden Tag aber eine halbe Meile mehr, als am nächst vorhergehenden. Wo kommen beide zusammen?

33) Eine vierziffrige Zahl hat folgende Eigenschaften: Die Ziffern bilden in der Ordnung von der Ziffer der Tausender gegen die der Einer eine steigende arithmetische Reihe, deren Summe in der Zahl selbst $149\frac{1}{8}$mal enthalten ist; werden die Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben, so entsteht eine Zahl, welche um 6174 größer ist als die zu suchende. Wie heißt diese Zahl?

34) Die Seiten von fünf Quadraten bilden eine steigende arithmetische Reihe und haben zusammen eine Länge von 65 Fuß. Die Summe der Inhalte des größten und kleinsten Quadrates ist um 19 Quadratfuß kleiner als die Summe der Inhalte der drei anderen. Wie groß sind die Seiten und die Inhalte dieser fünf Quadrate?

35) Zwischen die zwei Zahlen 3 und 14 sollen 7 andere eingeschaltet werden, so daß diese mit den gegebenen Zahlen eine arithmetische Reihe bilden. Wie heißen diese Zahlen?

B. Höhere arithmetische Reihen.

§. 194. Bildung der höheren Reihen.

1) Addirt man successiv die 1, 2, 3, 4, ... n ersten Glieder der niederen arithmetischen Reihe

$$\overset{1}{a},\ a \overset{2}{+} d,\ a \overset{3}{+} 2d,\ a \overset{4}{+} 3d, \ldots\ a + (\overset{n}{n} - 1)\,d,$$

so erhält man die n ersten Glieder der arithmetischen Reihe zweiten Ranges:

$$\overset{1}{a},\ 2a \overset{2}{+} d,\ 3a \overset{3}{+} 3d,\ 4a \overset{4}{+} 6d, \ldots\ [2a + (\overset{n}{n} - 1)\,d]\,\frac{n}{2} \ldots (1)$$

Verfährt man mit dieser Reihe analog wie vorhin, so erhält man eine Reihe dritten Ranges:

$$\overset{1}{a},\ 3a \overset{2}{+} d,\ 6a \overset{3}{+} 4d,\ 10a \overset{4}{+} 10d, \ldots\ (2)$$

u. s. w.

Auf diese Weise kann man fortfahren, die allgemeine Form einer Reihe vierten, fünften rc. Ranges zu entwickeln.

Aufgabe. Führet für a und d beliebige Zahlenwerthe in obige Reihen ein, bildet so die Hauptreihe und entwickelt deren Differenzenreihen!

a 3a+d 6a+4d 10a+10d

2a+d 3a+3d 4a+6d

a+2d a+3d

d

In vielen Fällen handelt es sich aber weniger um die Bildung einer arithmetischen Reihe von bestimmtem Range überhaupt, als vielmehr um die Aufstellung einer solchen, deren Hauptreihe und Differenzenreihen gegebene Anfangsglieder haben.

Man überzeugt sich sogleich, daß hier der umgekehrte Weg eingeschlagen werden muß, wie bei der Bildung der Differenzenreihen. Bezeichnen wir das erste Glied der Hauptreihe durch a, die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten rc. mten Differenzenreihe der Reihe nach durch d_1, d_2, d_3, ... d_m, ist also die Reihe vom zweiten, dritten rc. mten Range, je nachdem alle Glieder einer Differenzenreihe d_2, d_3, ... d_m werden, so erhält man als Schema für die Bildung

α) einer Reihe des zweiten Ranges:

$$\begin{array}{llll} d_2, & d_2, & d_2, & d_2 \\ d_1, \quad d_1+d_2, & & d_1+2d_2, & d_1+3d_2, \ldots \\ a, \quad a+d_1, & a+2d_1+d_2, & & a+3d_1+3d_2, \ldots \end{array}$$

β) einer Reihe des dritten Ranges:

$$\begin{array}{lllll} & d_3, & d_3 \ldots & & \\ & d_2, & d_2+d_3, & d_2+2d_3, \ldots & \\ d_1, & d_1+d_2, & d_1+2d_2+d_3, & d_1+3d_2+3d_3, \ldots & \\ a, \; a+d_1, & a+2d_1+d_2, & a+3d_1+3d_2+d_3, & a+4d_1+6d_2+4d_3, \ldots & \end{array}$$

u. s. w.

§. 195. Bestimmung des allgemeinen und summatorischen Gliedes.

1) Drücken wir das allgemeine Glied im Anfangsgliede der Hauptreihe und den Anfangsgliedern der Differenzenreihen aus, und legen also, um zunächst das allgemeine und summatorische Glied der Reihen zweiten Ranges zu entwickeln, der Herleitung die Reihe

$$a, \; a+d_1, \; a+2d_1+d_2, \; a+3d_1+3d_2, \ldots$$

zu Grunde, so ersehen wir sogleich, daß das nte Glied gebildet wird durch die Summe von a und (n — 1) Anfangsgliedern der ersten Differenzenreihe. Diese Differenzenreihe bildet aber selbst eine niedere arithmetische Reihe, deren erstes Glied d_1 und deren Differenz d_2 heißt. Die Summe der (n — 1) ersten Glieder ist aber nach §. 192 (4)

$$= \frac{(n-1)}{2}\left[2d_1 + (n-2)\,d_2\right]$$

$$= (n-1)\,d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2.$$

Bezeichnen wir nun allgemein das nte Glied einer Reihe mten Ranges durch $t^{(m)}$, so erhalten wir für

$$t^{(2)} = a + (n-1)\,d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,d_2 \ldots (1).$$

So findet man z. B. für das 20. Glied einer Reihe zweiten Ranges, wenn $a = 1$, $d_1 = 5$, $d_2 = 4$ ist,

$$t^{(2)} = 1 + 19 \,.\, 5 + \frac{19 \,.\, 18}{2} \,.\, 4$$

$$= 1 + 95 + 684 = 780.$$

2) Häufig liegt uns die Aufgabe vor, irgend ein Glied einer Reihe zu bestimmen, von welcher man weder die Anfangsglieder der Haupt- und Differenzenreihen, noch eine hinreichende Anzahl von Anfangsgliedern der Hauptreihe kennt, um etwa die Differenzenreihen hieraus ableiten zu können, so daß also nur irgend beliebige Glieder der Reihe nebst deren Stellenzeiger gegeben sind.

Um in solchen Fällen das allgemeine Glied zu bestimmen, geben wir der Gleichung (1) die Form

$$t^{(2)} = \frac{d_2}{2}\,n^2 + \left(d_1 - \frac{3d_2}{2}\right) n + a - d_1 + d_2 \ldots (2)$$

und bezeichnen die hierin auftretenden und für jetzt ganz unbekannten Coefficienten

$$\frac{d_2}{2},\ d_1 - \frac{3d_2}{2},\ a - d_1 + d_2$$

der Reihe nach durch

$$\tau_2, \qquad \tau_1, \qquad \tau_0.$$

Wir erhalten alsdann für das nte Glied einer Reihe zweiten Ranges die allgemeine Form:

$$t^{(2)} = \tau_2\, n^2 + \tau_1\, n + \tau_0 \ldots (3).$$

Hat man nach dieser Form irgend ein Glied einer Reihe zu berechnen, von welcher nur einzelne Glieder nebst deren Stellenzeiger gegeben sind, so setze man für n der Reihe nach die gegebenen Stellenzeiger, drücke so die gegebenen Glieder in τ_2, τ_1, u. τ_0 aus und bestimme aus den erhaltenen drei Gleichungen die Werthe dieser Unbekannten. Führt man nun diese, so wie den Stellen-

zeiger des verlangten Gliedes in (3) ein, so wird dieses leicht gefunden.

Beispiel.

Von einer arithmetischen Reihe zweiten Ranges kennt man das zweite Glied = 8, das fünfte = 29 und das zehnte = 124; wie heißen die 8 ersten Glieder?

Auflösung. Setzt man in der Gleichung (3) für n der Reihe nach 2, 5 und 10 und für $t^{(2)}$ die betreffenden Gliederwerthe, so erhält man nachstehende drei Gleichungen:

$$8 = 4\tau_2 + 2\tau_1 + \tau_0$$
$$29 = 25\tau_2 + 5\tau_1 + \tau_0$$
$$124 = 100\tau_2 + 10\tau_1 + \tau_0$$

und hieraus

$$\tau_2 = \tfrac{3}{2},\ \tau_1 = -\tfrac{7}{2},\ \tau_0 = 9.$$

Die Form des allgemeinen Gliedes ist demnach

$$t^{(2)} = \tfrac{3}{2}\,n^2 - \tfrac{7}{2}\,n + 9$$

und wenn man hierin der Reihe nach

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

setzt, so erhält man für die 8 Anfangsglieder:

$$7,\ 8,\ 12,\ 19,\ 29,\ 42,\ 58,\ 77.$$

3) Um eine Formel für das summatorische Glied einer Reihe zweiten Ranges zu gewinnen, kehren wir zu der Summenformel

$$s = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d_1]$$

der niederen arithmetischen Reihen zurück und geben dieser die Form

$$s = na + \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}\,d_1;$$

so führt uns eine nähere Betrachtung der gesetzmäßigen Bildung dieser Gleichung leicht zur Folgerung, daß das summatorische Glied einer Reihe zweiten Ranges ausgedrückt sein wird durch die Gleichung

$$s^{(2)} = na + \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}\,d_1 + \frac{n\,(n - 1)\,(n - 2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,d_2 \quad (4).$$

Um nun die allgemeine Giltigkeit dieser Formel nachzuweisen, bestimmen wir zunächst die Summe der (n + 1) ersten Glieder. Diese wird erhalten, wenn man zur Summe der n ersten Glieder noch das (n + 1)te Glied addirt. Bezeichnen wir dieses durch $t^{(2)}_{n+1}$, so folgt, wenn man in (1) n + 1 statt n setzt,

$$t^{(2)}_{n+1} = a + n\,d_1 + \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}\,d_2,$$

$$\text{also } s^{(2)}_{n+1} = s^{(2)} + t^{(2)}_{n+1}$$

$$= na + \frac{n(n-1)}{1 . 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} d_2$$

$$+ a + nd_1 + \frac{n(n-1)}{1 . 2} d_2$$

$$= (n+1)a + \frac{(n+1)n}{1 . 2} d_1 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 . 2 . 3} d_2.$$

Dieselbe Gleichung resultirt aber auch, wenn man $n + 1$ statt n in (4) setzt. Ist somit die Gleichung (4) für n richtig, so ist sie es auch für $n + 1$. Nun geht dieselbe aber für $n = 1$ über in $s = a$, und ist somit für $n = 1$ giltig, folglich ist sie auch für $n = 1 + 1 = 2$, und darum für $n = 2 + 1 = 3$ u. s. w. d. h. allgemein giltig.

Multiplicirt man die rechte Seite der Gleichung (4) aus, und ordnet dieselbe nach Potenzen von n, so erhält man

$$s^{(2)} = \frac{d_2}{6} n^3 + \frac{d_1 - d_2}{2} n^2 + \left(a - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3}\right) n.$$

Bezeichnet man die Coefficienten

$$\frac{d_2}{6}, \frac{d_1 - d_2}{2}, a - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3}$$

der Reihe nach durch

$$\sigma_3, \quad \sigma_2, \quad \sigma_1,$$

so nimmt also das summatorische Glied die allgemeine Form an:

$$s^{(2)} = \sigma_3 n^3 + \sigma_2 n^2 + \sigma_1 n \quad . \; . \; . \; (5).$$

Diese wird also aus der des allgemeinen Gliedes erhalten, wenn man letztere mit n multiplicirt, den Coefficienten aber eine andere Bedeutung beilegt.

Als Anwendung diene nachstehendes

Beispiel.

Wie groß ist die Summe der 20 ersten Glieder der Reihe

3, 4, 6, 9, 13, 18, ...

Erste Auflösung. Bildet man die Differenzenreihen, so findet man, daß die vorgelegte Reihe vom zweiten Range ist, bei welcher

$$a = 3, \; d_1 = 1 \text{ und } d_2 = 1.$$

Nach Gleichung (4) wird daher

$$s^{(2)} = 20 . 3 + \frac{20 . 19}{1 . 2} + \frac{20 . 19 . 18}{1 . 2 . 3}$$

$$= 60 + 190 + 1140 = 1390.$$

Zweite Auflösung. Setzen wir in der allgemeinen Form (5) der Reihe nach n = 1, 2, 3 und für s die entsprechenden Werthe: 3, 7, 13, so ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 &= \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1 \\ 7 &= 8\sigma_3 + 4\sigma_2 + 2\sigma_1 \\ 13 &= 27\sigma_3 + 9\sigma_2 + 3\sigma_1 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\sigma_3 = \frac{1}{6}, \; \sigma_2 = 0, \; \sigma_1 = \frac{17}{6}.$$

Die Summe der 20 ersten Glieder ist somit nach (5)

$$\begin{aligned} s^{(2)} &= \frac{1}{6} \cdot 20^3 + 0 + \frac{17}{6} \cdot 20 \\ &= 1390. \end{aligned}$$

4) Analog wie oben lassen sich nun leicht auch die Gleichungen für das allgemeine und das summatorische Glied einer Reihe dritten Ranges aufstellen. So besteht z. B. das allgemeine Glied $t^{(3)}$ aus dem ersten Gliede a und aus der Summe der (n — 1) ersten Glieder der ersten Differenzenreihe, welche selbst vom zweiten Range ist und d_1 zum Anfangsgliede hat. Führt man diese Summirung mittelst der Gleichung (4) aus, so erhält man für das verlangte Glied

$$t^{(3)} = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_3.$$

Ebenso läßt sich wieder leicht durch den Schluß von n auf n + 1 nachweisen, daß für das summatorische Glied die Gleichung besteht

$$\begin{aligned} s^{(3)} &= na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d_3. \end{aligned}$$

Man erkennt aus beiden Gleichungen sogleich, daß in Bezug auf die Form derselben die Beziehungen gelten

$$\begin{aligned} t^{(3)} &= \tau_3 n^3 + \tau_2 n^2 + \tau_1 n + \tau_0 \\ s^{(3)} &= \sigma_4 n^4 + \sigma_3 n^3 + \sigma_2 n^2 + \sigma_1 n. \end{aligned}$$

5) Durch Fortsetzung des angedeuteten Verfahrens ließen sich nun leicht auch für das allgemeine und summatorische Glied der Reihen vierten, fünften 2c. Ranges allgemeine Gleichungen herleiten. Man überzeugt sich jedoch leicht durch den bloßen Anblick der bis jetzt gewonnenen Resultate, daß man ganz allgemein erhalten wird für eine Reihe des mten Ranges

$$\overset{(m)}{t} = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2} d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} d_3$$

$$+ \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2) \ldots \ldots (n-m)}{1 \,.\, 2 \ldots \ldots m} d_m \,.$$

$$\overset{(m)}{s} = na + \frac{n\,(n-1)}{1 \,.\, 2} d_1 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} d_2 + \ldots$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots \ldots (n-m)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \ldots (m+1)} d_m.$$

oder in Bezug auf die Form dieser Gleichungen:

$$t^{(m)} = \tau_m n^m + \tau_{m-1} n^{m-1} + \tau_{m-2} n^{m-2} + \ldots + \tau_1 n + \tau_0$$

$$s^{(m)} = \sigma_{m+1} n^{m+1} + \sigma_m n^m + \sigma_{m-1} n^{m-1} + \ldots + \sigma_2 n^2 + \sigma_1 n.$$

Anmerkung. Da in der allgemeinen Form für $t^{(m)}$ $(m+1)$ unbekannte Coefficienten auftreten, so hat man zur vollständigen Bestimmung einer arithmetischen Reihe immer ein Glied mehr nöthig, als der Rangzeiger Einheiten hat.

§. 196. Aufgaben zur Uebung.

1) Von einer arithmetischen Reihe sind die drei ersten Glieder 5, 7, 13 gegeben; man soll hieraus die 10 ersten Glieder entwickeln.

1a) Die Anfangsglieder der Hauptreihe und der aufeinanderfolgenden Differenzenreihen einer arithmetischen Reihe vierten Ranges heißen der Reihe nach 5, 4, 3, 2, 1; man soll hieraus die 10 ersten Glieder der Hauptreihe entwickeln.

2) Von einer arithmetischen Reihe dritten Ranges kennt man das erste Glied der Hauptreihe = 4, die ersten Glieder der auf einander folgenden Differenzenreihen = 3, 1 und 2; man soll hieraus die 12 ersten Glieder der Reihe bilden.

2a) Wie heißt das 50te Glied der Reihe 3, 5, 8, 12, 17, ...?

2b) Wie heißt das 17te Glied der Reihe 5, 9, 16, 28, 48, 80, ...?

2c) Die Anfangsglieder der Hauptreihe und der aufeinander folgenden Differenzenreihen einer Reihe fünften Ranges heißen: 3, — 4, 2, — 3, — 2, 4; wie heißen die 12 ersten Glieder der Hauptreihe?

3) Wie heißt das 50te Glied und die Summe der 50 ersten Glieder der Reihe: 2, 5, 11, 22, 40, ... ?

4) Die fünf ersten Glieder einer arithmetischen Reihe vierten Ranges heißen 4, 6, 11, 20, 37; wie heißt das 20te Glied und die Summe der 20 ersten Glieder derselben?

4a) Die fünf ersten Glieder einer Reihe vierten Ranges heißen: 1, 2, 4, 8, 16; man soll das zwölfte Glied und die Summe der zwölf ersten Glieder bestimmen.

5) Von einer arithmetischen Reihe zweiten Ranges kennt man das dritte Glied = 8, das achte Glied = 78 und das zehnte Glied = 127; wie heißt das 15te, das 19te Glied und die Summe der 19 ersten Glieder?

5a) Von einer arithmetischen Reihe zweiten Ranges ist das sechste Glied = 23, das zehnte = 57 und das fünfzehnte = 122; man soll das 50te Glied und die 6 ersten Glieder berechnen.

5b) Von einer arithmetischen Reihe vierten Ranges kennt man das fünfte Glied = 16, das neunte = 163, das elfte = 386, das vierzehnte = 1093, das fünfzehnte Glied = 1471. Man soll das 18. Glied und die Summe der 18 ersten Glieder berechnen.

5c) Das zweite Glied einer arithmetischen Reihe vierten Ranges heißt 9, das elfte 630, das dreizehnte 1186, das sechszehnte 2655; wie heißt das vierte, das zwölfte und fünfzehnte Glied dieser Reihe?

6) Das dritte, fünfte, achte und neunte Glied einer arithmetischen Reihe dritten Ranges seien der Reihe nach 8, 32, 158, 236; wie heißt das 20te Glied und wie groß ist die Summe der zwölf ersten Glieder?

6a) Von einer arithmetischen Reihe dritten Ranges kennt man das zweite Glied = 2, das fünfte = 15, das achte = 64 und das zehnte Glied = 130. Man soll hieraus das vierzehnte Glied, sowie die Summe der vierzehn ersten Glieder bestimmen.

○ 6b) Die Anfangsglieder einer Hauptreihe und der Differenzenreihen einer arithmetischen Reihe dritten Ranges heißen der Reihe nach 1, 4, 2, 3. Man soll angeben, das wie vielte Glied 361 heißt, ohne die Reihe selbst zu bilden.

7) Von einer arithmetischen Reihe vierten Ranges ist gegeben: das zweite Glied = 3, das vierte = 14, das siebente = 128, das neunte = 374 und das elfte = 882; wie heißen die zwölf ersten Glieder dieser Reihe?

§. 197. Von den figurirten Zahlen.

1) Setzt man in der allgemeinen Form der niederen arithmetischen Reihen

$$a,\ a + d,\ a + 2d, \ldots a + (n - 1)\,d$$

$a = 1$, so geht dieselbe über in

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d, \ldots 1 + (n - 1)\,d$$

und wenn man hiervon der Reihe nach die Summe der 1, 2, 3, 4, ... n ersten Glieder bestimmt, so bilden diese Summen nachstehende Reihen zweiten Ranges:

$$1,\ 2 + d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d,\ 5 + 10d, \ldots$$

Führt man nun für d der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, ... ein, so liefert diese allgemeine Reihe nachstehende Zahlenreihen:

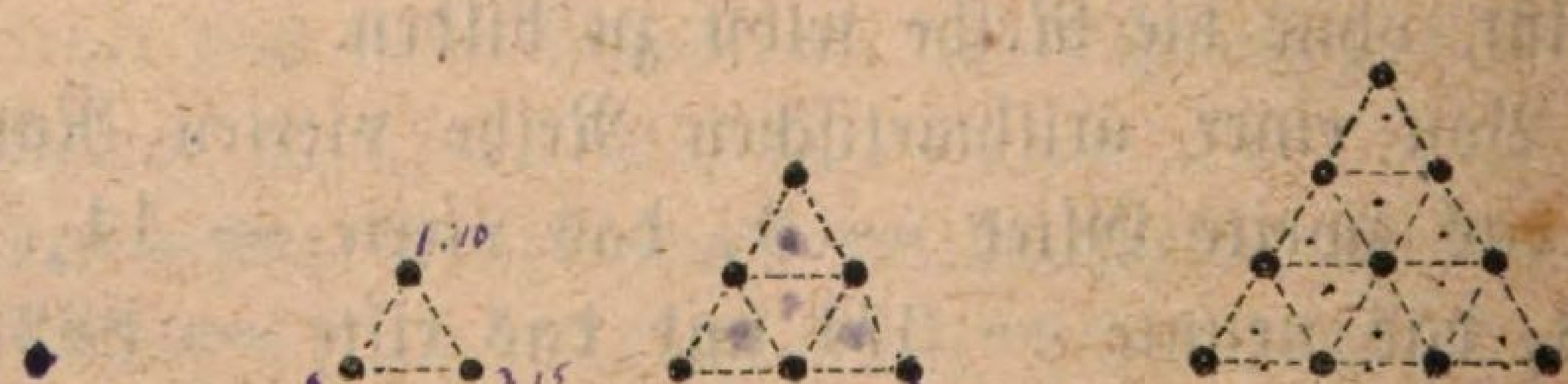
1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (a)
1, 4, 9, 16, 25, 36, ... (b)
1, 5, 12, 22, 35, 51, ... (c)
1, 6, 15, 28, 45, 66, ... (d)
1, 7, 18, 34, 55, 81, ... (e).

Man nennt diese Reihen **Vielecks-** oder **Polygonalzahlen**, da sich deren Glieder, wenn man sich solche aus verkörperten Einheiten gebildet denkt, in der Form von regelmäßigen Polygonen darstellen lassen.

Je nach der Figur, welche durch die Glieder gebildet werden kann, heißen insbesondere auch die Zahlen der Reihe (a) **Dreiecks-** oder **Trigonalzahlen**, die der Reihe (b) **Vierecks-** oder **Tetragonalzahlen**, die der Reihe (c) **Fünfecks-** oder **Pentagonalzahlen** 2c.

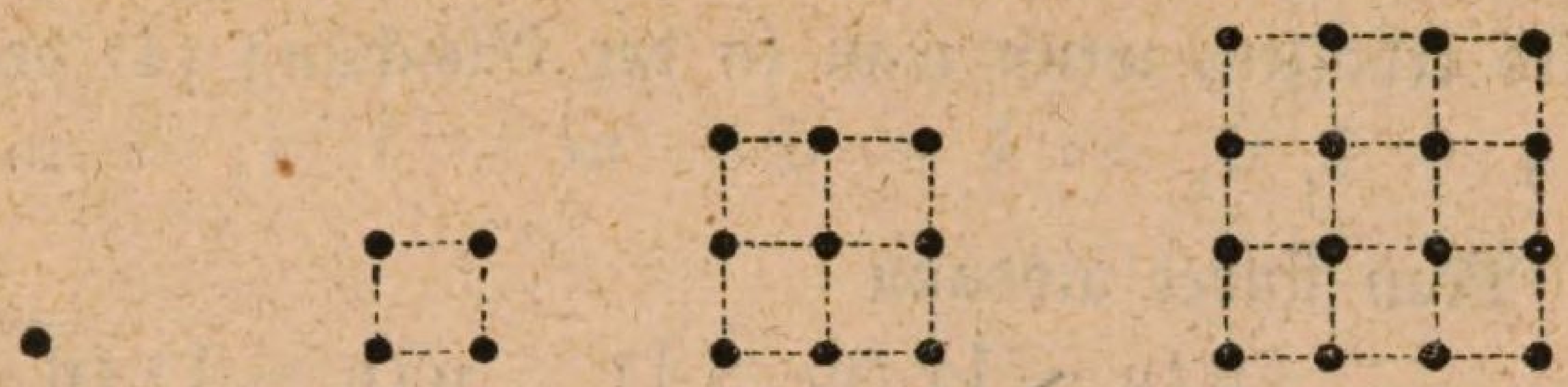
Denn es lassen sich darstellen
die Zahlen: 1, 3, 6, 10

durch



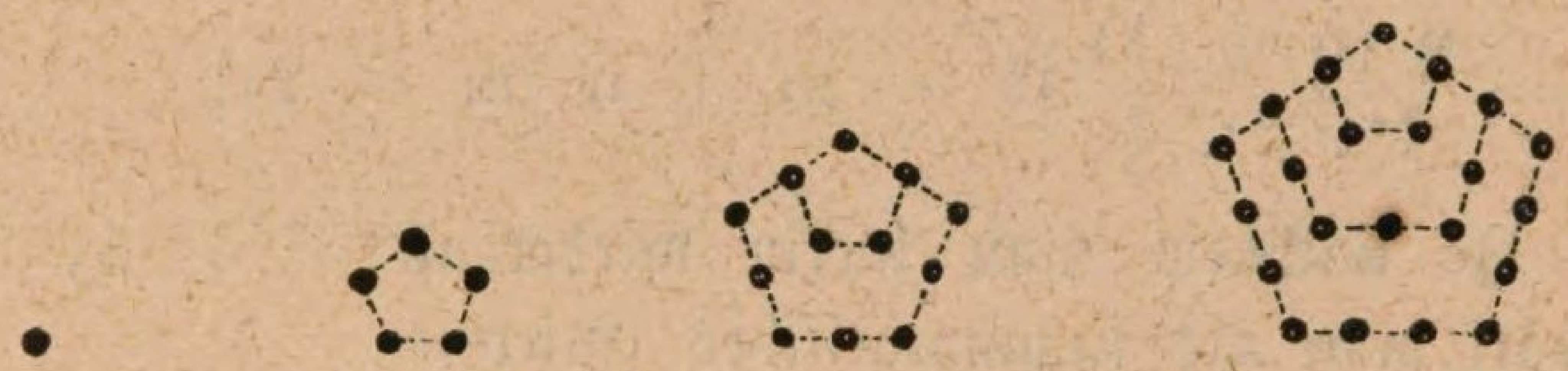
die Zahlen: 1, 4, 9, 16

durch



die Zahlen: 1, 5, 12, 22

durch



u. s. w.

2) Um eine Formel für das allgemeine Glied der Polygonalzahlen zu erhalten, bestimme man aus der Hauptreihe

$$1,\ 2 + d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d,\ 5 + 10d,\ \ldots$$

die Differenzenreihen

$$1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ 1 + 4d \ldots.$$

$$d \qquad d \qquad d$$

und substituire nun in der Gleichung (1) des §. 195 1 für a, $1 + d$ für d_1 und d für d_2, so folgt:

$$t = 1 + (n - 1)(1 + d) + \frac{(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2} d$$

oder

$$t = \frac{n}{2}[2 + (n - 1)d]$$

Nun ist aber für irgend eine beliebige meckige Polygonalzahl

$$d = m - 2,$$

also geht dafür vorstehende Formel über in

$$t = \frac{n}{2}[4 - m + n(m - 2)].$$

Setzt man hierin der Reihe nach $m = 3, 4, 5, \ldots$, so erhält man als allgemeines Glied

für die Dreieckszahlen $= \frac{n(n + 1)}{2}$

„ „ Viereckszahlen $= n^2$

„ „ Fünfeckszahlen $= \frac{n(3n - 1)}{2}$

u. s. w.

3) Das summatorische Glied der $m$eckigen Polygonalzahlen wird erhalten, wenn man in der Gleichung (4) des §. 195
$a = 1,\ d_1 = 1 + d = m - 1,\ d_2 = m - 2$ setzt.

Man findet alsdann

$$s = n + \frac{n(n-1)(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}[5 - m + n(m-2)].$$

Je nachdem man hierin wieder $m = 3, 4, 5 \ldots$ setzt, erhält man als summatorisches Glied

der Dreieckszahlen $= \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$

„ Viereckszahlen $= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

„ Fünfeckszahlen $= \frac{n^2}{2}(n+1)$

u. s. w.

4) Das erste Glied, die Summe der 2 ersten Glieder, die der 3, 4 ꝛc. n ersten Glieder einer Reihe von Polygonalzahlen bilden eine neue Reihe von Zahlen, welche man Pyramidalzahlen heißt, da sich ihre verkörperten Einheiten (z. B. als Kugeln) so übereinander schichten lassen, daß Pyramiden entstehen, deren Grundflächen durch regelmäßige, den entsprechenden Polygonalzahlen zukommende, Vielecke gebildet werden.

So erhält man z. B. aus den Dreieckszahlen (a) die dreieckigen Pyramidalzahlen

1, 4, 10, 20, 35, 56, ...

aus den Viereckszahlen (b) die viereckigen Pyramidalzahlen

1, 5, 14, 30, 55, 91, ...

aus den Fünfeckszahlen (c) die fünfeckigen Pyramidalzahlen

1, 6, 18, 40, 75, 126, ... u. s. w.

Aus dieser Bildungsweise geht unmittelbar hervor, daß das allgemeine oder $n$te Glied der Polygonalzahlen zugleich angibt, wie viel Kugeln die $n$te Schichte der entsprechenden Kugelpyramide enthält, und daß die Summe jener n ersten Polygonalzahlen die Anzahl aller Kugeln in dem ganzen Haufen bestimmt.

So enthält also z. B. in einer dreieckigen Kugelpyramide die nte Schichte $\frac{n}{2}(n + 1)$, und die ganze Pyramide

$$\frac{n}{6}(n + 1)(n + 2) \text{ Kugeln.}$$

Beispiel.

Wie viel Kugeln enthält eine dreieckige Kugelpyramide und wie viel liegen auf dem Boden, wenn der Haufen 20 Schichten hat?

Auflösung. Anzahl der auf dem Boden liegenden = $\frac{20}{2}(20 + 1) = 210$ Kugeln.

Anzahl aller Kugeln $= \frac{20}{6} . 21 . 22 = 1540$ Kugeln.

5) Die Schichtung der Kugeln geschieht nicht immer in Pyramiden, sondern auch in Form von länglichen dreiseitigen Prismen, welche sich dann theils an parallele Wände, theils an Kugelpyramiden anlehnen. Wir wollen nachstehend in Kürze die Hauptformen betrachten.

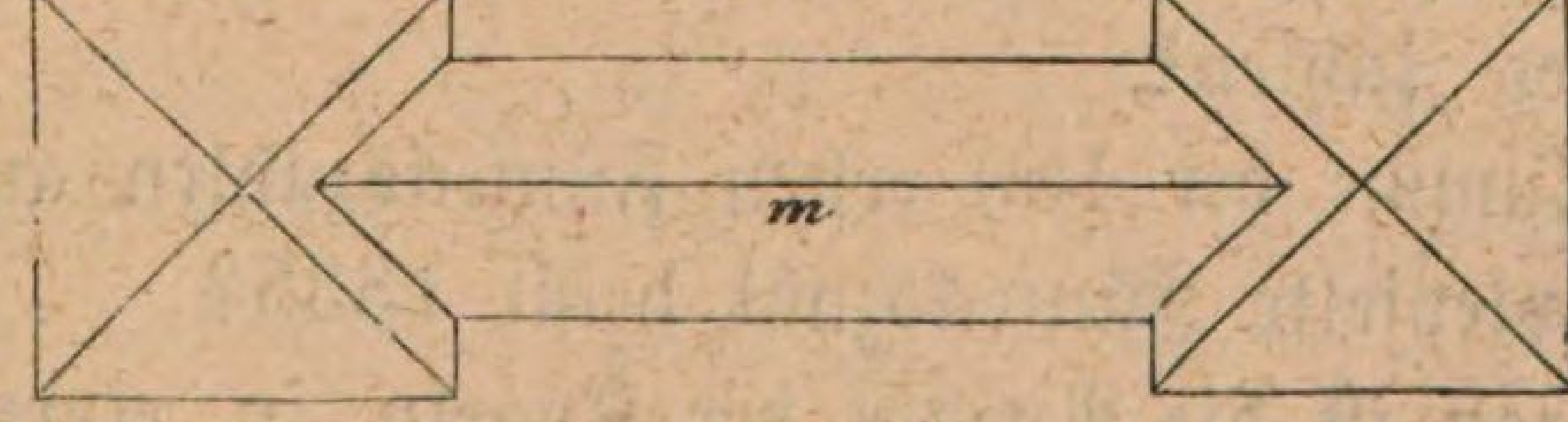
a) Das Prisma sei zwischen zwei parallele Wände aufgebaut.

Enthält dasselbe in der obersten Reihe, dem sogen. Rücken, m Kugeln und im Ganzen n Schichten, so liegen in der zweiten Schichte 2m, in der dritten 3m, . . also in der nten Schichte nm Kugeln und im ganzen Haufen

$$m + 2m + 3m + \,.\,.\, + mn = \frac{nm}{2}(n + 1).$$

b) Das Prisma sei zwischen zwei Kugelpyramiden aufgeschichtet (Fig. 9).

Fig. 9.



Enthält der Rücken m Kugeln, so liegen in der zweiten Schichte 2 (m — 1), in der dritten 3 (m — 2) . . . . , also in der untersten oder nten Schichte

$$n\,[m - (n - 1)] = n\,(m - n + 1) \text{ Kugeln.}$$

Um die Summe der Kugeln in den n Schichten zu bestimmen, bilde man aus der Hauptreihe

$$m,\ 2m - 2,\ 3m - 6,\ 4m - 12,\ \ldots$$

die Differenzenreihen:

$$m - 2 \quad m - 4 \quad m - 6$$
$$-2 \quad -2$$

und setze nun, da die Anzahl in den auf einander folgenden Schichten eine Reihe zweiten Ranges bildet, in der Gleichung (4) des §. 195 $a = m,\ d_1 = m - 2,\ d_2 = -2.$

Man erhält alsdann für die fragliche Summe

$$s = nm + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(m-2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot -2$$

$$= \frac{n}{6}(3mn + 3m + 2 - 2n^2)$$

$$= \frac{n}{6}[3m(n+1) - 2(n+1)(n-1)]$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(3m - 2n + 2).$$

c) Das Prisma ist an beiden Enden frei.

Liegen im Rücken m Kugeln, so liegen in der zweiten Schichte $2(m+1)$, in der dritten $3(m+2)$ 2c., also in der untersten oder nten Schichte $n(m + n - 1)$.

Bildet man nun wieder aus der Reihe

$$m,\ 2m + 2,\ 3m + 6,\ 4m + 12,\ \ldots$$

die Differenzenreihen, so erhält man $d_1 = m + 2,\ d_2 = 2.$ Folglich nach §. 195 Gleichung (4) für die Summe aller Kugeln:

$$s = \frac{n}{6}(n+1)(3m + 2n - 2).$$

§. 198. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie heißt die 40te Dreieckszahl und die Summe der 40 ersten dieser Zahlen?

2) Die Summe der 100 ersten Fünfeckszahlen anzugeben.

2a) Die wievielte Fünfeckszahl heißt 1335?

3) Wie groß ist die Anzahl der Kugeln in einer vierseitigen Pyramide von 15 Schichten und wie viel Kugeln liegen auf dem Boden?

4) Ein Kugelhaufen hat die Form einer abgekürzten regelmäßigen dreiseitigen Pyramide. In jeder Seite der untersten

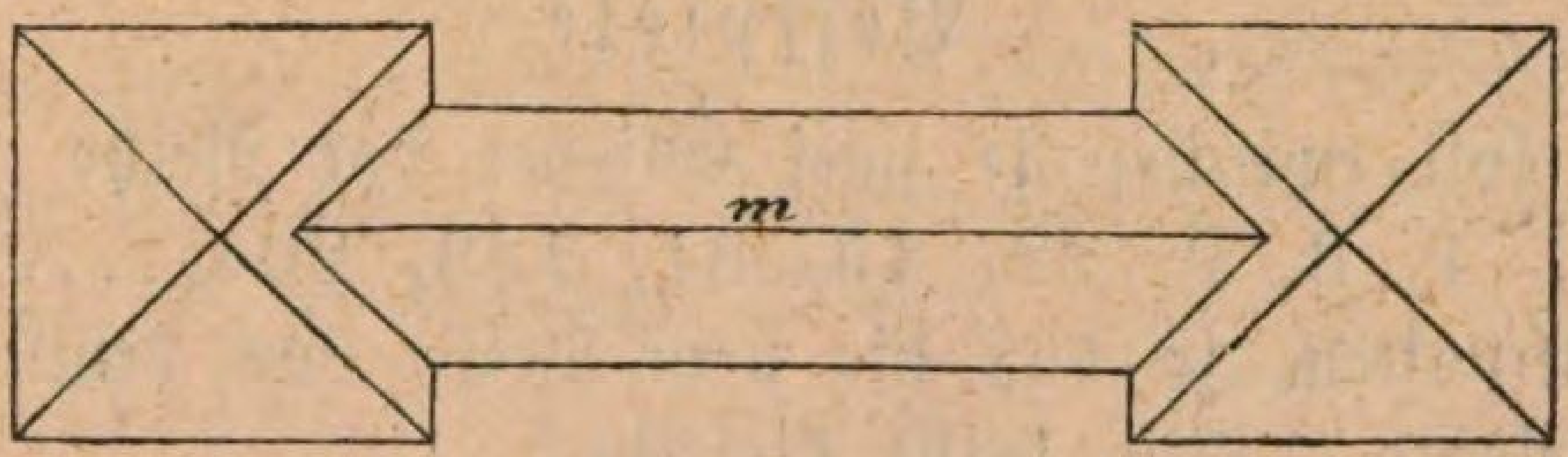
Schichte liegen 18, in jeder der obersten aber 10 Kugeln; wie viel Kugeln enthält der Haufen?

5) Ein Kugelhaufen hat die Form einer abgekürzten regulären fünfseitigen Pyramide. In der untersten Schichte liegen 287 Kugeln, in der obersten 92. Wie viel Kugeln enthält der Haufen?

6) Ein zwischen zwei parallele Wände aufgebauter prismatischer Kugelhaufen von 10 Schichten enthält im Rücken 24 Kugeln. Wie viel Kugeln enthält derselbe im Ganzen?

7) Vor einem Zeughause befindet sich eine Anzahl gleicher Kugeln in beistehender Weise (Fig. 10) aufgeschichtet. Jede

Fig. 10.



der vierseitigen Pyramiden enthält in der untersten Schichte 576 und das zwischenliegende Prisma im Rücken m 48 Kugeln. Wenn nun das letztere 10 Schichten hat, wie viel Kugeln befinden sich alsdann auf dem Platze?

8) Ein prismatischer freistehender Kugelhaufen von 16 Schichten enthält im Rücken 30 Kugeln; wie viel Kugeln befinden sich in dem Haufen?

§. 199. Interpolation bei höheren arithmetischen Reihen.

1) Sollen zwischen zwei aufeinander folgende Glieder einer höheren arithmetischen Reihe noch (p — 1) neue Glieder eingeschaltet oder interpolirt werden, ohne daß sich der Rang der Reihe dadurch ändert, so wird, wenn man auf das erste Glied der Hauptreihe keine Rücksicht nimmt, das zweite Glied der ursprünglichen Reihe das pte Glied der neuen Reihe, ebenso geht das dritte, vierte ꝛc. nte Glied der gegebenen Reihe bezüglich über in das 2pte, 3pte, ... (n — 1) pte Glied der interpolirten Reihe.

Nach §. 195, 5 ergibt sich aber das allgemeine Glied einer Reihe mten Ranges aus der Gleichung

$$t^{(m)} = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d_3 + \ldots$$

Nehmen wir nun an, die interpolirte Reihe bestehe aus r Gliedern, ist also

$$r = (n - 1)\,p$$

oder

$$n - 1 = \frac{r}{p}$$

und bezeichnen wir das rte Glied durch t_r, so geht obige Gleichung über in

$$t_r^{(m)} = a + \frac{r}{p} d_1 + \frac{\frac{r}{p}\left(\frac{r}{p} - 1\right)}{1\,.\,2} d_2 + \frac{\frac{r}{p}\left(\frac{r}{p} - 1\right)\left(\frac{r}{p} - 2\right)}{1\,.\,2\,.\,3} d_3 + \ldots$$

$$= a + \frac{r}{p} d_1 + \frac{r\,(r - p)}{1\,.\,2\,.\,p^2} d_2 + \frac{r\,(r - p)\,(r - 2p)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,p^3} d_3 + \ldots$$

Beispiele.

1) Man soll zwischen je zwei Glieder der Reihe

1, 3, 9, 22, 45, 81, 133, 204, ...

drei neue einschalten, so daß die neue Reihe von demselben Range ist wie die vorgelegte. Wie heißt dieselbe?

Auflösung. Bildet man die Differenzenreihen, so findet man, daß die Reihe vom dritten Range ist und

$$a = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = 4,\ d_3 = 3.$$

Führt man diese Werthe, so wie für

$$p - 1 = 3 \text{ oder } p = 4 \text{ und } m = 3$$

in obige Interpolationsformel ein, so erhält man

$$t_r^{(3)} = 1 + \frac{r}{4}\,.\,2 + \frac{r\,(r - 4)}{1\,.\,2\,.\,16}\,.\,4 + \frac{r(r - 4)\,(r - 8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,64}\,.\,3$$

$$= 1 + \tfrac{1}{4}\,r + \tfrac{1}{32}\,r^2 + \tfrac{1}{128}\,r^3.$$

Setzt man nun hierin der Reihe nach für r = 1, 2, 3, . . ., so erhält man

$$t_1^{(3)} = \tfrac{165}{128},\ t_2^{(3)} = \tfrac{27}{16},\ t_3^{(3)} = \tfrac{287}{128},\ t_4^{(3)} = 3,\ t_5^{(3)} = \tfrac{513}{128}, \ldots$$

Die neue Reihe heißt daher:

$$1,\ \tfrac{165}{128},\ \tfrac{27}{16},\ \tfrac{287}{128},\ 3,\ \tfrac{513}{128},\ \ldots$$

Durch Bildung der Differenzenreihen überzeugt man sich leicht, daß dieselbe wiederum vom dritten Range ist.

Anmerkung. Die Interpolationsmethode findet vorzüglich ihre Anwendung in der Physik und Meteorologie, überhaupt bei naturwissenschaftlichen Versuchen und Beobachtungen, wo es sich darum handelt, aus einzelnen gefundenen Werthen Zwischenresultate zu bestimmen, indem man jene als Glieder einer arithmetischen Reihe ansieht. Nachstehende Beispiele mögen als Erläuterung dienen.

2) Man hat durch Versuche gefunden, daß für die Elasticität des Wasserdampfes den Temperaturgraden 1, 3, 5, 7, 9, . . . die Zahlen entsprechen 0,1422; 0,1741; 0,2122; 0,2571; 0,3101; 0,3721; 0,4445, ... und soll nun die den Temperaturgraden 2, 4, 6, ... entsprechenden Zahlen hieraus berechnen.

Auflösung. Durch Bildung der Differenzenreihen erhält man:

0,1422; 0,1741; 0,2122; 0,2571; 0,3101; 0,3721; 0,4445
0,0319; 0,0381; 0,0449; 0,0530; 0,0620; 0,0724
0,0062; 0,0068; 0,0081; 0,0090; 0,0104
0,0006; 0,0013; 0,0009; 0,0014.

Nimmt man nun die Glieder der dritten Differenzenreihe, da dieselben nur sehr wenig von einander abweichen, als constant und gleich 0,0012 an, und setzt in obige Interpolationsformel $a = 0,1422$; $d_1 = 0,0319$; $d_2 = 0,0062$; $d_3 = 0,0012$; $p = 2$ und $m = 3$, so folgt:

$$t_r^{(3)} = 0,1422 + \frac{r}{2} \,.\, 0,0319 + \frac{r\,(r - 2)}{8} \,.\, 0,0062$$

$$+ \frac{r\,(r - 2)\,(r - 4)}{48} \,.\, 0,0012$$

$$= 0.1422 + 0,0146 r + 0,000625 r^2 + 0,000025 r^3.$$

Führt man nun für r der Reihe nach 1, 3, 5, 7, . . . ein, so erhält man für die gewünschten Zahlen:

0,1574; 0,1923; 0,2339; 0,2836 . . .

3) Eine Tafel enthält die gemeinen Logarithmen von 1 bis 1000 auf 7 Decimalstellen, man soll den Logarithmus von 987,65 auf eben so viel Stellen bestimmen.

Auflösung. Da wir bei dem gemeinen Logarithmensysteme nur die Mantisse für 987,65 zu berechnen haben, so suche man zunächst die Logarithmen der Zahlen 987, 988, 989, 990, 991. Man findet dafür der Reihe nach

2,9943172; 2,9947569; 2,9951963; 2,9956352; 2,9960737

und hieraus als erste Differenzenreihe

0,0004397; 0,0004394; 0,0004389; 0,0004385,

als zweite Differenzenreihe

— 0,0000003; — 0,0000005; — 0,0000004.

Nehmen wir diese als constant und $= - 0,0000004$ an, und setzen in der Interpolationsformel:
$a = 2,9943172$; $d_1 = 0,0004397$; $d_2 = - 0,0000004$; $p - 1 = 99$ oder $p = 100$ und $m = 2$, so folgt:

$$t_r^{(2)} = 2,9943172 + \frac{r}{100} \,.\, 0,0004397 - \frac{\frac{r}{100}\left(\frac{r}{100} - 1\right)}{1\,.\,2} \,.\, 0,0000004$$

$$= 2,9943172 + 0,000004397\, r - 0,00000000002\, r^2,$$

folglich wird für $r = 65$

$$\log 987,65 = 2,99460305.$$

Anmerkung. Hiernach ließen sich nun ebenso leicht die Logarithmen aller Zahlen zwischen 98700 und 98800 berechnen.

C. Geometrische Reihen.

§. 200. Bestimmung des allgemeinen und summatorischen Gliedes.

1) Bezeichnen wir allgemein das erste Glied einer geometrischen Reihe durch a, deren Quotienten durch q, so heißt das zweite Glied aq, das dritte aq^2, das vierte aq^3 u. s. w.

Jedes Glied ist also gleich dem Produkte aus dem ersten Gliede und derjenigen Potenz des Quotienten, deren Exponent um 1 kleiner ist, als der Zeiger des betreffenden Gliedes.

Das nte Glied heißt somit aq^{n-1} und es ist demnach das allgemeine Glied $t = aq^{n-1} \ldots (1)$.

2) Bezeichnen wir nun die Summe der n ersten Glieder oder das summatorische Glied durch s, so ist

$$\text{I} \quad s = a + aq + aq^2 + \ldots + tq^{-1} + t$$

und wenn man beiderseits mit q multiplicirt:

$$\text{II} \quad sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + t + tq.$$

Durch Subtraction der Gleichung I von II folgt

$$sq - s = tq - a,$$

oder

$$s(q - 1) = tq - a,$$

folglich wird

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \ldots (2)$$

d. h. die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe wird erhalten, wenn man das erste Glied von dem Produkte aus dem letzten Gliede und dem Quotienten subtrahirt und die Differenz durch den um 1 verminderten Quotienten dividirt.

3) Führt man in vorstehende Formel (2) den für t in (1) gefundenen Werth ein, so erhält man

$$s = \frac{aq^{n-1} \cdot q - a}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

oder

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \ldots (3).$$

Von dieser Formel wird Gebrauch gemacht, wenn die Summe einer Anzahl von Gliedern aus dem ersten Gliede, dem Quotienten und dem Zeiger berechnet werden soll.

4) Mittelst der Formeln (1) und (3) lassen sich alle hierher gehörigen Aufgaben lösen. Da beide zusammen fünf verschiedene Stücke enthalten, so müssen stets drei derselben bekannt sein, oder sich doch aus irgend welchen Bedingungen der Aufgabe angeben lassen, wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll.

5) Aus der allgemeinen Form

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots\ldots aq^{n-1}$$

folgt unmittelbar, daß die Reihe eine steigende oder fallende sein wird, je nachdem q größer oder kleiner als 1 ist.

Nehmen wir den Quotienten $q < 1$ an, so werden die späteren Glieder immer kleiner und kleiner und für unendlich viele Glieder wird also das letzte Glied unendlich klein ausfallen. Setzen wir aber in (2) $t = 0$, so erhalten wir

$$s = \frac{0 \cdot q - a}{q - 1} = \frac{0 - a}{q - 1}$$

oder $$s = \frac{a}{1 - q} \ldots (4)$$

d. h. die Summe einer fallenden geometrischen Reihe von unendlich vielen Gliedern ist gleich dem Quotienten aus dem ersten Gliede durch die Differenz zwischen der Einheit und dem Quotienten.

Beispiele.

1) Wie heißt das 10te Glied und die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe 5, 15, 45, . . . ?

Auflösung. Setzt man in der Gleichung (1)

$$a = 5,\ q = \frac{15}{5} = 3,\ n = 10,$$

so folgt $t = 5 \cdot 3^9$,

oder da

$$\begin{aligned} 9 \log 3 &= 4{,}2940917 \\ \log 5 &= 0{,}6989700 \\ \hline \log 5 \cdot 3^9 &= 4{,}9930617 \end{aligned}$$

so wird $t = 98415.$

Führt man diesen Werth in (2) ein, so erhält man für

$$s = \frac{98415 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 147620.$$

2) Es setzt Jemand bei einem Spiele zuerst 6 Kreuzer und verdoppelt diesen Einsatz 12mal nach einander. Wie viel hat er im Ganzen eingesetzt?

Auflösung. Setzt man in der Formel (3)

$$a = 6,\ q = 2,\ n = 12,$$

so folgt $$s = \frac{6\ (2^{12} - 1)}{2 - 1} = 6\ (2^{12} - 1) = 24570 \text{ Kr.}$$
$$= 409 \text{ fl. } 30 \text{ Kr.}$$

3) Wie groß ist die Summe der abnehmenden Reihe 12, 4, $1\frac{1}{3}$, ... wenn dieselbe unendlich viele Glieder hat?

Auflösung. Wird in der Gleichung (4)

$$a = 12,\ q = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3} \text{ gesetzt,}$$

so folgt: $$s = \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{36}{2} = 18.$$

4) Den reinperiodischen Decimalbruch $0,\dot{5}1\dot{3}$ durch Anwendung geometrischer Reihen in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Setzt man

$$0,\dot{5}1\dot{3} = \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000000} + \frac{513}{1000000000} + \ldots$$

so erhält man zur rechten Seite eine fallende geometrische Reihe, deren erstes Glied $= \frac{513}{1000}$ und deren Quotient $= \frac{1}{1000}$ ist.

Nach (4) wird daher

$$0,\dot{5}1\dot{3} = \frac{\frac{513}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{513}{999} = \frac{57}{111} = \frac{19}{37}.$$

§. 201. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie heißt das 10te Glied und die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe 1, 3, 9, 27 . . . ?

2) Man soll das 100ste Glied und die Summe der 100 ersten Glieder der Reihe 3, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{12}$, $1\frac{53}{72}$ bestimmen.

3) Das erste Glied einer geometrischen Reihe von 12 Gliedern ist gleich 4, das letzte Glied ist gleich $345\frac{507}{512}$, welches ist der Quotient?

4) Das erste Glied einer geometrischen Reihe in dem Quotienten q, der Anzahl der Glieder = n und der Summe s dieser Glieder auszudrücken.

5) Das erste Glied einer geometrischen Reihe in dem Quotienten q, dem letzten Glied t und der Summe s aller Glieder auszudrücken.

6) Wie heißt das erste und sechste Glied einer geometrischen Reihe, wenn die Summe dieser 6 Glieder 2548 beträgt und der Quotient = 3 ist?

7) Der Erfinder des Schachspieles durfte sich selbst eine Belohnung wählen. Er erbat sich so viele Weizenkörner, als man zusammen erhält, wenn man auf das erste Feld des Schachbrettes 1, auf das zweite 2, auf das dritte 4 ꝛc. Körner legt. Wie viel Körner verlangte er, wenn das Brett 64 Felder hat?

8) Den Quotienten einer geometrischen Reihe zu finden, deren erstes Glied = $3\frac{1}{2}$ und deren 10tes Glied = 1792 ist.

9) Eine Gleichung aufzustellen, aus welcher der Quotient q gefunden wird, wenn man das erste Glied a, die Anzahl n und die Summe s aller Glieder kennt.

10) Eine Gleichung zu finden, aus welcher der Quotient q bestimmt werden kann, wenn gegeben ist: die Summe s der n ersten Glieder und das nte Glied t.

11) Es setzt Jemand bei einem Hazardspiele 24 fl. und da er verliert, verdoppelt er seinen Einsatz, verliert er wieder, so verdoppelt er ihn nochmals u. s. f., wie oft kann er bei andauerndem Verluste setzen, wenn er 6120 fl. bei sich hat?

12) Bei einem Spiele gewinnt Jemand das erste Mal 30 kr., er spielt fort und gewinnt mit jedem Einsatze immer gleich viel mal mehr als beim nächst vorhergehenden. Mit dem letzten Einsatze gewinnt er 512 fl. Wie oft hat er gesetzt, wenn sein ganzer Gewinn 1023 fl. 30 kr. beträgt?

13) Man soll die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe bestimmen, von welcher gegeben ist: das letzte Glied = 4194304, die Summe = 8388604, der Quotient = 2.

14) Es gab Jemand 252 fl. dadurch in wenigen Tagen aus, daß er am ersten Tage 4 fl. und jeden folgenden Tag ein bestimmtes Vielfache des nächst vorhergehenden Tages verausgabte. Nach wie viel Tagen war das Geld ausgegeben, wenn am letzten Tage die Ausgabe 128 fl. betrug?

15) Einen allgemeinen Ausdruck für das letzte Glied einer geometrischen Reihe herzuleiten, wenn gegeben ist der Quotient q, die Anzahl der Glieder = n, und die Summe aller Glieder = s.

16) Welchen Ausdruck erhält man für die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe, wenn man das erste Glied a und das letzte Glied t kennt?

17) Die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe im Quotienten q, dem n ten Gliede t und der Anzahl n der Glieder auszudrücken.

18) Man soll zwischen 1 und 4 zehn Glieder einschalten, so daß diese mit den zwei gegebenen Gliedern eine geometrische Progression bilden; wie heißt der Quotient?

19) Neun Zahlen bilden eine geometrische Reihe; die Summe der fünf letzten Glieder beträgt 9801, die der fünf ersten nur 121; wie heißen diese Zahlen?

20) Von einer sechsgliedrigen geometrischen Progression kennt man die Summe der geradstelligen Glieder = 147, die der ungeradstelligen = $73\frac{1}{2}$; wie heißen die 6 Glieder?

21) Man goß eine Maas einer Flüssigkeit zu 4 Maas Wasser und von dieser Mischung wieder eine Maas zu 4 Maas Wasser und setzte die Verdünnung 6mal nach einander fort. Wie groß ist der Gehalt an jener Flüssigkeit in der letzten Mischung?

22) Die Summe der unendlichen Reihe 24, 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, ... zu bestimmen.

23) Den periodischen Decimalbruch 0,848484 . . . in einen gewöhnlichen zu verwandeln.

24) Den unreinperiodischen Decimalbruch 0,72878787 . . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

25) Ein Weinhändler zapft aus einem Fasse, das 50 Maas Wein à 54 kr. enthält, um eine Sorte von 36 kr. für die Maas herzustellen, eine Maas ab und gießt dafür eine Maas Wasser hinzu, mischt diese vollständig mit dem Wein, zapft nun wiederum eine Maas ab, und gießt dafür abermals eine Maas Wasser zu, mischt diese wieder gehörig mit der darin schon enthaltenen Mischung, zapft hierauf abermals eine Maas ab u. s. f. Nach wie vielmaligem Ablassen einer Maas hat eine Maas der im Fasse enthaltenen Mischung den gewünschten Werth?

26) Ein Kapital K soll in n Jahren bei einfachen Zinsen von p% in der Weise abgetragen werden, daß jährlich gleichviel vom Kapital und Zins zusammen bezahlt wird; wie viel beträgt die jährliche Abtragssumme?

27) Ein Staatsanlehen wurde in der Weise während n aufeinanderfolgenden Jahren getilgt, daß am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe r sammt den Jahreszinsen des ganzen

Schuldkapitals zurückbezahlt wurden. Wie groß war das Anlehen K, wenn der Berechnung ein p procentiger Zinsfuß zu Grunde gelegt wird?

D. Zusammengesetzte Reihen.

§. 202. Bestimmung des allgemeinen und summatorischen Gliedes.

1) Sind

$$\begin{array}{lllll} a, & a+d, & a+2d, & \ldots & a+(n-1)\,d \\ b, & bq, & bq^2, & \ldots & bq^{n-1} \end{array}$$

die allgemeinen Formen einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe, so erhält man durch gliedweise Multiplication beider als allgemeine Form einer zusammengesetzten Reihe:

$$ab,\ (a+d)\,bq,\ (a+2d)\,bq^2,\ \ldots\ [a+(n-1)\,d]\,bq^{n-1}.$$

Bezeichnen wir somit das allgemeine oder nte Glied derselben durch T, so ist

$$T = [a + (n-1)\,d]\,bq^{n-1}.$$

2) Um das summatorische Glied oder die Summe S der n ersten Glieder zu finden, schreibe man dieselben vertikal unter einander und zerlege sie wie folgt:

			1	2	3	n—1
1. Glied	$= ab$	$= ab$				
2. „	$= (a+d)\,bq$	$= abq$	$+ bdq$			
3. „	$= (a+2d)\,bq^2$	$= abq^2$	$+ bdq^2$	$+ bdq^2$		
4. „	$= (a+3d)\,bq^3$	$= abq^3$	$+ bdq^3$	$+ bdq^3$	$+ bdq^3$	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n „	$= [a+(n-1)\,d]\,bq^{n-1}$	$= abq^{n-1}$	$+ bdq^{n-1}$	$+ bdq^{n-1}$	$+ \ldots$	$+ bdq^{n-1}$

Die einzelnen Verticalreihen bilden geometrische Reihen, deren Summen nach §. 200 leicht zu bestimmen sind. Bezeichnen wir diese der Reihe nach von links gegen rechts durch s_0, s_1, s_2, ... s^{n-1}, so wird

$$s_0 = \frac{ab\,(q^n - 1)}{q-1},\quad s_1 = \frac{bdq\,(q^{n-1} - 1)}{q-1}$$

$$s_2 = \frac{bdq^2\,(q^{n-2} - 1)}{q-1},\quad s_3 = \frac{bdq^3\,(q^{n-3} - 1)}{q-1}$$

$$s_{n-1} = bdq^{n-1} = \frac{bdq^{n-1}\,(q-1)}{q-1}.$$

Folglich ist die Summe der n ersten Glieder oder

$$S = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{n-1}$$

$$= \frac{ab\,(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{bdq\,(q^{n-1} - 1)}{q - 1} + \frac{bdq^2\,(q^{n-2} - 1)}{q - 1}$$

$$+ \ldots + \frac{bdq^{n-1}\,(q - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{ab\,(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{bd}{q - 1}\,[q^n - q + q^n - q^2 +$$

$$q^n - q^3 + \ldots + q^n - q^{n-1}]$$

$$= \frac{ab\,(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{bd}{q - 1}\left[(\overset{1}{q^n} + \overset{2}{q^n} + \overset{3}{q^n} + \ldots + \overset{n-1}{q^n})\right.$$

$$\left. - (\overset{1}{q} + \overset{2}{q^2} + \overset{3}{q^3} + \ldots + \overset{n-1}{q^{n-1}})\right]$$

$$= \frac{ab\,(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{bd}{q - 1}\left[q^n\,(n - 1) - \frac{q\,(q^{n-1} - 1)}{q - 1}\right].$$

Anmerkung. Man kann diese Formel auch dadurch herleiten, daß man die Gleichung

$$s = ab + (a + d)\,bq + (a + 2d)\,bq^2 + \ldots + [a + (n - 2)\,d]\,bq^{n-2}$$
$$+ [a + (n - 1)\,d]\,bq^{n-1}$$

beiderseits mit q multiplicirt und von der erhaltenen Gleichung die ursprüngliche subtrahirt.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe

2, 12, 40, 112, 288 . . .

welche aus der gliedweisen Multiplication der Reihen

1, 3, 5, 7, 9 . . . und 2, 4, 8, 16, 32 . . .

hervorgeht?

Auflösung. Setze in vorstehender Formel

$$a = 1,\ d = 2,\ b = 2,\ q = 2,\ n = 10,$$

so folgt $S = 2\,(2^{10} - 1) + 4\,[2^{10} . 9 - 2\,(2^9 - 1)]$
$= 34822.$

2) Durch gliedweise Multiplication der zwei Reihen 1, 2, 3, 4, 5, ... und a, a^2, a^3, a^4, a^5, ... erhält man die zusammengesetzte Reihe

$$a,\ 2a^2,\ 3a^3,\ 4a^4,\ 5a^5,\ \ldots .$$

Man soll einen Ausdruck für die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe herleiten.

Auflösung. Setzt man in obiger Formel:

$$a = 1,\ d = 1,\ b = a,\ q = a,$$

so geht dieselbe über in

$$S = \frac{a\,(a^n - 1)}{a - 1} + \frac{a}{a - 1}\left[a^n\,(n - 1) - \frac{a\,(a^{n-1} - 1)}{a - 1}\right]$$

$$= \frac{a}{a - 1}\left[na^n - 1 - \frac{a\,(a^n - 1)}{a - 1}\right].$$

E. Harmonische Reihen.

§. 202a. Bestimmung des allgemeinen Gliedes.

1) Bezeichnet man der Reihe nach die aufeinander folgenden Glieder einer harmonischen Reihe durch

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{b},\ \overset{3}{c},\ \overset{4}{d},\ \overset{5}{e},\ \ldots\ldots\ \overset{n}{t_n},$$

so müssen nach §. 191. 11 und §. 148. 2 zwischen denselben die Beziehungen gelten:

$$a - b : b - c = a : c$$
$$b - c : c - d = b : d$$
$$c - d : d - e = c : e \text{ u. s. w.}$$

Bestimmt man nun hieraus der Reihe nach die Werthe von c, d, e, . . . so folgt:

$$c = \frac{ab}{2a - b}$$
$$d = \frac{bc}{2b - c}$$
$$e = \frac{cd}{2c - d} \text{ u. s. w.}$$

oder wenn man in den Ausdruck für d den Werth von c, in den für e den so erhaltenen Werth von d u. s. f. einführt:

$$d = \frac{ab^2}{3ab - 2b^2} = \frac{ab}{3a - 2b}$$
$$e = \frac{a^2b^2}{4a^2b - 3ab^2} = \frac{ab}{4a - 3b}$$
$$f = \frac{ab}{5a - 4b},\ g = \frac{ab}{6a - 5b} \text{ u. s. w.}$$

Die allgemeine Form einer harmonischen Reihe ist daher:

$$\overset{1}{a},\quad \overset{2}{b},\quad \overset{3}{\frac{ab}{2a - b}},\ \overset{4}{\frac{ab}{3a - 2b}},\ \overset{5}{\frac{ab}{4a - 3b}},\ \overset{6}{\frac{ab}{5a - 4b}} \ldots (1)$$

oder

$$\frac{ab}{b},\ \frac{ab}{b + (a - b)},\ \frac{ab}{b + 2(a - b)},\ \frac{ab}{b + 3(a - b)},\ \frac{ab}{b + 4(a - b)},\ \frac{ab}{b + 5(a - b)} \ldots (2)$$

woraus wir schließen, daß das nte oder allgemeine Glied t_n sein wird:

$$t_n = \frac{ab}{(n - 1)a - (n - 2)b} = \frac{ab}{b + (n - 1)(a - b)} \ldots (3)$$

Anmerkung. Ist
$$(n-1)\,a = (n-2)\,b$$
oder
$$(n-1)(a-b) = -b$$
oder
$$\frac{b-a}{b} = n-1,$$
so wird
$$t_n = \frac{ab}{o} = \infty.$$

Eine steigende harmonische Reihe wird also nur dann ohne Ende fortgesetzt werden können, wenn die Differenz aus dem zweiten und ersten Gliede durch das zweite Glied nicht theilbar ist. Im anderen Falle wird einmal ein Glied unendlich groß und eine Fortsetzung der Reihe über dasselbe hinaus ist unmöglich.

2) Berücksichtigen wir, daß die Nenner der aufeinander folgenden Glieder der harmonischen Reihe (2) eine niedere arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied b, deren Differenz (a — b) ist und daß an der Stelle der Zähler derselben jede beliebige gleiche Zahl stehen kann, so gelangen wir zu folgendem Schlusse:

Dividirt man ein und dieselbe Zahl der Reihe nach durch die aufeinander folgenden Glieder einer niederen arithmetischen Reihe, so bilden die aufeinander folgenden Quotienten eine harmonische Reihe.

Wählt man für die Zähler durchweg die Einheit, so erkennt man sofort den Satz:

Die reciproken Werthe der aufeinander folgenden Glieder einer niederen arithmetischen Reihe bilden eine harmonische Reihe.

Hiernach sind z. B.
$$\frac{5}{3}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}, \frac{5}{15}, \frac{5}{19}, \ldots\ldots$$
und
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \ldots\ldots$$
zwei harmonische Reihen.

Zehnter Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Progressionen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

A. Zinseszinsrechnung.

§. 203. Erklärung.

1) Werden die Zinsen eines Kapitales nach Ablauf einer bestimmten Zeit nicht erhoben, sondern zinstragend zum Kapitale geschlagen und die Zinsen dieser Zinsen abermals zinsbringend hinzugefügt u. s. f., so sagt man, das Kapital stehe auf Zinseszinsen, oder es trage zusammengesetzte Zinsen.*)

2) Es ist klar, daß die Zinseszinsrechnung nicht allein bei der Berechnung des Anwachses eines auf die bezeichnete Weise ausgeliehenen Kapitales Anwendung findet, sondern überhaupt überall vorkommt, wo es sich um die Bestimmung des Zuwachses von Dingen handelt, die in analoger Weise wie obiges Kapital zunehmen oder sich vermehren, also z. B. bei den Zuwachsberechnungen von Wäldern, Völkern u. dgl.

3) Häufig werden auch die Zinsen des Hauptkapitals nach anderen und zwar kleineren Procenten bestimmt, als die Zinsen des Kapitals selbst.

---

*) Diese Art der Zinsenberechnung, auch Anatocismus (Zinsenwucher) genannt, findet, wie wir weiter unten sehen werden, in den bürgerlichen Rechnungsarten häufig Anwendung, ja sie muß hier zu Grunde gelegt werden, wenn die erzielten Resultate Anspruch auf Richtigkeit machen sollen. Ferner ist klar, daß man sich Zinseszinsen dadurch erwerben kann, daß man den Zins des ausgeliehenen Kapitals, statt ihn zu diesem zu schlagen, anderwärts wieder zinsbringend anlegt.

§. 204. Aufgabe.

Ein Kapital k steht zu p% auf Zinseszinsen; zu welcher Summe K wächst dasselbe in n Jahren an?

Erster Fall. n sei eine ganze Zahl.

Auflösung.

Das Kapital 100 trägt in einem Jahre den Zins p, also das Kapital 1 nur $\frac{p}{100}$. Die Kapitaleinheit wächst somit in einem Jahre an zu $1 + \frac{p}{100}$, folglich das Kapital k

in 1 Jahre zu $k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

in 2 Jahren zu $k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

in 3 Jahren zu $k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$

oder allgemein

in n Jahren zu $k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Wir erhalten somit für die verlangte Summe

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \ldots (1)$$

Den Werth $\frac{p}{100}$ nennt man Zinsfuß. Bezeichnen wir denselben zur Abkürzung durch 0,0p und setzen also

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}0p^{*}) \ldots (2),$$

so geht der Ausdruck für das angewachsene Kapital über in

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \ldots (3).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun leicht jede der vier Größen K, k, p, n berechnen, wenn die drei anderen gegeben sind.

---

*) Je nachdem also z. B. ein Kapital ausgeliehen ist zu
3, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{8}$, $12\frac{1}{2}$%,
hat man zu setzen:
1,0p = 1,03; 1,035; 1,0475; 1,05875; 1,125.

Zweiter Fall. n sei gebrochen.

Auflösung.

Es ist klar, daß in diesem Falle obige Formel (1) nicht unmittelbar in Anwendung gebracht werden darf, sondern folgendes Verfahren eingehalten werden muß:

Ist z. B. $n = m + \frac{1}{q}$, wo also m eine ganze Zahl bedeutet und $q > 1$, so berechne man zuerst, wie hoch das Kapital k in m Jahren anwächst. Man findet dafür nach (1) $k \,.\, 1{,}0p^m$. Nun bestimme man den Ertrag an einfachen Zinsen aus diesem angewachsenen Kapitale in der Zeit $\frac{1}{q}$. Da dieser

$$= \frac{pk \,.\, 1{,}0p^m}{100q} = \frac{k \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^m}{q}$$

ist, so erhält man also schließlich für das in der Zeit $n = m + \frac{1}{q}$ angewachsene Kapital

$$K = k \,.\, 1{,}0p^m + \frac{k \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^m}{q}$$

$$= k \,.\, 1{,}0p^m \left(1 + \frac{0{,}0p}{q}\right) \ldots (2)$$

Zusatz.

Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern etwa viertel- oder halbjährlich berechnet und nutzbringend zum Kapitale geschlagen, so hat man in §. 204 (1) für p die entsprechenden Werthe, für n aber die Anzahl der Zeiträume, nach welchen die Zinsen zu entrichten wären, zu substituiren.

Um z. B. das Kapital K, zu welchem ein Kapital k bei p % jährlichen Zinsen in n Jahren anwächst, wenn die Zinsen je nach $\frac{1}{m}$ Jahr zum ausgeliehenen Kapitale zugeschlagen werden, zu bestimmen, hat man in der Formel (1) des §. 204 $\frac{p}{m}$ statt p und mn statt n einzuführen.

Man erhält alsdann

$$K = k \,.\, \left(1{,}0\,\frac{p}{m}\right)^{mn} = k\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn} \ldots (3)$$

und hiernach z. B.

a) bei halbjähriger Kapitalisirung:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n}$$

b) bei vierteljähriger Kapitalisirung:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{400}\right)^{4n}$$

c) bei monatlicher Kapitalisirung:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{1200}\right)^{12n}.$$

Beispiele.

1) Wie hoch wachsen 28500 fl. an, wenn sie 8 Jahre lang zu 5% auf Zinseszinsen stehen?

Auflösung.

Setzen wir in der Gleichung (3) des §. 204

$$k = 28500,\ n = 8,\ p = 5,\ 1{,}0p = 1{,}05,$$

so folgt für das angewachsene Kapital

$$K = 28500 \,.\, 1{,}05^8.$$

Die Ausrechnung geschieht mittelst Logarithmen und man erhält

$$\log 28500 = 4{,}4548449$$
$$8 \log 1{,}05 = 0{,}1695144$$
$$\log K = 4{,}6243593$$

also

$$K = 42107{,}4 \text{ fl.}$$

2) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes wird zu 22400 Klaftern abgeschätzt, wie viel beträgt derselbe nach 10 Jahren, wenn während dieser Zeit kein Holz gefällt und der jährliche Zuwachs zu $2\frac{1}{2}$ Klafter auf 100 Klaftern angenommen wird?

Auflösung.

Setzt man in der Formel (3) des §. 204

$$k = 22400,\ n = 10,\ p = 2{,}5,\ \text{also}\ 1{,}0p = 1{,}025,$$

so folgt für den Bestand nach 10 Jahren:

$$K = 22400 \,.\, 1{,}025^{10}$$
$$\log 22400 = 4{,}3502480$$
$$10 \log 1{,}025 = 0{,}1072390$$
$$\log K = 4{,}4574870$$

also

$$K = 28673{,}97 \text{ Klafter.}$$

3) Welches Kapital wächst zu $4\frac{1}{2}$% in 10 Jahren zu einer Summe von 15460 fl. an?

Auflösung.

Aus der Formel

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \quad (\S.\ 204,\ 3)$$

folgt unmittelbar $k = \frac{K}{1{,}0p^n}$

und hieraus, wenn man

$$K = 15460,\ n = 10,\ p = 4{,}5,\ 1{,}0p = 1{,}045$$

setzt,

$$k = \frac{15460}{1{,}045^{10}}$$

$$\begin{aligned} \log 15460 &= 4{,}1892095 \\ 10 \log 1{,}045 &= 0{,}1911630 \\ \hline \log k &= 3{,}9980465 \end{aligned}$$

also $k = 9955{,}12$ fl.

Anmerkung.

Hat also A dem B nach 10 Jahren eine Zahlung von 15460 fl. zu leisten und er wünscht dieselbe jetzt schon zu entrichten, so darf unter der Voraussetzung, daß $4\frac{1}{2}$% Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden, A nur 9955,12 fl., also 5504,88 fl. weniger ansprechen. Man nennt solchen Abzug, den sich der Gläubiger für eine Früherzahlung gefallen lassen muß, Interusurium oder Disconto.

Um einen allgemeinen Ausdruck für das Interusurium herzuleiten und zu zeigen, daß hierbei nur die Zugrundelegung der Zinseszinsrechnung zu einem richtigen Resultate führt, sei wieder k der jetzige oder baare Werth des nach n Jahren ohne Zinsen zu entrichtenden Kapitales K, so wächst der Werth k in n Jahren bei p% an zu $k \,.\, 1{,}0p^n$ und man erhält daher aus der Gleichung

$$k \,.\, 1{,}0p^n = K \quad [\S.\ 204\ (3)]$$

den Baarwerth $k = \frac{K}{1{,}0p^n}$

also für das Interusurium

$$I = K - \frac{K}{1{,}0p^n} = \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1) \ldots (1).$$

Soll dieses Resultat richtig sein, so muß das Kapital k, welches A jetzt baar zu entrichten hat, denselben Werth haben, wie die Summe aller njährigen Ansprüche, welche B der Nutznießung wegen an A zu machen hat, jetzt baar werth sind.

Nun sind aber die jährlichen Zinsen eines Kapitals $K = \frac{K \,.\, p}{100} = K \,.\, 0{,}0p$ und es folgt somit aus der Proportion

$$100 + p : 100 = K \,.\, 0{,}0p : x$$

für den baaren Werth der Nutznießung des ersten Jahres

$$x = \frac{100 \,.\, K \,.\, 0{,}0p}{100 + p} = \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p}.$$

Die Zinsen des zweiten Jahres betragen wiederum $K \,.\, 0{,}0p$, folglich ist deren Baarwerth $= \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^2}$.

In analoger Weise findet man für den baaren Werth der Zinsen des 3ten, 4ten, ... nten Jahres

$$\frac{K \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^3},\ \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^4},\ \ldots\ \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^n}.$$

Soll also obiger Ausdruck für das Interusurium den richtigen Werth liefern, so muß die Gleichung bestehen:

$$\frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1) = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^n}.$$

Nun ist aber in der That

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^n} = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p}\left(1 + \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p}\,.\,\frac{\frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\,.\,\frac{1}{1{,}0p} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1}\ [\S.\ 200.\ (2)]$$

$$= K\,.\,0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0p^n - 1}{(1{,}0p - 1)\,1{,}0p^n}$$

$$= \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1).$$

Legt man bei der Berechnung des Interusuriums die einfache Zinsrechnung zu Grunde, so erhält man, da der Zins des Kapitales k in n Jahren (wo n jede beliebige Zahl bedeuten kann) bei $p\,\% = \frac{kpn}{100} = kn\,.\,0{,}0p$ ist, also das Kapital k zu $k + kn\,.\,0{,}0p = k\,(1 + n\,.\,0{,}0p)$ anwächst, für den Baarwerth $k = \frac{K}{1 + n\,.\,0{,}0p}$,
also für das Interusurium

$$I = K - \frac{K}{1 + n\,.\,0{,}0p} = \frac{Kn\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p}\ \ldots\ (2).$$

Diese Formel nennt man das einfache oder Hoffmann'sche Interusurium und zum Unterschiede hiervon den oben mittelst Zinseszinsen berechneten Ausdruck (1) auch das zusammengesetzte oder Leibnitz'sche Interusurium.

Um auch die Formel (2) auf ihre Richtigkeit zu prüfen, reduciren wir wieder sämmtliche Jahreszinsen auf ihren Jetztwerth und erhalten für den baaren Werth der Zinsen $K\,.\,0{,}0p$ des ersten Jahres

$$x_1 = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 0{,}0p}$$

und aus der Proportion

$$100 + 2p : 100 = K\,.\,0{,}0p : x_2$$

für den baaren Werth der Zinsen des zweiten Jahres

$$x_2 = \frac{100\,K\,.\,0{,}0p}{100 + 2p} = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 2\,.\,0{,}0p}.$$

Analog wird der baare Werth der Zinsen des dritten Jahres

$$x_3 = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 3\,.\,0{,}0p}$$

und allgemein

$$x_n = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p}.$$

Soll nun das Hoffmann'sche Interusurium den richtigen Werth des Abzugs von Seiten des Schuldners liefern, so muß die Gleichung bestehen:

$$\frac{Kn\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p} = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$= \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 0{,}0p} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 2\,.\,0{,}0p} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 3\,.\,0{,}0p} + \ldots + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p}$$

oder

$$\ldots + \frac{1}{1+2.0{,}0p} + \frac{1}{1+3.0{,}0p} + \cdots + \frac{1}{1+n.0{,}0p}.$$

…bar

$$\ldots \frac{}{0{,}0p} > \frac{1}{1+3.0{,}0p} > \cdots > \frac{1}{1+n.0{,}0p},$$

$$\ldots \frac{}{0{,}0p} + \cdots + \frac{1}{1+n.0{,}0p} > \frac{n}{1+n.0{,}0p}.$$

…ffmann'sche Interusuriumsformel unrichtig und bei der …btragungen auf die Gegenwart, so wie auch umgekehrt …eitpunkt die Anwendung der einfachen Zinsrechnung

… Jahren zu entrichtende Schuldsumme von … baar mit 10460 fl. getilgt werden, wie viel … bewilligt?

Auflösung.

… Formel

$$K = k \, . \, 1{,}0p^n$$

…875,17; k = 10460; n = 8,

$$\ldots p = \sqrt[8]{\frac{14875{,}17}{10460}}$$

…7 = 4,1724619

…0 = 4,0195317

0,1529302 : 8 =

…p = 0,0191163

…p = 1,045

p = $4\frac{1}{2}$%.

…ung einer Stadt ist während 14 Jahren von …Seelen angewachsen; wie viel Procent beträgt die

Auflösung.

… = 32640, k = 22400, n = 14,

also $$1{,}0p = \sqrt[14]{\frac{32640}{22400}} = 1{,}0272$$

folglich ist die jährliche Zunahme

$$p = 2{,}72\%.$$

6) Wie lang brauchen 7890 fl., um bei 4% Zinseszinsen auf 17287 fl. 56 kr. anzuwachsen?

Auflösung.

Setzen wir in der allgemeinen Formel

$$K = k \, . \, 1{,}0p^n$$

$$K = 17287{,}93;\ k = 7890;\ 1{,}0p = 1{,}04,$$

so erhalten wir $17287{,}93 = 7890 \,.\, 1{,}04^n$

oder $\log 17287{,}93 = \log 7890 + n \,.\, \log 1{,}04.$

und hieraus $n = \dfrac{\log 17287{,}93 - \log 7890}{\log 1{,}04}$

$$= \frac{4{,}2377430 - 3{,}8970770}{0{,}0170333}$$

$$= \frac{0{,}3406660}{0{,}0170333} = 20 \text{ Jahre.}$$

Anmerkung. Wenn n keine ganze Zahl z. B. $= 20{,}7$ wird, so rechne man, da für ein gebrochenes n nach dem zweiten Falle des §. 204 obige Formel nicht anwendbar ist, den Ausdruck $k \,.\, 1{,}0p^n$ für $n = 20$ aus und bestimme nun noch die Zeit, während welcher der gefundene Werth zu einfachen Zinsen auszuleihen ist, um $K - k \,.\, 1{,}0p^{20}$ Zinsen zu tragen, um die zu 20 Jahren zukommenden Monate und Tage zu erhalten. Analog gilt das Gesagte, wenn in der Folge in ähnlichen Fällen die Anzahl der Jahre zu suchen ist und man dafür eine gebrochene Zahl erhält.

7) Zu welcher Summe wachsen 5000 fl. in 3 Jahren 8 Monaten zu 5% Zinseszinsen an?

Auflösung.

Da hier $n = 3\frac{2}{3}$, also gebrochen ist, so verfahren wir nach der für den zweiten Fall der Aufgabe §. 204 gegebenen Vorschrift und suchen somit zuerst die Summe, zu welcher 5000 fl. in 3 Jahren zu 5% anwachsen. Wir erhalten dafür

$$K = 5000 \,.\, 1{,}05^3 = 5788{,}125 \text{ fl.}$$

Nun berechnen wir die Zinsen, welche dieses angewachsene Kapital in den noch übrigen 8 Monaten trägt. Wir finden dafür durch eine einfache Zweisatzrechnung 192,937 fl. Folglich ist das Kapital in 3 Jahren 8 Monaten angewachsen zu

$$5788{,}125 + 192{,}937 = 5981{,}062 \text{ fl.}$$

Anmerkung. Hätte man unmittelbar in der Formel

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n, \; n = 3\tfrac{2}{3}$$

gesetzt, so würde man erhalten haben

$$K = 5000 \,.\, 1.05^{\frac{11}{3}},$$

oder da $\frac{11}{3} \,.\, \log 1{,}05 = 0{,}0211893 \,.\, \frac{11}{3} = 0{,}0776941$

$$\log 5000 = 3{,}6989700$$

$$\log K = 3{,}7766641$$

$$K = 5979{,}49 \text{ fl.}$$

folglich um 1,57 fl. zu wenig.

8) Wie hoch wachsen 18000 fl. in 15 Jahren an, wenn jährlich 4% Zinsen in Rechnung gebracht, die Zinsen aber halbjährlich zinsbringend zum Kapitale geschlagen werden?

Auflösung.

Nach dem Zusatze zu §. 204 hat man in der allgemeinen Formel

$$K = k \,.\, 1{,}0p$$

$k = 18000$, $n = 2 \,.\, 15 = 30$, $p = 1{,}0\frac{4}{2} = 1{,}02$

zu setzen. Man erhält alsdann

$$K = 18000 \,.\, 1{,}02^{30}$$

$$\log 18000 = 4{,}2552725$$

$$30 \log 1{,}02 = 0{,}2580060$$

$$\log K = 4{,}5132785$$

also $$K = 32604{,}56 \text{ fl.}$$

Anmerkung. Für den Fall, daß die Zinsen jährlich zinsbringend zum Kapitale geschlagen werden, erhält man für das angewachsene Kapital

$$K = 18000 \,.\, 1{,}04^{15} = 32416{,}94 \text{ fl.}$$

also eine um 187,62 fl. kleinere Summe.

9) Wie viel betragen a) die halbjährlichen, b) die vierteljährlichen, c) die monatlichen Procente, wenn die jährlichen 5% betragen?

Auflösung.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

$K = 105$, $k = 100$ und n bezüglich 2, 4 und 12,

so erhält man

für a) aus $105 = 100 \,.\, 1{,}0p^2$, $p = 100\,(\sqrt{1{,}05} - 1) = 2{,}47\%$

" b) " $105 = 100 \,.\, 1{,}0p^4$, $p = 100\,(\sqrt[4]{1{,}05} - 1) = 1{,}22\%$

" c) " $105 = 100 \,.\, 1{,}0p^{12}$, $p = 100\,(\sqrt[12]{1{,}05} - 1) = 0{,}407\%$.

10) Es hat Jemand jährlich 800 fl. zu zahlen und will dieselben aber in halbjährlichen Terminen entrichten; wie viel beträgt die halbjährliche Zahlung, wenn 5% jährlich in Anrechnung gebracht werden?

Auflösung.

Nach der vorhergehenden Aufgabe sind in diesem Falle die halbjährlichen Procente = 2,47. Bezeichnen wir nun die Terminalzahlung durch x, so erhalten wir aus der Gleichung

$$x + x \,.\, 1{,}0247 = 800$$

$$x = \frac{800}{1 + 1{,}0247} = \frac{800}{2{,}0247} = 395{,}12 \text{ fl.}$$

§. 204a. Aufgabe.

Ein Kapital k steht n Jahre lang zu p% auf Zins; die jährlich fälligen Zinsen desselben werden aber nur zu q% angelegt. Zu welcher Summe K ist das Kapital in den n Jahren angewachsen?

Auflösung.

Der Zins des Kapitals k beträgt jährlich k . 0,0p. Nun wächst aber der so am Ende des

1ten 2ten 3ten . . . . nten Jahres

erhaltene Zins zu q % in den kommenden

n — 1 n — 2 n — 3 . . . . 0 Jahren

an zu:

$k \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0q^{n-1};\; k \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0q^{n-2};\; k \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0q^{n-3} \ldots\; k \,.\, 0{,}0p.$

Es wird daher die angewachsene Summe

$$K = k + k \,.\, 0{,}0p\,(1{,}0q^{n-1} + 1{,}0q^{n-2} + \ldots + 1)$$

oder nach §. 200 (2), wenn man daselbst

$$a = 1;\; q = 1{,}0q;\; t = 1{,}0q^{n-1}$$

setzt:
$$K = k + k \,.\, 0{,}0p\,\frac{1{,}0q^n - 1}{1{,}0q - 1}$$

oder
$$K = k\left[1 + \frac{0{,}0p\,(1{,}0q^n - 1)}{0{,}0q}\right].$$

§. 205. **Aufgaben zur Uebung.** *)

1) Wie hoch wachsen 450 fl. in 24 Jahren an, wenn solche zu 4% auf Zinseszinsen stehen?

2) Wie viel Zinseszinsen erhält man von 8746 fl. zu 5% in 16 Jahren?

3) Was wird aus einem Kapitale von 6400 fl. nach 10 Jahren, das zu $4\frac{1}{2}$% auf Zinseszinsen steht?

4) Ein Kapital von 8500 fl. wächst in 30 Jahren bei 4% Zinseszinsen wie hoch an?

5) Wie lange müssen 1800 fl. zu 5% auf Zinseszinsen stehen, um auf 4775,93 fl. anzuwachsen?

6) Es hat Jemand 3651 fl. und möchte dieselben eines bestimmten Zweckes wegen erst dann in Angriff nehmen, wenn sie zu 5669,9 fl. angewachsen sind, wann kann dies geschehen, wenn das Kapital zu $4^1/_2$% auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

7) Wie lange müssen 7800 fl. zu 5% auf Zinseszinsen stehen, um eben so viel zu werden als 6450 fl. zu $4^1/_2$% in 14 Jahren?

---

*) Zur Bestimmung von $\log 1{,}0p^n$ und $\log \frac{1}{1{,}0p^n}$ kann man mit Vortheil von den am Ende des Buches angehängten Tabellen über den zukünftigen und gegenwärtigen Werth der Kapitaleinheit Gebrauch machen.

8) Wie lange muß ein Kapital auf Zinseszinsen zu 5% stehen, wenn es sich verdoppeln soll?

9) Welches Kapital wächst in 10 Jahren zu 8764 fl. an, wenn $4\frac{3}{4}$% Zinseszinsen berechnet werden?

10) Wie groß muß ein Kapital sein, damit es in 8 Jahren ebenso groß wird bei $4\frac{1}{2}$%, als ein anderes Kapital von 8425 fl. zu 5% in 7 Jahren?

11) Welches Kapital wächst in 14 Jahren bei 5% eben so hoch an, als ein anderes um 3500 fl. größeres Kapital zu 4% in 8 Jahren?

12) Zu wie viel % stand ein Kapital von 4200 fl., wenn dasselbe in 25 Jahren zu 14222,69 fl. angewachsen ist?

13) Man will von 3214,6 fl. Kapital in 18 Jahren eben so viel Zinsen und Zinseszinsen einnehmen, als von 3840 fl. in 12 Jahren zu $4\frac{1}{2}$%. Zu wie viel % muß man das erste Kapital ausleihen?

14) Es hat Jemand eine Schuld von 3450 fl. zu 5% zu verzinsen. Nach 3 Jahren zahlt er davon 840 fl., und wiederum nach 2 Jahren 1020 fl. ab. Wie groß ist der Rest der Schuld nach 8 Jahren von jetzt an, wenn Zinsen und Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

15) Wenn Jemand sich gegen ein Darlehen von 1800 fl. einen Schuldschein über 2856 fl. 23 kr. ausstellen läßt, die nach 6 Jahren ohne Zinsen zu zahlen sind, wie viel % wurden dann von jenem in Anschlag gebracht?

16) Auf ein zum Verkaufe ausgebotenes Haus bietet A 34500 fl. baar, B 23000 fl. baar und nach 5 Jahren 14800 fl. ohne Zins zu zahlen; C dagegen baar 20000 fl. und nach 8 Jahren wieder 20000 fl. ohne Zins. Welcher von ihnen hat das größte Gebot gethan, wenn man 5% Zinseszins in Anschlag bringt und wie viel ist das Gebot eines Jeden baar werth?

17) A schuldet dem B 8200 fl. nach 8 Jahren zahlbar. Nun wünscht aber A das Kapital baar abzutragen, wie viel hat B anzusprechen, wenn er dem A 4% Disconto bewilligt?

18) A hat dem B nach 5 Jahren 700 fl. und nach weiteren 3 Jahren 500 fl. zu zahlen. Wie viel hat er dem B baar zu entrichten, wenn dieser ihm $4\frac{1}{2}$% Disconto gestattet?

19) Ein Privatmann bezieht von einem vor 12 Jahren auf Zinseszinsen ausgeliehenen Kapitale von 9500 fl. jetzt jährlich 682 fl. $25\frac{1}{2}$ kr. Zinsen, indem er es zu 4% ausstehen hat; zu wie viel % war das Kapital auf Zinseszinsen ausgeliehen?

20) Ein Kapital war eine gewisse Zeit hindurch zu 4% und das so angewachsene eben so lang zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen und ist dadurch auf das 5fache angewachsen oder hat um das 4fache zugenommen. Wie lange war es zu 4 und $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen?

21) Es hat Jemand am Ende des dritten, fünften, siebenten und zehnten Jahres bezüglich 250 fl., 380 fl., 500 fl., 720 fl. zu zahlen und möchte aber die ganze Schuld auf einmal entrichten; nach wie viel Jahren muß das geschehen, wenn 4% Zinseszinsen in Rechnung kommen?

22) Es hat Jemand 500 fl. nach 4 Jahren, 300 fl. nach 6 Jahren, 800 fl. nach 9 Jahren, 1000 fl. nach 10 Jahren und 1400 fl. nach 12 Jahren zu bezahlen. Er wünscht aber den ganzen Betrag auf einmal zu entrichten; wann kann dieses ohne Nachtheil für Schuldner und Gläubiger geschehen, wenn 5% Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

23) Es hat Jemand am Ende des

1ten, 2ten, 3ten, . . nten Jahres

die Zahlungen k_1, k_2, k_3, . . . k_n

zu leisten und will die ganze Schuld auf einmal abtragen. Wann muß solches geschehen, wenn dem Zinsfuße p% zu Grunde gelegt werden?

24) In einer Stadt von 24000 Seelen vermehrt sich die Bevölkerung jährlich um $\frac{1}{50}$; wie groß war die Volksmenge vor 12 Jahren?

25) Die Einwohnerzahl einer Stadt nimmt jährlich um 3 auf 100 zu und beträgt gegenwärtig 15800, nach wie viel Jahren wird dieselbe um 12737 zugenommen haben?

26) In wie viel Jahren ist die Volksmenge eines Ortes 8mal so groß geworden, wenn die jährliche Vermehrung 3% beträgt?

27) Die Bevölkerung eines Staates betrug im Jahre 1830 nur 2540000 Seelen, im Jahre 1860 belief sie sich aber auf 5800000; wie viel % hat die Bevölkerung jährlich zugenommen?

28) Der Bestand eines Waldes wurde auf 25000 Klafter abgeschätzt. Wenn man nun weiß, daß der jährliche Zuwachs 2% beträgt, wie groß war dann der Bestand vor 15 Jahren?

29) Der Holzbestand eines Waldes wird zu 18450 Klafter abgeschätzt. Man will aber in diesem Walde erst dann Holz schlagen lassen, wenn er einen Bestand von 42200 Klafter hat. Wie lange muß noch mit dem Fällen gewartet werden, wenn der jährliche Zuwachs $\frac{3}{100}$ beträgt?

30) Wie viel % betrug die jährliche Zunahme eines Waldes, der vor 20 Jahren zu 54500 Klafter, nun aber zu 92800 Klftr. abgeschätzt wurde?

31) Der Zuwachs eines Waldes beträgt 2%. Vor einer gewissen Zeit war der Bestand desselben 40000 Klafter und nun ist er 58000 Klafter. Wie lange wurde kein Holz mehr gefällt?

32) Der Bestand eines Waldes, in welchem seit 15 Jahren kein Holz gefällt wurde, beträgt gegenwärtig 36000 Klafter. Wie groß war der Bestand vor dieser Zeit, wenn $2\frac{1}{4}$% Zuwachs in Rechnung gebracht werden darf?

33) Der Abtrieb eines Waldbestandes kann im 60jährigen Alter bei einem Ertrage von 220 Klafter à 15 fl., oder im 80jährigen Alter bei einem Hiebe von 260 Klafter à 18 fl. geschehen. Welches ist das finanziell vortheilhaftere Abtriebsalter, wenn bei der Verzinsung des Kapitals ein 4procentiger Zinsfuß berechnet wird?

34) Welches Kapital wächst in 20 Jahren zu 8369 fl. 54 kr., wenn die Hauptzinsen zu 5%, die Zinseszinsen aber zu $2^1/_2$% berechnet werden?

35) Ein Kapital von 2200,1 fl. ist in 30 Jahren zu 7029,64 fl. angewachsen. Zu wie viel Procent wurde dasselbe verzinst, wenn die Zinseszinsen zu $2^1/_2$% berechnet wurden?

B. Rentenrechnung.

§. 206. Erklärungen.

1) Hat eine Person ein Kapital ausgegeben und erhält dieselbe solches in der Weise zurück, daß sie so lange nach gewissen gleichen Zeiträumen eine bestimmte Summe bezieht, bis das Kapital abgetragen ist, so sagt man, diese Person beziehe eine

Rente und nennt das dargeliehene Kapital den *Einsatz* oder die *Mise*. Der Gläubiger, der die Mise gibt und die Rente empfängt, heißt *Rentirer* oder *Rentner*, der Schuldner, der diese Mise bezieht, also die Rente zu bezahlen hat, *Entrepreneur* oder *Unternehmer*.

Stirbt der Rentner *vor* Bezug der ganzen Rente, so ist der Entrepreneur verbunden, diese bis zur Verfallzeit an die Erben derselben auszuzahlen.

Ein Vertrag, welcher in Betreff solcher Rentenbezüge ausgefertigt wird, heißt *Annuitätsvertrag*.

2) Man unterscheidet zweierlei Arten von Renten, nämlich:

a) *Zeitrenten*, *Jahresrenten* oder *Annuitäten*, wenn die Rente nur eine bestimmte Anzahl von Jahren (bis zur Tilgung der Mise) bezogen wird;

b) *Lebensrente* oder *Leibrente*, wenn der Rentirer die Rente bis zu seinem Lebensende bezieht.

Im letzten Falle verliert der Vertrag vom Todestage des Rentners an seine Giltigkeit.

3) Je nachdem die Auszahlung einer Rente zu *Anfange* oder am *Ende* eines jeden Jahres oder Zeitabschnittes ausbezahlt wird, heißt dieselbe bezüglich *vorschüssig* oder *nachschüssig*.

4) Die Summe, welche baar bezahlt ebenso viel werth ist, als die Summe aller Rentenbezüge sammt Zinsen (Endwerth der Rente), heißt der *baare Werth* oder der *Baarwerth* der betreffenden Rente.

5) Bei allen hierher gehörigen Berechnungen werden Zinseszinsen in Anschlag gebracht.

6) Wir betrachten hier zunächst nur die *Zeitrenten*. Um sämmtliche hier in Frage kommenden Fälle zu entwickeln, wollen wir nachstehend eine Reihe allgemeiner Aufgaben lösen und die gewonnenen Resultate sogleich auf numerische Beispiele anwenden.

§. 207. Aufgabe.

Es bezieht Jemand n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres die Rente r, wie groß ist deren Endwerth R, wenn $p\%$ Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Auflösung.

Die der Reihe nach am Ende des

1ten 2ten 3ten . . . (n — 1)ten, nten Jahres

zu entrichtenden Renten r wachsen nach §. 204 (3) bis zum Ende des nten Jahres, also bezüglich in

(n — 1), (n — 2), (n — 3), ... 1, 0 Jahren

an zu

$$r \,.\, 1{,}0p^{n-1},\; r \,.\, 1{,}0p^{n-2},\; r \,.\, 1{,}0p^{n-3},\; \ldots\; r \,.\, 1{,}0p,\; r,$$

also ist die Summe der n Rentenbezüge oder der Endwerth der Rente

$$R = r + r \,.\, 1{,}0p + r \,.\, 1{,}0p^2 + \ldots\ldots + r \,.\, 1{,}0p^{n-1}$$

oder, wenn wir in der Formel (2) des §. 200

$$t = r \,.\, 1{,}0p^{n-1};\; q = 1{,}0p;\; a = r$$

setzen,

$$R = \frac{r \,.\, 1{,}0p^{n-1} \,.\, 1{,}0p - r}{1{,}0p - 1} = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \;\ldots\; (1).$$

Zusatz.

Geschieht die Auszahlung der Rente zu Anfang eines jeden Jahres, so wächst die

1te 2te 3te . . . (n—1)te, nte Rente

bis zum Ende des nten Jahres an zu

$$r \,.\, 1{,}0p^n,\; r \,.\, 1{,}0p^{n-1},\; r \,.\, 1{,}0p^{n-2},\; \ldots\; r \,.\, 1{,}0p^2,\; r \,.\, 1{,}0p$$

und es wird somit in diesem Falle

$$R = r \,.\, 1{,}0p\,(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots + 1{,}0p^{n-1}),$$

$$\text{oder } R = r \,.\, 1{,}0p\, \frac{1{,}0p^{n-1} \,.\, 1{,}0p - 1}{1{,}0p - 1} = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \;\ldots\; (2).$$

Beispiele.

1) Es legte Jemand am Ende eines jeden Jahres 350 fl. zu 5% auf Zinseszinsen an; wie viel hatte sich derselbe in 12 Jahren auf diese Weise erspart?

Auflösung.

Setzen wir in der Formel (1)

$$r = 350,\; p = 5,\; n = 12$$

so folgt für die ersparte Summe

$$R = \frac{350\,(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05} = 7000\,(1{,}05^{12} - 1)$$

oder, da $12 \log 1{,}05 = 0{,}2542716$

also $1{,}05^{12} = 1{,}795856,$

$$R = 7000 \,.\, 0{,}795856 = 5570{,}99 \text{ fl.}$$

2) A schuldet dem B 3601,82 fl. nach 10 Jahren zahlbar, möchte aber die Schuld dadurch abtragen, daß er am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe entrichtet. Wie groß müssen diese jährlichen Zahlungen des A sein, wenn ihm B 4 % jährlichen Disconto bewilligt?

Auflösung.

Hier steht r in Frage und in der Formel (1) ist zu setzen:

$$R = 3601{,}82;\; p = 4;\; n = 10.$$

Aus der Gleichung

$$3601{,}82 = \frac{r\,(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04}$$

folgt alsdann

$$r = \frac{3601{,}82\,.\,0{,}04}{1{,}04^{10} - 1} = \frac{14{,}4328}{1{,}04^{10} - 1}$$

oder da $10 \log 1{,}04 = 1{,}1703330$

also $1{,}04^{10} = 1{,}4802442$

$$r = \frac{14{,}4328}{0{,}4802442} = 300{,}5 \text{ fl.}$$

3) Bei dem Ankaufe eines Gutes wird dem Käufer freigestellt, nach zehn Jahren 22247 fl. 54 kr., oder während dieser Zeit am Ende eines jeden Jahres 1800 fl. zu zahlen. Wie viel Procente brachte der Verkäufer hierbei in Anrechnung?

Auflösung.

Setzt man in der Formel (1)

$$R = 22247{,}9;\; r = 1800;\; n = 10;$$

so folgt:

$$22247{,}9 = \frac{1800\,(1{,}0p^{10} - 1)}{1{,}0p - 1}$$

und hieraus $1800\,.\,1{,}0p^{10} - 22247{,}9\,.\,1{,}0p = -\,20447{,}9.$

Um aus dieser Gleichung des 10ten Grades den Werth von 1,0p zu erhalten, muß man für p der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, ... substituiren und untersuchen, welcher von diesen Werthen der Gleichung genügt, oder zwischen welchen der Werth von p liegt. Man findet, daß p = 4 zu klein, dagegen p = 5 zu groß ist. Nun führe man für p Werthe ein, die zwischen 4 und 5 liegen und schließe, auf diese Weise fortfahrend, den wirklichen Werth in immer engere Grenzen ein, bis man ihn, der vorliegenden Aufgabe entsprechend, genau genug gefunden hat. In vorstehendem Falle wird $p = 4{,}625 = 4\tfrac{5}{8}$ %.

4) Um sich nach Verfluß einer gewissen Zeit ein Kapital von 28234,3 fl. zu sichern, legte A am Ende eines jeden Jahres 900 fl. zu $4\tfrac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen an; nach wie viel Jahren sah er sich im Besitze der gewünschten Summe?

Auflösung.

Führen wir in die Formel (1)

$$R = 28234{,}3;\ r = 900;\ 1{,}0p = 1{,}045$$

ein, so folgt

$$28234{,}3 = \frac{900\,(1{,}045^n - 1)}{0{,}045} = 20000\,.\,1{,}045^n - 20000$$

und hieraus $20000\,.\,1{,}045^n = 48234{,}3$

oder $\log 20000 + n \log 1{,}045 = \log 48234{,}3$

$$n = \frac{\log 48234{,}3 - \log 20000}{\log 1{,}045}$$

$$= \frac{4{,}6833560 - 4{,}3010300}{0{,}0191163} = \frac{0{,}3823260}{0{,}0191163} = 20 \text{ Jahre.}$$

Analog sind die Auflösungen der Aufgaben über vorschüssige Renten.

§. 208. Aufgabe.

Es bezieht Jemand n Jahre lang jedesmal am Ende von m Jahren eine Rente r; wie groß ist deren Endwerth R, wenn p% Zinseszinsen in Rechnung kommen?

Auflösung.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es ist nämlich entweder n durch m theilbar oder nicht.

Erster Fall. n sei durch m theilbar.

Die aufeinander folgenden Renten sind der Reihe nach zu beziehen am Ende des

mten, 2mten, 3mten, ... (n—m)ten, nten Jahres

und wachsen somit in

n—m, n—2m, n—3m, ... m 0 Jahren

an zu

$$r\,.\,1{,}0p^{n-m},\ r\,.\,1{,}0p^{n-2m},\ r\,.\,1{,}0p^{n-3m}, \ldots\ r\,.\,1{,}0p^{m},\ r.$$

Folglich ist der Werth aller Rentenbezüge am Ende des nten Jahres oder der Endwerth

$$R = r + r\,.\,1{,}0p^m + \ldots + r\,.\,1{,}0p^{n-2m} + r\,.\,1{,}0p^{n-m}$$

oder, wenn man in der Formel (2) des §. 200

$$t = r\,.\,1{,}0p^{n-m};\ q = 1{,}0p^m,\ a = r$$

setzt,

$$R = \frac{r\,.\,1{,}0p^{n-m}\,.\,1{,}0p^m - r}{1{,}0p^m - 1} = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^m - 1} \ldots (1).$$

Zweiter Fall. n sei durch m nicht theilbar.

In diesem Falle bestimme man zuerst den Werth aller Rentenbezüge bis zu dem Jahre, an dessen Ende die letzte Rente ausbezahlt wird, und berechne alsdann, zu welcher Summe dieser Werth noch bis zum Ende des nten Jahres bei Zugrundelegung von Zinseszinsen anwächst.

Beispiele.

1) Es erhält Jemand während 24 Jahren jedesmal am Ende des dritten Jahres eine Rente von 400 fl.; wie groß ist der Endwerth, wenn 4% Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

Auflösung.

Da 24 durch 3 theibar ist, so hat man nach Formel (1), wenn man $r = 400,\ n = 24,\ m = 3,\ p = 4$ setzt,

$$R = \frac{400\ (1{,}04^{24} - 1}{1{,}04^3 - 1},$$

oder da $24 \log 1{,}04 = 0{,}4087992$

und $3 \log 1{,}04 = 0{,}0510999$

also $1{,}04^{24} = 2{,}5633041$

und $1{,}04^3 = 1{,}1248640$

$$R = \frac{400\ .\ 1{,}5633041}{0{,}1248640} = 5008{,}048 \text{ fl.}$$

2) Es empfängt Jemand am Ende eines jeden vierten Jahres 800 fl., welche er zu 5% auf Zinseszinsen anlegt. Wie viel beträgt der Werth aller empfangenen Zahlungen am Ende des 30. Jahres?

Auflösung.

Da 40 durch 4 nicht theilbar ist, so hat man die Auflösung nach der für den zweiten Fall der obigen allgemeinen Aufgabe gegebenen Regel vorzunehmen und somit zunächst nach der Formel (1) die Summe R' aller Zahlungen am Ende des 28. Jahres zu bestimmen.

Setzen wir zu diesem Ende

$$r = 800,\ n = 28,\ m = 4,\ p = 5,$$

so folgt $$R' = \frac{800\ (1{,}05^{28} - 1}{1{,}05^4 - 1}.$$

Der Werth R' wächst aber in den zwei noch fehlenden Jahren nach §. 204 (3) an zu $R'\ .\ 1{,}0p^2$.

Folglich ist der zu suchende Endwerth

$$R = R'\ .\ 1{,}0p^2 = \frac{800\ (1{,}05^{28} - 1)}{1{,}05^4 - 1}\ .\ 1{,}05^2$$

$$= \frac{800\ .\ 2{,}92013\ .\ 1{,}05^2}{0{,}215506}$$

$$= 11951{,}17 \text{ fl.}$$

§. 209. Aufgabe.

Was ist der gegenwärtige (baare) Werth einer während n Jahren am Ende eines jeden Jahres beziehbaren Rente r bei p% Zinseszinsen?

Auflösung.

Ein Kapital k, welches jetzt bezahlt wird, wächst nach §. 204 (3) in n Jahren an zu $k \,.\, 1{,}0p^n$ und der Werth einer nachschüssigen Jahrrente ist nach n Jahren nach §. 207 (1)

$$\frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}.$$

Da nun beide Werthe nach der gestellten Bedingung einander gleich sein sollen, so erhält man die Gleichung

$$k \,.\, 1{,}0p^n = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

und hieraus für den Baarwerth der Rente

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}.$$

Beispiele.

1) Wie viel hat man baar für eine 14 Jahre lang zu beziehende Rente von 600 fl. zu entrichten, wenn $4\frac{1}{2}$% Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

Auflösung.

Setzt man in vorstehender Formel

$$r = 600,\ n = 14,\ p = 4\tfrac{1}{2},\ 1{,}0p = 1{,}045,$$

so erhält man für den Baarwerth

$$k = \frac{600\,(1{,}045^{14} - 1)}{1{,}045^{14} \,.\, 0{,}045},$$

oder da $14 \log 1{,}045 = 0{,}2676282,$

also $1{,}045^{14} = 1{,}851945,$

$$k = \frac{600 \,.\, 0{,}851945}{1{,}045^{14} \,.\, 0{,}045}$$

$$\begin{array}{ll} \log 600 = 2{,}7781513 & 14 \log 1{,}045 = 0{,}2676282 \\ \log 0{,}851945 = 0{,}9304116 - 1 & \log 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2 \\ \hline \log k = 2{,}7085629 \quad - & (0{,}9208407 - 2) \\ \quad = 3{,}7877222 & \end{array}$$

folglich $k = 6133{,}7$ fl.

2) Der Bestand eines Waldes beträgt gegenwärtig 26850 Klafter. Wie viel Klafter müssen am Ende eines jeden Jahres geschlagen

werden, wenn derselbe nach 15 Jahren ganz abgetrieben sein soll und der jährliche Zuwachs 2% beträgt?

Auflösung.

Setzt man in obiger Formel

$$k = 26850;\ n = 15;\ p = 2;\ 1{,}0p = 1{,}02,$$

so folgt aus der Gleichung

$$26850 = \frac{r\,(1{,}02^{15} - 1)}{1{,}02^{15}\,.\,0{,}02}$$

$$r = \frac{26850\,.\,1{,}02^{15}\,.\,0{,}02}{1{,}02^{15} - 1} = \frac{537\,.\,1{,}02^{15}}{1{,}02^{15} - 1},$$

oder da $15 \log 1{,}02 = 0{,}1290030$

also $1{,}02^{15} = 1{,}345869$

$$r = \frac{537\,.\,1{,}02^{15}}{0{,}345869}.$$

Nun ist $\log 537 + 15 \log 1{,}02 = 2{,}8589773$

$\log 0{,}345869 = 0{,}5389116 - 1$

$\log r = 3{,}3200657,$

folglich $r = 2089{,}61$ Klafter.

3) Ein Vater hinterließ seinem 20jährigen Sohne ein Vermögen von 20000 fl. Dieser aber bedurfte zu seinem Unterhalte jährlich 1445 fl. 45 kr. Nach wie viel Jahren war das Kapital sammt Zinsen aufgebraucht, wenn diese zu 5% angenommen werden?

Auflösung.

Setzt man $k = 20000,\ r = 1445{,}75,\ p = 5,$

so folgt aus der Gleichung

$$20000\,.\,1{,}05^x = \frac{1445{,}75\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$$

$$20000\,.\,1{,}05^x - 28915\,.\,1{,}05^x = -\,28915,$$

oder $8915\,.\,1{,}05^x = 28915$

und hieraus $x = \dfrac{\log 28915 - \log 8915}{\log 1{,}05}$

$$= \frac{4{,}4611232 - 3{,}9501213}{0{,}0211893}$$

$$= \frac{0{,}5110019}{0{,}0211893} = 24 \text{ Jahre.}$$

§. 210. Aufgabe.

Es hat Jemand ein Kapital k zu p% auf Zinseszinsen ausstehen. Welche Summe K kann der Darleiher nach n Jahren erheben, wenn er das ausgeliehene Kapital bis dahin am Ende eines jeden

Jahres a) um die Summe r vermehrt, b) um die Summe r vermindert?

Auflösung.

Das ausgeliehene Kapital k ist in n Jahren nach §. 204 (3) angewachsen zu $k \,.\, 1{,}0p^n$ und der Werth der Rente r beträgt nach dieser Zeit nach §. 207 (1) $\frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$, folglich wird nach n Jahren

a) im Falle einer jährlichen Vermehrung

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots (1)$$

b) im Falle einer jährlichen Verminderung

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots (2).$$

Anmerkung.

Für den Fall einer halbjährlichen Vermehrung oder Verminderung und Kapitalisirung erhält man beziehungsweise:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n} \pm \frac{r}{2} \,.\, \frac{\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n} - 1}{\frac{p}{200}}$$

und wenn die erwähnten Bedingungen vierteljährlich erfüllt werden:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{400}\right)^{4n} \pm \frac{r}{4} \,.\, \frac{\left(1 + \frac{p}{400}\right)^{4n} - 1}{\frac{p}{400}}$$

Beispiele.

1) Es legte Jemand vor 18 Jahren 500 fl. in eine Sparkasse, welche 3% Zinseszinsen vergütet, und vermehrte diese Einlage noch am Ende eines jeden Jahres um 30 fl.; wie viel hatte sich diese Person dadurch am Ende des 18ten Jahres im Ganzen erspart?

Auflösung.

Führt man in vorstehende Gleichung für k, r, n und p der Reihe nach die Werthe 500, 30, 18 und 3 ein, so erhält man für das ersparte Kapital

$$\begin{aligned} K &= 500 \,.\, 1{,}03^{18} + \frac{30\,(1{,}03^{18} - 1)}{0{,}03} \\ &= 500 \,.\, 1{,}03^{18} + 1000 \,.\, 1{,}03^{18} - 1000 \\ &= 1500 \,.\, 1{,}03^{18} - 1000, \end{aligned}$$

oder da

$$\begin{aligned} \log 1500 &= 3{,}1760913 \\ 18 \log 1{,}03 &= 0{,}2310696 \\ \hline \log 1500 \cdot 1{,}03^{18} &= 3{,}4071609 \end{aligned}$$

also

$$1500 \cdot 1{,}03^{18} = 2553{,}347,$$

$$K = 2553{,}347 - 1000 = 1553{,}347 \text{ fl.}$$

2) A legt sein Vermögen von 22000 fl. zu 4% auf Zinseszinsen und vermehrt dieses Kapital noch am Ende eines jeden Jahres um 300 fl.; nach welcher Zeit wird A im Besitze eines Vermögens von 30000 fl. sein?

Auflösung.

Setzt man in obiger Formel (1)

$$K = 30000, \; k = 22000, \; r = 300, \; p = 4,$$

so folgt

$$\begin{aligned} 30000 &= 22000 \cdot 1{,}04^n + \frac{300\,(1{,}04^n - 1)}{0{,}04} \\ &= 22000 \cdot 1{,}04^n + 7500 \cdot 1{,}04^n - 7500 \\ &= 29500 \cdot 1{,}04^n - 7500, \end{aligned}$$

oder

$$29500 \cdot 1{,}04^n = 37500$$

oder

$$\log 29500 + n \log 1{,}04 = \log 37500$$

und hieraus

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 37500 - \log 29500}{\log 1{,}04} \\ &= \frac{4{,}5740313 - 4{,}4698220}{0{,}0170333} \\ &= \frac{0{,}1042093}{0{,}0170333}, \end{aligned}$$

also etwas über 6 Jahre.

Anmerkung. Will man die Zeit auf Monate und Tage genau bestimmen, so darf man nach §. 204 Anmerkung zur Aufgabe 6 nicht den erhaltenen Decimalbruch in solche Zeittheile verwandeln, sondern man hat alsdann in obigem Ausdrucke

$$22000 \cdot 1{,}04^n + \frac{300\,(1{,}04^n - 1)}{0{,}04}$$

$n = 6$ zu setzen und hierauf zu bestimmen, wie lange der dafür erhaltene Werth von 29826,88 fl. noch auszuleihen ist, bis er 30000 — 29826,88 = 173,12 fl. einfache Zinsen getragen hat. Man findet mittelst Zweisatzrechnung, daß dieses noch 1 Monat 22 Tage dauert. Als genaues Resultat erhält man also für

$n = 6$ Jahre 1 Monat 22 Tage,

das von 6,1 Jahr oder 6 Jahre 1 Monat 6 Tage um 16 Tage abweicht.

3) Es hat Jemand ein Kapital von 48000 fl. zu $4\frac{1}{2}$% auf Zinseszinsen stehen. Wie viel darf derselbe am Ende eines jeden Jahres davon zu seinem Unterhalte erheben, wenn er nach 20 Jahren im Besitze eines Vermögens von 60000 fl. zu sein wünscht?

Auflösung.

Da hier eine Wegnahme vom dargeliehenen Kapitale stattfindet, so hat man die Formel (2) in Anwendung zu bringen, darin zu setzen

$$K = 60000,\ k = 48000,\ n = 20\tfrac{1}{2},\ 1{,}0p = 1{,}045$$

und r daraus zu bestimmen.

Man erhält aber aus

$$60000 = 48000 \cdot 1{,}045^{20} - \frac{(1{,}045^{20} - 1)}{0{,}045}$$

$$r = \frac{(48000 \cdot 1{,}045^{20} - 60000) \cdot 0{,}045}{1{,}045^{20} - 1}$$

$$= \frac{2160 \cdot 1{,}045^{20} - 2700}{1{,}045^{20} - 1}$$

$$= \frac{5209{,}305 - 2700}{1{,}411715}$$

$$= \frac{2509{,}305}{1{,}411715} = 1777{,}6 \text{ fl.}$$

§. 211. Aufgabe.

Wie groß ist der gegenwärtige Werth k einer am Ende eines jeden Jahres fälligen Rente r, wenn dieselbe zwar n Jahre lang bezogen, aber erst am Ende des mten Jahres zum ersten Male entrichtet wird und p% Zinseszinsen in Rechnung kommen?

Auflösung.

Nach §. 204 (3) ist

der baare Werth der ersten Rente $= \dfrac{r}{1{,}0p^m}$

" " " " zweiten " $= \dfrac{r}{1{,}0p^{m+1}}$

" " " " letzten " $= \dfrac{r}{1{,}0p^{m+n-1}}$

folglich wird

$$k = \frac{r}{1{,}0p^m} + \frac{r}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{r}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots + \frac{r}{1{,}0p^{m+n-1}}$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^m}\left(1 + \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots + \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^m} \cdot \frac{\frac{1}{1{,}0p^{n-1}} \cdot \frac{1}{1{,}0p} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} \quad [\text{§. 200 (2)}]$$

$$k = \frac{r}{1{,}0p^m} \cdot \frac{\frac{1}{1{,}0p^n} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1}$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^m} \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{(1{,}0p - 1)\ 1{,}0p^{n-1}}$$

$$= \frac{r\ (1{,}0p^n - 1)}{(1{,}0p - 1)\ 1{,}0p^{m+n-1}} = \frac{r\ (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\ .\ 1{,}0p^{m+n-1}}.$$

Anmerkung. Man erhält diese Formel auch durch Anwendung des §. 209. Darnach ist nämlich der baare Werth der Rente am Ende des (m—1)ten Jahres

$$= \frac{r\ (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\ .\ 1{,}0p^n},$$

folglich der gegenwärtige Werth

$$k = \frac{r\ (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\ .\ 1{,}0p^n\ .\ 1{,}0p^{m-1}}$$

$$= \frac{r\ (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\ .\ 1{,}0p^{m+n-1}}.$$

Beispiel.

Es hat Jemand eine jährlich fällige, aber erst vom Ende des 10. Jahres an beginnende Rente von 3000 fl. während 15 Jahren zu beziehen. Wie groß ist der baare Werth dieser Rente, wenn bei der Berechnung derselben 4procentige Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden?

Auflösung.

Setze

$$r = 3000;\ 1{,}0p = 1{,}04;\ m = 10;\ n = 15,$$

so folgt für den Baarwerth

$$k = \frac{3000\ (1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\ .\ 1{,}04^{24}}.$$

Nun ist $1{,}04^{15} = 1{,}800941$

$1{,}04^{15} - 1 = 0{,}800941$

	$\log 3000 = 3{,}4771213$	$\log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
	$\log 0{,}800941 = 0{,}9036006 - 1$	$24 \log 1{,}04 = 0{,}4087992$
also	$\log k = 3{,}3807219$	$-\ (0{,}0108592 - 1)$
oder	$\log k = 4{,}3698627$	
folglich	$k = 23434{,}9$ fl.	

§. 212. Aufgabe.

Wie groß ist der baare Werth k einer nmal nach je m Jahren zu beziehenden Rente r bei Anrechnung von p% Zinseszinsen?

Auflösung.

Die aufeinanderfolgenden Renten sind der Reihe nach baar werth:

$$\frac{r}{1{,}0p^m}, \frac{r}{1{,}0p^{2m}}, \frac{r}{1{,}0p^{3m}}, \ldots \frac{r}{1{,}0p^{nm}},$$

also ist

$$k = \frac{r}{1{,}0p^m} + \frac{r}{1{,}0p^{2m}} + \frac{r}{1{,}0p^{3m}} + \ldots + \frac{r}{1{,}0p^{nm}}$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^m}\left(1 + \frac{1}{1{,}0p^m} + \frac{1}{1{,}0p^{2m}} + \ldots + \frac{1}{1{,}0p^{(n-1)m}}\right)$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^m} \cdot \frac{\frac{1}{1{,}0p^{(n-1)m}} \cdot \frac{1}{1{,}0p^m} - 1}{\frac{1}{1{,}0p^m} - 1} \quad [\text{§. } 200\ (2)]$$

$$= \frac{r\,(1{,}0p^{mn} - 1)}{1{,}0p^{mn}\,(1{,}0p^m - 1)}.$$

Anmerkung. Man erhält diese Formel auch aus §. 208 in Verbindung mit §. 204.

Beispiel.

Es hat Jemand eine nach je 3 Jahren fällige Rente von 2400 fl. 8mal zu beziehen; wie groß ist der baare Werth derselben bei Berechnung vierprocentiger Zinseszinsen?

Auflösung.

Setze $r = 2400,\ p = 4,\ m = 3,\ n = 8,$
so folgt für den baaren Werth

$$k = \frac{2400\,(1{,}04^{24} - 1)}{1{,}04^{24}\,(1{,}04^3 - 1)},$$

oder da

$$1{,}04^{24} - 1 = 1{,}5633041$$
$$1{,}04^3 - 1 = 0{,}1248640$$

log 1,5633041	= 0,1940434	log 0,124863	= 0,0964373 — 1
log 2400	= 3,3802112	log $1{,}04^{24}$	= 0,4088001
so ist log k	= 3,5742546	—	(0,5052374 — 1)
	= 4,0690172		
somit k	= 11722,4 fl.		

§. 213. Aufgabe.

Wie groß ist der baare Werth k einer fortwährend am Ende eines jeden Jahres zu entrichtenden Summe r bei einem Zinsansatz von p% jährlich?

Auflösung.

Nach §. 209 ist der baare Werth einer nmal wiederkehrenden Jahresrente

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$$

$$= \frac{r}{0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}.$$

Da nun die Zahlung fortwährend zu geschehen hat, so haben wir in vorstehender Gleichung $n = \infty$ anzunehmen und erhalten alsdann für den in Frage stehenden Baarwerth

$$k = \frac{r}{0{,}0p} = \frac{100r}{p}.$$

Der baare Werth einer ewigen Rente ist also einem Kapitale gleich, dessen jährlicher Zinsenertrag der Rente selbst gleichkommt.

Anmerkung. Diese Aufgabe findet ihre Anwendung insbesondere bei Ablösung von Bau-, Zehntpflichten u. dergl.

Beispiel.

Wie groß ist die baar zu entrichtende Summe, mittelst welcher ein jährlich zu leistender Beitrag von 450 fl. abgelöst wird, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet werden?

Auflösung.

Setzt man in obiger Formel

$$r = 450,\; p = 4{,}5,$$

so erhält man für das verlangte Ablösungskapital

$$k = \frac{100 \,.\, 450}{4{,}5} = 10000 \text{ fl.}$$

§. 214. Aufgabe.

Es hat Jemand am Ende eines jeden Jahres die Summe r zu entrichten. Wie viel beträgt das Ablösungskapital k, wenn die erste Zahlung am Ende des mten Jahres zu geschehen hat und $p\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?

Auflösung.

Nach §. 211 ist für eine nmalige Zahlungsleistung

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{m+n-1} \,.\, 0{,}0p}$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^{m-1} \,.\, 0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^{m+n-1} \,.\, 0{,}0p}.$$

Setzen wir nun n = ∞, so folgt für das fragliche Ablösungskapital

$$k = \frac{r}{1{,}0p^{m-1} \cdot 0{,}0p}.$$

Beispiel.

Wie viel beträgt das Ablösungskapital einer jährlich fälligen Rente von 150 fl., wenn die erste Zahlung erst nach 20 Jahren zu geschehen hat und der Zinsfuß zu 4% berechnet wird?

Auflösung.

Führt man in vorstehende Formel

$$r = 150,\ m = 20,\ p = 4$$

ein, so folgt als Ablösungskapital

$$k = \frac{150}{1{,}04^{19} \cdot 0{,}04}$$

$$19 \log 1{,}04 = 0{,}3236327$$

$$\log 0{,}04 = \underline{0{,}6020600 - 2}$$

$$\log k = 2{,}1760913 - (0{,}9256927 - 2)$$

oder $\log k = 3{,}2503986$

somit $k = 1779{,}91$ fl.

§. 215. Aufgabe.

Wie groß ist das Ablösungskapital k einer jedesmal am Ende von m Jahren zu leistenden Zahlung r bei p% Zinseszinsen?

Auflösung.

Nach §. 212 ist für eine nmalige Zahlungsleistung

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^{mn} - 1)}{1{,}0p^{mn}\,(1{,}0p^{m} - 1)}$$

$$= \frac{r}{1{,}0p^{m} - 1} - \frac{r}{1{,}0p^{mn}\,(1{,}0p^{m} - 1)}.$$

Setzen wir nun n = ∞, so folgt hieraus für das gewünschte Ablösungskapital

$$k = \frac{r}{1{,}0p^{m} - 1}.$$

Beispiel.

Eine Gemeinde ist verpflichtet nach 5 Jahren zum ersten Male und in der Folge nach je 5 Jahren 250 fl. zu entrichten. Mit

welcher Summe kann diese Schuld baar abgetragen werden, wenn 5% Zinsen in Anrechnung kommen?

Auflösung.

Setzt man in vorstehende Formel

$$r = 250,\ n = 5,\ p = 5,$$

so folgt $$k = \frac{250}{1{,}05^5 - 1},$$

oder da $$\log 250 = 2{,}3979400$$
$$\log (1{,}05^5 - 1) = 0{,}4413510 - 1$$

also $$\log k = 2{,}9565890,$$

so ist $$k = 904{,}87 \text{ fl.}$$

§. 216. Aufgabe.

Wie groß ist der gegenwärtige Werth k einer Rente r, wenn dieselbe nach n Jahren zum ersten Male und hierauf alle m Jahre fällig ist und p% Zinseszinsen in Rechnung kommen?

Auflösung.

Nach (n — m) Jahren ist nach §. 215 der Werth der alle m Jahre zu entrichtenden Rente r

$$= \frac{r}{1{,}0p^m - 1},$$

folglich ist nach §. 104 (3) der zu suchende gegenwärtige Werth

$$k = \frac{r}{(1{,}0p^m - 1)\ 1{,}0p^{n-m}}.$$

Anmerkung. Man erhält diese Formel auch, indem man die baaren Werthe der aufeinanderfolgenden Renten, d. i.

$$\frac{r}{1{,}0p^n},\ \frac{r}{1{,}0p^{n+m}},\ \frac{r}{1{,}0p^{n+2m}},\ \ldots \text{ in inf.}$$

addirt, also in §. 200 (2)

$$a = \frac{r}{1{,}0p^n},\ q = \frac{1}{1{,}0p^m}$$

setzt.

Zusatz.

Für m = 1 geht obige Formel über in

$$k = \frac{r}{0{,}0p\ .\ 1{,}0p^{n-1}}.$$

Beispiele.

Die Gemeinde A ist verbunden, eine über einen Bach führende und 3500 fl. kostende Brücke jedesmal wieder aufzuführen, so bald

die alte unbrauchbar geworden ist. Wenn dies nun nach 10 Jahren wieder der Fall ist und nach je 40 weiteren Jahren zu geschehen hat; wie groß ist dann das Kapital, mit welchem die Gemeinde diese Verpflichtung ablösen kann, wenn 3% Zinsen angesetzt werden?

Auflösung.

Setzt man in vorstehender Formel

$$r = 3500,\ n = 10,\ m = 40,\ p = 3,$$

so folgt für das Ablösungskapital

$$k = \frac{3500}{(1{,}03^{40} - 1) \, . \, 1{,}03^{-30}} = \frac{3500 \, . \, 1{,}03^{30}}{1{,}03^{40} - 1}$$

Nun ist aber

$$40 \log 1{,}03 = 0{,}5134880$$
$$1{,}03^{40} = 2{,}26203$$

$$\log 3500 = 3{,}5440680$$
$$30 \log 1{,}03 = 0{,}3851160$$
$$3{,}9291840$$
$$\log 2{,}26203 = 0{,}3544926$$

also $k = \text{num} \log 3{,}5746914 = 3755{,}7$ fl.

§. 217. Aufgabe.

Es bezieht Jemand am Ende des ersten Jahres eine Rente r und nach Verlauf eines jeden der n folgenden Jahre eine um d größere Rente als im nächst vorhergehenden Jahre. Welches ist der Werth K dieser n Rentenbezüge bei einem Zinsfuße von p Procent?

Auflösung.

Die Rentenbezüge sind der Reihe nach

$$\overset{1}{r},\quad \overset{2}{r + d},\quad (\overset{3}{r + 2d}),\ldots\ldots r + \overset{n-1}{(n - 2)d},\ r + \overset{n}{(n - 1)d}$$

und wachsen bis zum Ende des nten Jahres an zu:

$$r.1{,}0p^{n-1}, (r+d)1{,}0p^{n-2}, (r+2d)1{,}0p^{n-3}, \ldots [r+(n-2)d]1{,}0p, r+(n-1)d.$$

Vorstehende Reihe ist eine zusammengesetzte und geht aus der gliedweisen Multiplication den beiden Reihen

$$r,\quad r + d,\ r + 2d, \ldots r + (n - 2)d,\ r + (n - 1)d$$

und $1{,}0p^{n-1},\ 1{,}0p^{n-2},\ 1{,}0p^{n-3},\ \ldots\quad 1{,}0p,\quad 1$

hervor. Setzt man demnach in §. 202, 2

$$a = r,\ d = d,\ b = 1{,}0p^{n-1},\ q = \frac{1}{1{,}0p},\ n = n,$$

so erhält man für den verlangten Werth

$$K = \frac{r \,.\, 1{,}0p^{n-1}\left(\frac{1}{1{,}0p^n} - 1\right)}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} + \frac{1{,}0p^{n-1}d}{\frac{1}{1{,}0p} - 1}\left[\frac{1}{1{,}0p^n}(n-1) - \frac{\frac{1}{1{,}0p}\left(\frac{1}{1{,}0p^{n-1}} - 1\right)}{\frac{1}{1{,}0p} - 1}\right]$$

$$= \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} - \frac{1{,}0p^n \,.\, d}{0{,}0p}\left[\frac{n-1}{1{,}0p^n} - \frac{1{,}0p^{n-1} - 1}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}\right]$$

$$= \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} - \frac{d\,(n-1)}{0{,}0p} + \frac{d \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^{n-1} - 1)}{(0{,}0p)^2}.$$

§. 218. Aufgabe.

Es hat Jemand während n Jahren bezüglich die in geometrischer Progression steigenden nachschüssigen Renten

$$r,\ rq,\ rq^2,\ rq^3,\ \ldots\ rq^{n-2},\ rq^{n-1}$$

zu beziehen. Wie groß ist der Werth K derselben am Ende des nten Jahres, wenn dem Zinsfuße p% zu Grunde gelegt werden?

Auflösung.

Da die einzelnen Renten bis zum Ende des nten Jahres der Reihe nach anwachsen zu

$r \,.\, 1{,}0p^{n-1},\ rq \,.\, 1{,}0p^{n-2},\ rq^2 \,.\, 1{,}0p^{n-3},\ \ldots\ldots\ rq^{n-2} \,.\, 1{,}0p + rq^{n-1}$,

so bilden deren Werthe nach n Jahren eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $= r \,.\, 1{,}0p^{n-1}$, deren letztes Glied $= rq^{n-1}$ und deren Quotient $= \frac{q}{1{,}0p}$ ist.

Man hat somit nach §. 200 (2).

$$K = \frac{rq^{n-1} \,.\, \frac{q}{1{,}0p} - r \,.\, 1{,}0p^{n-1}}{\frac{q}{1{,}0p} - 1}$$

$$= \frac{r\,(q^n - 1{,}0p^n)}{q - 1{,}0p}.$$

§. 219. Aufgabe.

Ein Kapital k steht zu p% auf Zinseszinsen, die jährlich fälligen Zinsen werden aber nur zu q% zinsbringend berechnet; welches ist der Werth K des ausgeliehenen Kapitals nach n Jahren?

Auflösung.

Das Kapital k trägt jährlich einen Zins = k . 0,0p. Dieser bildet nun eine zu q% verzinsliche und n Jahre lang fällige Jahresrente. Der Stand des Kapitals k am Ende des nten Jahres ist somit

$$K = k + \frac{k \,.\, 0{,}0p\,(1{,}0q^n - 1)}{0{,}0q}$$

$$= k\left[1 + \frac{0{,}0p\,(1{,}0q^n - 1)}{0{,}0q}\right]$$

$$= k\left[1 + \frac{p}{q}\,(1{,}0q^n - 1)\right].$$

Anmerkung.

Für den Fall, daß die Zinsen und Zinseszinsen halbjährlich berechnet werden, wird

$$K = k + \frac{k\,.\,p}{200}\left[\frac{\left(1 + \frac{q}{200}\right)^{2n} - 1}{\frac{q}{200}}\right]$$

$$= k\left[1 + \frac{p}{q}\left(\left(\frac{200 + q}{200}\right)^{2n} - 1\right)\right]$$

§. 220. Aufgaben zur Uebung.*)

1) Es hat sich Jemand jährlich 50 fl. erspart und solche stets sogleich zu 4% angelegt; wie viel hatte er sich auf diese Weise in 25 Jahren erspart?

2) Es bezieht Jemand jährlich eine Rente von 600 fl.; wie hoch beläuft sich der Werth aller bezogenen Renten am Ende des 18ten Jahres, wenn 5procentige Zinsen in Rechnung gebracht werden?

---

*) Behufs der Zeitersparniß benutze man zur Bestimmung von log $(1{,}0p^n - 1)$ die am Ende befindliche Tabelle über die Werthe von $1{,}0p^n$.

3) Es wünscht Jemand 20 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von 700 fl. zu beziehen; welches Kapital hat er am Ende des 20ten Jahres zu zahlen, wenn der Zinsfuß zu $4\frac{1}{2}$% berechnet wird?

4) Wie groß ist der Werth einer jährlich zu Anfang des Jahres beziehbaren Rente von 450 fl. am Ende des 12ten Jahres, wenn 4procentige Zinsen berechnet werden?

5) Es bezog Jemand am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Rente, die er sogleich zu 4% auslieh, da sein Verdienst zu seinem Unterhalte ausreichte, und ersparte sich auf diese Weise in 18 Jahren 24363 fl. 4 kr.; wie groß war die jährliche Rente?

6) Ein Arbeiter legt von seinem Verdienste jährlich 120 fl. in die Sparkasse, welche ihm $3\frac{1}{2}$% vergütet; nach wie viel Jahren hat er sich dadurch 1752 fl. 14 kr. erspart?

7) Ein Gutsbesitzer will seine Besitzungen in einer Hagelassekuranz-Gesellschaft versichern. Welche Versicherungsprämie hat derselbe bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$% zu Anfang eines jeden Jahres zu entrichten, wenn der Werth der durch Hagel zerstörbaren Früchte zu 5500 fl. abgeschätzt und angenommen wird, daß alle 25 Jahre eine vollständige Zerstörung durch Hagelschlag stattfindet?

8) Es hat Jemand am Ende eines jeden zweiten Jahres 200 fl. gegen 4% ausgeliehen; wie hoch beläuft sich die ganze Summe am Ende des 16ten Jahres?

9) Es hat Jemand eine jährliche Rente von 800 fl. 10 Jahre lang zu beziehen; wie viel ist dieselbe baar werth, wenn 4% Zinsen in Rechnung gebracht werden?

10) Um einen Wald vollständig abzutreiben, bedarf es bei einem jährlichen Hieb von 1800 Klaftern 20 Jahre; wie viel macht der gegenwärtige Bestand aus, wenn der Zuwachs $2\frac{1}{4}$ Klafter auf 100 beträgt?

11) Wenn Jemand sein Vermögen, das 20000 fl. betrug und zu 5% auf Zinseszinsen ausgeliehen war, in 25 Jahren sammt Zinsen aufbrauchte; wie viel hatte derselbe durchschnittlich im Jahre verbraucht?

12) Um ein $4\frac{1}{2}$procentiges Staatsanlehen von 6 Millionen Gulden in 15 Jahren in gleichen Raten zu tilgen, ist jährlich wie viel abzutragen?

13) A hat von B 2000 fl. geliehen und versprochen, dieselben in 6 Jahresterminen heimzuzahlen. Wie viel beträgt jede Terminalzahlung, wenn die Zinsen und Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$% berechnet werden?

14) Der Ueberschuß der Einnahmen eines Staates beträgt jährlich 350000 fl. Man will denselben während der nächsten 20 Jahre dem Eisenbahnbaue zuwenden und deshalb eine $3\frac{1}{2}$-procentige Anleihe machen; wie hoch wird sich diese belaufen?

15) Es nimmt Jemand 20000 fl. auf und verspricht diese Schuld in 15 Jahresterminen, je am Ende des Jahres, zu tilgen. Wie viel beträgt die jährliche Heimzahlung, wenn der Zinsfuß des Kapitals zu $4\frac{1}{2}$%, der der Jahresleistung aber nur zu $4\frac{1}{4}$% berechnet wird?

16) A gab baar 30000 fl. und bezog dafür jährlich eine am Ende des Jahres fällige Rente von 1500 fl. Wie lang war er im Genusse derselben, wenn 4procentige Zinsen zu Grunde gelegt werden?

17) Nach wie viel Jahren wird ein Wald ganz abgetrieben sein, wenn der gegenwärtige Bestand 12753 Klafter, der Zuwachs jährlich $2\frac{1}{2}$% beträgt und am Ende eines jeden Jahres 1600 Klafter gefällt werden?

18) Eine Gemeinde hat 40000 fl. aufgenommen und dafür ihren Wald verpfändet, der jährlich 2500 fl. reinen Nutzen abwirft. Wie lang kann der Wald für das gegebene Kapital benutzt werden, wenn 5procentige Zinsen angesetzt werden?

19) A schuldet dem B 2600 fl. zu 4% und tilgt diese Schuld dadurch, daß er dem B eine 5 Morgen große Wiese zur Benutzung überläßt. Wie lang kann B von diesem Rechte Gebrauch machen, wenn der Ertrag eines Morgens der Wiese zu 55 fl. angeschlagen wird?

20) Behufs der Zehntablösung soll eine Gemeinde ein baares Kapital von 24000 fl. entrichten, oder, im Falle sie diese Baarzahlung nicht leisten kann, das Kapital zu 4% verzinsen. Die Gemeinde entschließt sich aber jährlich 1200 fl. an der Ablösungssumme abzutragen; nach wie viel Jahren wird sie den Zehnten abgelöst haben?

21) Es legt Jemand 60 fl. in eine Sparkasse, welche 3% Zinseszinsen vergütet, und vermehrt seine Einlage jährlich um 48 fl.; wie viel beträgt seine Ersparniß am Ende des 22ten Jahres?

22) A schuldet dem B 10000 fl. zu 4% verzinslich; er zahlt demselben aber am Ende eines jeden Jahres 1000 fl. ab. Wie viel ist er ihm nach Verfluß von 10 Jahren noch schuldig?

23) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 16840 Klftr., der Zuwachs 2%. Wenn nun am Ende eines jeden Jahres 1000 Klftr. geschlagen werden, wie groß ist dann der Bestand nach 12 Jahren?

24) A hat sein Vermögen von 28400 fl. zu 5% auf Zinseszinsen stehen, und nimmt davon zu seinem Unterhalte am Ende eines jeden Jahres 2500 fl. weg; wie groß wird sein Vermögen nach 12 Jahren sein?

25) Um sich ein Vermögen von 30000 fl. zu sammeln, legt Jemand sein gegenwärtiges Vermögen von 15000 fl. zu 4% auf Zinseszinsen an. Sein rentables Geschäft erlaubt ihm aber, daß er das ausstehende Kapital noch am Ende eines jeden Jahres durch eine Zulage von 500 fl. vermehrt. Nach wie viel Jahren wird er sich im Besitze des gewünschten Vermögens sehen?

26) Der Zuwachs eines Waldes beträgt $2\frac{4}{5}$%, sein gegenwärtiger Bestand 32500 Klafter. Wie viel Klafter dürfen am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden, damit der Bestand nach 10 Jahren noch 18700 Klafter betrage?

27) Was ist der gegenwärtige Werth einer am Ende eines jeden Jahres fälligen 4procentigen Rente von 2400 fl., wenn dieselbe 16 Jahre lang bezogen, aber erst am Ende des 5ten Jahres zum ersten Male entrichtet wird?

28) A hat dem B je am Ende des dritten Jahres 500 fl. zu entrichten; mit welcher Summe kann er den B baar befriedigen, wenn die Zahlung viermal zu geschehen hat und 4procentige Zinsen in Rechnung kommen?

29) Eine Gemeinde hat jährlich einen Zehnten im Betrage von 87 fl. zu entrichten; mit welchem Kapitale kann sie denselben ablösen, wenn $4\frac{1}{2}$procentige Zinsen berechnet werden?

30) Auf einem Grundstücke ruht die Verpflichtung, um ein Gebäude zu unterhalten, nach je 12 Jahren 250 fl. zu ent-

richten. Wie groß ist die Ablösungssumme bei einem Zinsansatze von $4\frac{1}{2}$%?

31) Ein Wald wirft nach 18 Jahren zum ersten Male und dann fortdauernd jährlich eine Rente von 2850 fl. ab; wie viel ist derselbe jetzt werth, wenn $4^1/_2$procentige Zinsen in Anschlag gebracht werden?

32) A schuldet dem B eine Summe und hat sich verbindlich gemacht, demselben während 10 Jahren am Ende eines jeden Jahres 400 fl. abzuzahlen. Eingetretene Verhältnisse machen es aber wünschenswerth, daß A schon nach 6 Jahren durch jährliche Entrichtung einer gleichen Summe die Schuld ablöse. Wie viel hat er dem B jährlich zu bezahlen, wenn dieser 5% Zinseszinsen berechnet?

33) Es sucht Jemand eine Jahresrente auf 12 Jahre, welche an baarem Werthe einer anderen Jahrrente von 600 fl., auf 16 Jahre beziehbar, gleichkommt; wie groß muß jene sein, wenn für beide 5procentige Zinsen in Rechnung gebracht werden?

34) Der Holzbestand eines Waldes wurde vor 15 Jahren zu 25500 Klftr. abgeschätzt. Wenn nun seither kein Holz geschlagen worden ist und derselbe durch einen gleichen Schlag jährlich innerhalb 8 Jahren ganz abgetrieben werden soll; wie viel Klafter beträgt alsdann der jährliche Hieb, wenn der Zuwachs zu 2% angenommen wird und der erste Hieb am Ende des 16ten Jahres nach der Abschätzung geschieht?

35) A hat dem B während 15 Jahren am Ende eines jeden Jahres 240 fl. zu entrichten. Nach Verfluß von 6 Jahren wünscht aber A den noch schuldenden Rest baar abzutragen; wie viel beträgt diese Baarzahlung, wenn stets 4procentige Zinsen angesetzt werden?

36) A hat an B eine Schuld in nachstehender Weise abzutragen: Nach 5 Jahren 800 fl., nach 2 weiteren Jahren 700 fl., wieder 3 Jahre später 500 fl. und vom Ende des 12ten Jahres an jährlich bis zum Ende des 20ten Jahres 400 fl. Wie groß war die baare Schuld, wenn überall 4% Zinseszinsen berechnet werden?

37) Zur Gründung eines Fabrikgeschäftes bildet sich eine Aktiengesellschaft mit einem Gesammtbeitrage von 150000 fl. Das Geschäft wirft jährlich einen Reinertrag von 13491 fl. 10 kr.

ab. Nach wie viel Jahren sehen sich die Aktionäre im Besitze ihres Einlagekapitals, wenn angenommen wird, daß sie hätten ihr Geld zu 4% anlegen können?

38) Eine Summe von 6 Millionen Gulden, zu 4% verzinslich, soll dadurch getilgt werden, daß jährlich außer den Zinsen noch $1\frac{1}{2}$% des ganzen Kapitals zur Tilgung verwendet werden; wann wird die Schuld getilgt sein?

39) Ein Kapital von 8000 fl. stand zu 5% eine gewisse Anzahl von Jahren auf Zinseszinsen und wurde dadurch um 10000 fl. größer als ein Kapital, welches man durch jährliche Anlegung von 450 fl. zu $4\frac{1}{2}$% während derselben Zeit erzielt hat. Wie lang waren beide Kapitalien angelegt?

40) A ist gegenwärtig 18 Jahre alt und zahlt, um sich von seinem 30ten Jahre an auf 20 Jahre eine jährliche, am Ende eines jeden Jahres fällige Rente von 2000 fl. zu erwerben, bis dahin am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe in eine Rentenanstalt. Wie groß ist diese Jahreseinlage, wenn der Zinsfuß zu $3\frac{1}{2}$% berechnet wird?

41) Um sich nach Verfluß von 15 Jahren eine 10 Jahre lang, am Ende eines jeden Jahres beziehbare Rente von 1000 fl. zu erwerben, hat man von jetzt an zu Anfang eines jeden Jahres welche Summe zu entrichten, wenn dem Zinsfuße 4% zu Grunde gelegt werden?

42) Es ist Jemand gegenwärtig 16 Jahre alt und will sich durch eine jährliche vorschüssige Einzahlung während der nächsten 15 Jahre eine von seinem 50ten Jahre an beginnende vorschüssige Rente von 1000 fl. auf 15 Jahre erwerben. Wie viel beträgt die jährliche Einzahlung, wenn die bei der Bank eingehenden Beträge zu $3\frac{1}{2}$%, die von ihr ausbezahlten aber zu 4% berechnet werden?

43) Eine nachschüssige Jahresrente r wird n Jahre lang bezogen; wie groß muß eine andere nachschüssige Jahresrente r' sein, damit sie jener an baarem Werthe gleich kommt und n' Jahre lang, aber erst vom Ende des $m$ten Jahres an bezogen werden kann, den Zinsfuß in beiden Fällen zu p% berechnet?

44) Eine 15 Jahre dauernde 4procentige nachschüssige Jahresrente von 1600 fl. soll in eine 5procentige von 20jähriger Dauer umgewandelt werden; wie groß wird diese?

45) Es soll eine 3procentige 18 Jahre dauernde nachschüssige Jahresrente von 2500 fl. in eine 25jährige zu gleichen Procenten umgewandelt werden; wie hoch beläuft sich diese?

46) Auf ein dem Verkaufe ausgesetztes Gut geschehen drei Gebote. A bietet eine je am Ende eines jeden Jahres während 15 Jahren zahlbare Summe von 3500 fl.; B 15000 fl. baar und während 12 Jahren eine je am Ende eines jeden Jahres zahlbare Summe von 2500 fl.; C 30000 fl. nach 6 Jahren, 5000 fl. drei Jahre später und dann während 10 Jahren am Ende eines jeden Jahres 1500 fl. Welches Gebot ist das vortheilhafteste und wie viel ist das Gebot eines jeden baar werth, wenn die Zinsen zu 4% berechnet werden?

47) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt k Klafter, jährlich, und zwar zu Anfang eines jeden Jahres sollen r Klafter geschlagen werden; wie groß ist der Bestand dieses Waldes unmittelbar nach der Fällung zu Anfang des nten Jahres, wenn der Zuwachs zu p% angenommen wird?

48) Die Gemeinde A hat die Verpflichtung der jedesmaligen Herstellung einer Brücke auf dem Eigenthume der Gemeinde B. Der Neubau erfolgt durchschnittlich nach je 38 Jahren und erfordert einen Kostenaufwand von 2000 fl. Die Gemeinde A wünscht nun diese Last entweder a) zu gleichen Theilen am Ende eines jeden Jahres abzutragen, oder b) dieselbe baar abzulösen; wie viel beträgt im ersten Falle die jährliche Zahlung, oder im zweiten die baare Ablösungssumme, wenn eben erst der letzte Neubau vollendet wurde und ein Zinsfuß von 4% zu Grunde gelegt wird?

49) Eine Schuld s ist in n auf einander folgenden Jahren zu gleichen Theilen am Ende eines jeden Jahres zu tilgen. Man wünscht aber dieselbe auf einmal im Ganzen abzutragen; wann wird dieses geschehen können, wenn p% in Anrechnung gebracht werden?

50) A hat von B ein Darlehen erhalten, welches er in der Weise zurückbezahlt, daß er während (n — 1) Jahren am Ende eines jeden Jahres die Summe r, am Ende des nten Jahres aber die Summe r′ bezahlt. Wie groß ist die Schuldsumme des A bei einem Zinsfuß = p?

51) A hat sich bei dem Baue einer Eisenbahn mit 6 Aktien à 250 fl. betheiligt und am Ende eines jeden Jahres während 3 Jahren 500 fl. bezahlt. Nach 5 Jahren war der Bau beendet und der Staat zog nun die ganze Bahn gegen Rückerstattung der Kosten an sich. Wie viel hat A dadurch verloren, wenn dem Zinsfuße 4% zu Grunde gelegt werden?

52) A hat an B n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres die Summe r zu entrichten. B wünscht aber während derselben Zeit nur jedesmal nach Verfluß von m Jahren die entsprechende Summe zu erheben; wie groß muß diese Terminalzahlung sein, wenn der Zinsfuß zu p% berechnet wird?

53) Es will Jemand am Anfang eines jeden Jahres n Jahre nach einander eine gewisse Summe r an eine Bank entrichten, um sich auf diese Weise eine vom mten Jahre nach der letzten Einzahlung beginnende vorschüssige Jahresrente r′ auf n′ Jahre zu erwerben. Wie groß ist jene Jahresleistung r, wenn die Bank die Einnahmen zu p%, die Ausgaben aber zu p′% verrechnet?

54) Es hat Jemand eine nachschüssige Jahresrente von 1500 fl., welche zu 4% berechnet wird, auf 25 Jahre zu beziehen und sieht sich veranlaßt, dieselbe in eine Rente von gleicher Dauer umzuändern, welche aber zu $4\frac{1}{2}$% berechnet wird; wie groß ist diese?

55) Es hat Jemand ein Vermögen von 2100 fl. zu 4% ausgeliehen und legt die Zinsen am Ende eines jeden Jahres in eine Sparkasse, welche 3% Zinseszinsen berechnet. Am Ende des vierten Jahres nimmt er aus der Sparkasse 250 fl. heraus, da er Gelegenheit hat, diese Summe zu 5% auszuleihen, legt aber, wie bisher, die Zinsen des ursprünglichen Kapitales und der ausgeliehenen 250 fl. jährlich in die Sparkasse. Welches ist der Stand seines Vermögens nach Verfluß von 20 Jahren?

56) Es will Jemand ein Kapital zur Unterhaltung verschiedener Gebäude und etwaigem Wiederaufbau derselben stiften. Die Unterhaltung der Gebäude erfordert einen jährlichen Aufwand von 50 fl. und für Hauptreparaturen außerdem alle 8 Jahre 250 fl.; ihre Dauer ist noch auf 32 Jahre abgeschätzt. Der Ueberschlag für den Neubau, nach Abzug des Ertrages aus dem Altbau, ist auf 42000 fl. berechnet und deren Dauer auf 200

Jahre abgeschätzt. Wie hoch muß sich das Stiftungskapital belaufen, wenn von dem Neubaue an jährlich 100 fl. für die Unterhaltung überhaupt und für alle Fälle 4procentige Zinsen in Rechnung gebracht werden?

57) A kauft eine 4procentige Rente von 2000 fl. auf 20 Jahre unter der Bedingung, daß wenn der Zinsfuß sich ändern sollte, auch die Rente eine Umwandlung erleide und daß, im Falle A vor Ablauf der Zeit stirbt, der Werth der Restrenten an seine Hinterbliebenen auszuzahlen sei. Nach 8 Jahren steigt der Zinsfuß um $\frac{1}{2}$% und 5 Jahre darnach stirbt A. Man soll nun berechnen: 1) wie groß die ursprüngliche Kapitalanlage des A war, 2) wie hoch sich die Rente vom Ende des achten Jahres an beläuft und 3) welche Summe den Erben auszuzahlen ist.

58) A schuldet dem B eine Summe = S und verzinset dieselbe zum Zinsfuße p. Glückliche Geschäfte gestatten dem A nicht allein jährlich die Zinsen zu entrichten, sondern noch am Ende eines jeden Jahres einen Betrag a und noch so viel zu leisten, als durch diese Heimzahlung jährlich die Zinsen vom ausstehenden Kapitale weniger betragen als im Anfange. Nach wie viel Jahren hat A die Schuld abgetragen?

59) Die Dauer eines Gebäudes, für das jetzige, sowie für alle künftigen Neubauten, ist auf 100 Jahre und der Aufwand für den Neubau auf 8540 fl. abgeschätzt; wie groß ist der Kapitalanschlag der Baulast, wenn die Zinsen des Reädificationsbetrages*) zu $2\frac{1}{2}$% und die des Kapitals zu 5% berechnet werden?

60) Ein Pfarrhaus, das neu aufzuführen 8000 fl. kostet und dann von 100jähriger Dauer ist, muß schon nach 20 Jahren neu erbaut werden. Welche Entschädigung hat der Uebernehmer der Baulast in diesem Falle jetzt anzusprechen, wenn die Zinsen des Entschädigungskapitales, sowie des dem Reädificationsbetrage entsprechenden Kapitales zu 5%, die Zinseszinsen, wie beim Reädificationsbetrage selbst, aber zu $2\frac{1}{2}$% berechnet werden?

---

*) d. h. der Betrag, welcher jährlich abgetragen werden muß, um während des Bestehens eines Baues die Summe für den Neubau zu erzielen.

61) Die Dauer eines Gebäudes wird gegenwärtig auf 50 Jahre abgeschätzt, die Unterhaltungskosten desselben betragen jährlich 40 fl., die des zukünftigen aber nur 30 fl.; wie groß ist der Kapitalanschlag zur Bestreitung der Reparaturen, wenn die Zinsen des Unterhaltungsaufwandes des Neubaues zu 5% und die Zinsen und Zinseszinsen des Mehraufwandes des Altbaues zu 4% berechnet werden?

62) Der jährliche Unterhaltungsaufwand für ein Gebäude beträgt 35 fl. 12 kr., der für das zukünftige aber 47 fl. 28 kr.; wie groß ist der Kapitalanschlag der Reparaturen, wenn die Dauer des jetzigen Gebäudes auf 35 Jahre abgeschätzt ist, die den Unterhaltungskosten bezüglich jetzt und nach 35 Jahren entsprechenden Baarwerthe zu 5% berechnet werden und der dem späteren Mehraufwande entsprechende Kapitalanschlag von jetzt an bis zu seiner Benützung nur 4procentige Zinsen trägt?

63) Den Kapitalanschlag der Baulast für ein Gebäude zu berechnen, wenn die Dauer des jetzigen Gebäudes auf 30 Jahre, für die Zukunft aber auf 110 Jahre und der Aufwand für den Neubau auf 7622 fl. abgeschätzt wurde, die Summe zu 5% und die Zinseszinsen zu $2\frac{1}{2}$% berechnet werden?

64) Den Kapitalanschlag der Baulast für ein Gebäude zu bestimmen, wenn dessen Dauer auf 200 Jahre, die der künftigen aber nur auf 150 Jahre abgeschätzt ist, die Kosten des Neubaues 10500 fl. betragen und 5% Zinsen, $2\frac{1}{2}$% Zinseszinsen berechnet werden.

65) Ein Wald wird am Ende des zehnten Jahres haubar und wirft von da an 12 Jahre lang eine endschüssige Rente von 10000 fl. ab. Wegen veränderter Kultur erzielt man aber von nun an dauernd einen jährlichen Ertrag von 12000 fl. Es bietet sich eine Gelegenheit dar, diesen Wald sogleich zu verkaufen; wie viel ist er baar werth, wenn 4% Zinsen und Zinseszinsen berechnet werden?

66) Von einem Walde können am Ende des dreizehnten Jahres zum ersten Male und dann 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres für 400 fl. Holz geschlagen werden, darnach muß derselbe aber 10 Jahre unbenutzt bleiben und erst vom Ende des elften Jahres an liefert er wieder 15 Jahre hindurch jährlich

einen Reinertrag von 600 fl., hierauf bleibt er 12 Jahre lang unbenutzt und liefert alsdann dauernd jährlich einen Ertrag von 300 fl. Was ist der jetzige Werth dieses Waldes, wenn man dem Zinsfuße 4procentige Zinsen zu Grunde legt?

67) Was ist ein Wald baar werth, der nach n Jahren haubar wird und hierauf dauernd jährlich einen Reinertrag = r abwirft, wenn dem Zinsfuße p procentige Zinsen zu Grunde gelegt werden?

68) Ein Wald wird zu k Klafter abgeschätzt. Zu Anfang eines jeden Jahres sollen r Klafter geschlagen werden; wie groß ist der Bestand nach dem nten Hiebe, wenn der jährliche Zuwachs zu p% angenommen wird?

69) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes wird zu 26500 Klafter abgeschätzt. Derselbe ist durch 10 Hiebe, welche zu Anfang eines jeden Jahres vorgenommen werden, auf den Bestand von 12000 Klafter zurückzuführen; wie viel muß man jährlich schlagen, wenn der Zuwachs 2% beträgt?

70) In einem Walde, der gegenwärtig zu 30000 Klafter abgeschätzt ist, soll zu Anfang eines jeden Jahres 2500 Klafter geschlagen werden; nach wie viel Hieben wird der Wald abgetrieben sein, wenn der Zuwachs $1\frac{1}{2}$% beträgt?

71) Ein Wald wirft nach n Jahren, d. h. vom Anfange des (n + 1)ten Jahres an, n Jahre lang die Summe r, dann n Jahre lang nichts, hierauf wieder n Jahre lang die Summe r u. s. w. ab; wie viel ist derselbe baar werth bei p procentigem Zinsfuße?

72) Es bezieht Jemand n Jahre lang eine endschüssige Rente, welche nach einer arithmetischen Progression steigt, so daß der Reihe nach r, 2r, 3r, . . . nr die einzelnen Renten sind. Wie groß ist der Baarwerth k dieser Rente, wenn der Zinsfuß zu p% gerechnet wird?

73) Wenn Jemand eine halbjährliche Besoldung von 500 fl. bezieht, die er sogleich zu 4% in der Weise anlegt, daß ihm auch halbjährlich die Zinsen zugeschlagen werden, so hat er sich nach 12 Jahren wie viel erspart?

74) A hat dem B nach je 3 Jahren während 24 Jahren hindurch 400 fl. zu zahlen; wie viel ist diese Schuld bei 5% Disconto baar werth?

75) Wie groß ist der baare Werth einer am Ende eines jeden Jahres während n Jahren hindurch zu entrichtenden Rente r, wenn dieselbe halbjährlich verzinst wird?

76) B kann dem A eine Schuldsumme von 35000 fl. entweder in der Weise abtragen, daß er während 15 Jahren jährlich am Ende eines jeden Jahres die gleiche Summe bezahlt, oder halbjährlich gleichviel entrichtet, aber auch halbjährliche Verzinsung in Rechnung bringt. Welches ist für B die vortheilhafteste Art der Heimzahlung, wenn der Zinsfuß in beiden Fällen zu 4% angenommen wird?

77) Ein Wald liefere im 60jährigen Umtriebe einen jährlichen Reinertrag von

800	fl.	in	der	ersten	Periode,
900	„	„	„	zweiten	„
1050	„	„	„	dritten	„
1200	„	„	„	vierten	„

Nach Ablauf des ersten Umtriebes betrage fortdauernd der jährliche Ertrag 400 fl. Was ist der gegenwärtige Werth dieses Waldes, bei Berechnung 4procentiger Zinseszinsen?

78) Die ursprünglichen Kulturkosten eines Waldes betrugen 20 fl., der jährliche Aufwand an Steuern 1 fl. 12 kr. Der gegenwärtig 50jährige Bestand ergab im 30ten Jahre einen Durchforstungsertrag von 120 fl. und läßt im 60ten Jahre einen solchen von 200 fl. und im 90ten Jahre einen Haubarkeitsertrag von 1500 fl. erwarten. Wie groß ist der baare Werth dieses Waldes, wenn bei den folgenden 90jährigen Umtrieben die Einnahmen und Ausgaben übereinstimmend mit solchen beim ersten Umtriebe und 4procentige Zinsen berechnet werden?

79) Ein Buchenhochwalddistrikt wird auf 120jährigen Umtrieb bewirthschaftet und liefert während der ersten Umtriebszeit nachstehende reine Einnahmen:

am	Ende	des	30ten	Jahres	650	fl.
„	„	„	45ten	„	1000	„
„	„	„	60ten	„	1350	„
„	„	„	75ten	„	1700	„
„	„	„	100ten	„	2000	„
„	„	„	110ten	„	3300	„

und während der 10 letzten Jahre jährlich 2400 fl. Die nachfolgenden Umtriebe lassen dieselben reinen Einnahmen erwarten. Was ist dieser District gegenwärtig werth, da er in seinem 70ten Jahre steht und 4procentige Zinsen berechnet werden?

80) Ein Forstdistrikt besteht aus drei Abtheilungen, nämlich:

1) aus einem Fichtenbestande im 90jährigen Umtriebe,
2) = = Eichenbestande = 160 = =
3) = = Mittelwalde = 30 = =

Denselben entsprechen folgende Erträge:

Erste Abtheilung.

In der 1. Periode von 18 Jahren jährlich	140	fl.
= = 2. = = 18 = =	160	=
= = 3. = = 18 = =	200	=
= = 4. = = 18 = =	250	=
und von da an dauernd jährlich	280	=

Zweite Abtheilung.

In der 1. Periode von 30 Jahren jährlich	450	fl.
= = 2. = = 30 = =	400	=
= = 3. = = 30 = =	420	=
= = 4. = = 30 = =	460	=
= = 5. = = 30 = =	500	=
und von da an dauernd jährlich	550	=

Dritte Abtheilung.

α) Aus dem Oberholze:

Während des 1. Umtriebes jährlich	120	fl.
und von da an dauernd =	150	fl.

β) Aus dem Unterholze:

Während des 1. Umtriebes jährlich	50	fl.
= = 2. = =	60	=
= = 3. = =	85	=
und von da an dauernd =	110	=

Die jährlichen Ausgaben betragen:

1) für Kulturen, Auspflanzungen, Unterhaltung der Wege rc.	80	fl.
2) für Steuern	14	=
3) Bewirthschaftungs= und Hutkosten	200	=

Was ist der Werth dieses Distrikts zu Anfange des ersten Umtriebes bei Berechnung 4procentiger Zinsen?

81) Ein Wald wird im 110jährigen Umtriebe bewirthschaftet. Was ist derselbe gegenwärtig werth, da er in seinem 60ten Jahre steht, wenn folgende Einnahmen und Ausgaben bei 3procentigem Zinsfuße in Rechnung gebracht werden:

A. Einnahmen.

1)	Vom Ende des 25ten Jahres an (hier zum ersten Male) während 10 aufeinander folgenden Jahren jährlich	1500 fl.
2)	Vom Ende des 45ten Jahres während 15 aufeinander folgenden Jahren jährlich	1800 „
3)	Am Ende des 70ten Jahres	4300 „
4)	Vom Ende des 80ten Jahres an während 10 aufeinander folgenden Jahren jährlich	2000 „
5)	Am Ende der Umtriebszeit einen Haubarkeitsertrag von	15400 „
6)	Die folgenden Umtriebe lassen dieselben Einnahmen erwarten.	

B. Ausgaben.

1)	Für Steuern, Hutkosten u. s. w. jährlich	315 fl.
2)	Für Unterhaltung der Wege jährlich	66 „
3)	Für die Anlage neuer Wege am Ende des ersten Umtriebes	220 „

82) Ein Wald wird zum Theil als Hochwald in 110jährigem, theils als Niederwald in 30jährigem Umtriebe bewirthschaftet. Der Taxation zufolge stehen in Aussicht:

A. Einnahmen.

1) Aus dem Hochwalde:

a)	Während der ersten 15 Jahre jährlich	1500 fl.
b)	„ „ folgenden 20 Jahre jährlich	2000 „
c)	„ „ „ 25 „ „	2500 „
d)	„ aller folgenden Jahre „	3000 „

2) Aus dem Niederwalde:

a)	Während der ersten 10 Jahre jährlich	1200 fl.
b)	„ „ folgenden 10 Jahre jährlich	1400 „

c) Während der folgenden 10 Jahre jährlich 1600 fl.
d) " aller folgenden Jahre " 1700 "

B. Ausgaben.

1) Für Kulturkosten:

a) Während der ersten 5 Jahre jährlich 200 fl.
b) " " folgenden 10 Jahre jährlich 150 "
c) " aller folgenden Jahre " 100 "

2) Für Hutkosten u. dergl. jährlich 200 "
3) " Erhaltung der Wege " 180 "
4) " Steuern " 36 "

Was ist der Werth dieses Waldes im 25ten Jahre seines Bestandes, wenn durchgängig 3proc. Zinsen berechnet werden?

Tabellen

über den

zukünftigen und gegenwärtigen Werth der Kapitaleinheit.

I. Werth von $1,0p^n$.

n	p = 2	p = 2½	p = 3	p = 3½
1	1,0200000	1,0250000	1,0300000	1,0350000
2	1,0404000	1,0506250	1,0609000	1,0712250
3	1,0612080	1,0768906	1,0927270	1,1087178
4	1,0824321	1,1038128	1,1255088	1,1475230
5	1,1040808	1,1314082	1,1592740	1,1876863
6	1,1261624	1,1596934	1,1940522	1,2292553
7	1,1486856	1,1886857	1,2298738	1,2722792
8	1,1716593	1,2184028	1,2667700	1,3168090
9	1,1950925	1.2488629	1,3047731	1,3628973
10	1,2189944	1,2800845	1,3439163	1,4105987
11	1,2433743	1,3120866	1,3842338	1,4599697
12	1,2682417	1,3448888	1,4257608	1,5110686
13	1,2936066	1,3785110	1,4685337	1,5639560
14	1,3194787	1,4129738	1,5125897	1,6186945
15	1,3458683	1,4482981	1,5579674	1,6753488
16	1,3727857	1,4845056	1,6047064	1,7339860
17	1,4002414	1,5216182	1,6528476	1,7946755
18	1,4282462	1,5596587	1,7024330	1,8574891
19	1,4568111	1,5986501	1,7535060	1,9225013
20	1,4859473	1,6386164	1,8061112	1,9897888
21	1,5156663	1,6795818	1,8602945	2,0594314
22	1,5459796	1,7215713	1,9161034	2,1315115
23	1,5768992	1,7646106	1,9735865	2,2061144
24	1,6084372	1,8087259	2,0327941	2,2833284
25	1,6406059	1,8539440	2,0937779	2,3632449
26	1,6734181	1,9002927	2,1565912	2,4459585
27	1,7068864	1,9478000	2,2212890	2,5315671
28	1,7410242	1,9964950	2,2879276	2,6201719
29	1,7758446	2,0464073	2,3565655	2,7118779
30	1,8113615	2,0975675	2,4272624	2,8067937
31	1,8475888	2,1500067	2,5000803	2,9050314
32	1,8845405	2,2037569	2,5750827	3,0067075
33	1,9222314	2,2588508	2,6523352	3,1119423
34	1,9606760	2,3153221	2,7319052	3,2208603
35	1,9998895	2,3732051	2,8138624	3,3335904
36	2,0398873	2,4325353	2,8982783	3,4502661
37	2,0806850	2,4933486	2,9852266	3,5710254
38	2,1222987	2,5556824	3,0747834	3,6960113
39	2,1647447	2,6195744	3,1670269	3,8253717
40	2,2080396	2,6850638	3,2620377	3,9592597
41	2,2522004	2,7521904	3,3598989	4,0978338
42	2,2972444	2,8209951	3,4606958	4,2412579
43	2,3431893	2,8915200	3,5645167	4,3897020
44	2,3900531	2,9638080	3,6714522	4,5433415
45	2,4378542	3,0379032	3,7815958	4,7023585
46	2,4866112	3,1138508	3,8950437	4,8669411
47	2,5363435	3,1916971	4,0118950	5,0372840
48	2,5870703	3,2714895	4,1322518	5,2135889
49	2,6388117	3,3532768	4,2562194	5,3960645
50	2,6915880	3,4371087	4,3839060	5,5849268

I. Werth von 1,0p^n.

n	p = 4	p = 4½	p = 5	p = 6
1	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0600000
2	1,0816000	1,0920250	1,1025000	1,1236000
3	1,1248640	1,1411661	1,1576250	1,1910160
4	1,1698585	1,1925186	1,2155062	1,2624769
5	1,2166529	1,2461819	1,2762815	1,3382255
6	1,2653190	1,3022601	1,3400956	1,4185191
7	1,3159317	1,3608618	1,4071004	1,5036302
8	1,3685690	1,4221006	1,4774554	1,5938480
9	1,4233118	1,4860951	1,5513282	1,6894789
10	1,4802442	1,5529694	1,6288946	1,7908476
11	1,5394540	1,6228530	1,7103393	1,8982985
12	1,6010322	1,6958814	1,7958563	2,0121964
13	1,6650735	1,7721960	1,8856491	2,1329282
14	1,7316764	1,8519449	1,9799315	2,2609039
15	1,8009435	1,9352824	2,0789281	2,3965581
16	1,8729812	2,0223701	2,1828745	2,5403516
17	1,9479004	2,1133768	2,2920183	2,6927727
18	2,0258165	2,2084787	2,4066192	2,8543391
19	2,1068491	2,3078603	2,5269501	3,0255995
20	2,1911231	2,4117140	2,6532977	3,2071354
21	2,2787680	2,5202411	2,7859625	3,3995636
22	2,3699187	2,6336520	2,9252607	3,6035374
23	2,4647155	2,7521663	3,0715237	3,8197496
24	2,5633041	2,8760138	3,2250999	4,0489346
25	2,6658363	3,0054344	3,3863549	4,2918707
26	2,7724697	3,1406790	3,5556726	4,5493829
27	2,8833685	3,2820095	3,7334563	4,8223459
28	2,9987033	3,4296999	3,9201291	5,1116866
29	3,1186514	3,5840364	4,1161355	5,4183878
30	3,2433975	3,7453181	4,3219423	5,7434911
31	3,3731334	3,9138574	4,5380394	6,0881006
32	3,5080587	4,0899810	4,7649414	6,4533866
33	3,6483811	4,2740301	5,0031885	6,8405898
34	3,7943163	4,4663615	5,2533479	7,2510252
35	3,9460889	4,6673478	5,5160153	7,6860867
36	4,1039325	4,8773784	5,7918161	8,1472520
37	4,2680898	5,0968604	6,0814069	8,6360871
38	4,4388134	5,3262192	6,3854772	9,1542523
39	4,6163659	5,5658990	6,7047511	9,7035074
40	4,8010206	5,8163645	7,0399887	10,2857179
41	4,9930614	6,0781009	7,3919881	10,9028610
42	5,1927839	6,3516154	7,7615875	11,5570326
43	5,4004952	6,6374381	8,1496669	12,2504546
44	5,6165150	6,9361228	8,5571502	12,9854819
45	5,8411756	7,2482484	8,9850077	13,7646108
46	6,0748227	7,5744196	9,4342581	14,5904874
47	6,3178156	7,9152684	9,9059710	15,4659167
48	6,5705282	8,2714555	10,4012696	16,3938717
49	6,8333493	8,6436710	10,9213331	17,3775040
50	7,1066833	9,0326362	11,4673997	18,4201542

I. Werth von $1{,}0p^n$.

n	p = 2	p = $2^1/_2$	p = 3	p = $3^1/_2$
51	2,7454197	3,5230364	4,5154231	5,7803992
52	2,8003281	3,6111123	4,6508858	5,9827132
53	2,8563347	3,7013901	4,7904124	6,1921082
54	2,9134614	3,7939249	4,9341248	6,4088320
55	2,9717306	3,8887730	5,0821485	6,6331411
56	3,0311652	3,9859923	5,2346130	6,8653010
57	3,0917885	4,0856421	5,3916513	7,1055866
58	3,1536243	4,1877832	5,5534009	7,3542821
69	3,2166968	4,2924778	5,7200030	7,6116820
60	3,2810307	4,3997897	5,8916031	7,8780909
61	3,3466514	4,5097844	6,0683511	8,1538240
62	3,4135844	4,6225291	6,2504017	8,4392079
63	3,4818561	4,7380923	6,4379137	8,7345802
64	3,5514932	4,8565446	6,6310511	8,0402905
65	3,6225231	4,9779582	6,8299827	9,3567006
66	3,6949735	5,1024072	7,0348822	9,6841852
67	3,7688730	5,2299673	7,2459286	10,0231316
68	3,8442505	5,3607165	7,4633065	10,3739412
69	3,9211355	5,4947344	7,6872057	10,7370292
70	3,9995582	5,6321028	7,9178219	11,1128252
71	4,0795493	5,7729054	8,1553565	11,5017741
72	4,1611403	5,9172280	8,4000172	11,9043362
73	4,2443631	6,0651587	8,6520177	12,3209880
74	4,3292504	6,2167877	8,9115783	12,7522225
75	4,4158354	6,3722074	9,1789256	13,1985503
76	4,5041521	6,5315126	9,4542934	13,6604996
77	4,5942352	6,6948004	9,7379222	14,1386171
78	4,6861199	6,8621704	10,0300599	14,6334687
79	4,7798423	7,0337246	10,3309617	15,1456401
80	4,8754391	7,2095678	10,6408905	15,6757375
81	4,9729479	7,3898070	10,9601172	16,2243883
82	5,0724068	7,5745521	11,2889207	16,7922419
83	5,1738550	7,7639159	11,6275884	17,3799704
84	5,2773321	7,9580138	11,9764160	17,9882693
85	5,3828787	8,1569642	12,3357085	18,6178588
86	5,4905363	8,3608883	12,7057798	19,2694838
87	5,6003470	8,5699105	13,0869532	19,9439158
88	5,7123540	8,7841583	13,4795617	20,6419528
89	5,8266011	9,0037622	13,8839486	21,3644212
90	5,9431331	9,2288563	14,3004671	22,1121759
91	6,0619957	9,4595777	14,7294811	22,8861021
92	6,1832357	9,6960671	15,1713655	23,6871156
93	6,3069004	9,9384688	15,6265065	24,5161647
94	6,4330384	10,1869305	16,0953017	25,3742304
95	6,5616991	10,4416038	16,5781607	26,2623285
96	6,6929331	10,7026439	17,0755055	27,1815100
97	6,8267918	10,9702100	17,5877707	28,1328629
98	6,9633276	11,2444652	18,1154038	29,1175131
99	7,1025942	11,5255769	18,6588660	30,1366260
100	7,2446461	11,8137163	19,2186319	31,1914079

I. Werth von $1,0p^n$.

n	p = 4	p = 4½	p = 5	p = 6
51	7,3909506	9,4391049	12,0407697	19,5253635
52	7,6865887	9,8638646	12,6428082	20,6968853
53	7,9940522	10,3077385	13,2749486	21,9386984
54	8,3138143	10,7715867	13,9386961	23,2550203
55	8,6463669	11,2563081	14,6356309	24,6503215
56	8,9922215	11,7628420	15,3674124	26,1293408
57	9,3519104	12,2921699	16,1357830	27,6971013
58	9,7259868	12,8453175	16,9425722	29,3589274
59	10,1150263	13,4233568	17,7897008	31,1204630
60	10,5196274	14,0274079	18,6791858	32,9876908
61	10,9404125	14,6586412	19,6131451	34,9669523
62	11,3780290	15,3182801	20,5938024	37,0649694
63	11,8331501	16,0076027	21,6234925	39,2888676
64	12,3064761	16,7279448	22,7046671	41,6461996
65	12,7987352	17,4807023	23,8399005	44,1449716
66	13,3106846	18,2673340	25,0318955	46,7936699
67	13,8431120	19,0893640	26,2834903	49,6012901
68	14,3968364	19,9483854	27,5976648	52,5773675
69	14,9727099	20,8460627	28,9775481	55,7320096
70	15,5716183	21,7841355	30,4264255	59,0759301
71	16,1944830	22,7644216	31,9477468	62,6204859
72	16,8422624	23,7888206	33,5451341	66,3777151
73	17,5159529	24,8593175	35,2223908	70,3603780
74	18,2165910	25,9779868	36,9835104	74,5820007
75	18,9452546	27,1469962	38,8326859	79,0569207
76	19,7030648	28,3686111	40,7743202	83,8003360
77	20,4911874	29,6451986	42,8130362	88,8283561
78	21,3108349	30,9792325	44,9536880	94,1580575
79	22,1632683	32,3732980	47,2013724	99,8075410
80	23,0497990	33,8300964	49,5614410	105,7959934
81	23,9717910	35,3524507	52,0395131	112,1437530
82	24,9306626	36,9433110	54,6414887	118,8723782
83	25,9278891	38,6057600	57,3735632	126,0047209
84	26,9650047	40,3430192	60,2422413	133,5650042
85	28,0436049	42,1584551	63,2543534	141,5789044
86	29,1653491	44,0555856	66,4170711	150,0736387
87	30,3319631	46,0380869	69,7379246	159,0780570
88	31,5452416	48,1098008	73,2248209	168,6227405
89	32,8070512	50,2747419	76,8860619	178,7401049
90	34,1193333	52,5371052	80,7303650	189,4645112
91	35,4841066	54,9012750	84,7668833	200,8323819
92	36,9034709	57,3718324	89,0052274	212,8823248
93	38,3796097	59,9535648	93,4554888	225,6552643
94	39,9147941	62,6514752	98,1282632	239,1945801
95	41,5113859	65,4707916	103,0346764	253,5462549
96	43,1718413	68,4169773	108,1864102	268,7590302
97	44,8987150	71,4957412	113,5957307	284,8845720
98	46,6946636	74,7130496	119,2755173	301,9776464
99	48,5624501	78,0751368	125,2392931	320,0963052
100	50,5049481	81,5885180	131,5012578	339,3020835

II. Werth von $\frac{1}{1{,}0p^n}$.

n	p = 2	p = 2½	p = 3	p = 3½
1	0,9803922	0,9756098	0,9708738	0,9661836
2	0,9611688	0,9518144	0,9425959	0,9335107
3	0,9423223	0,9285994	0,9151417	0,9019427
4	0,9238454	0,9059506	0,8884870	0,8714422
5	0,9057308	0,8838543	0,8626088	0,8419732
6	0,8879714	0,8622969	0,8374843	0,8135006
7	0,8705602	0,8412652	0,8130915	0,7859910
8	0,8534904	0,8207466	0,7894092	0,7594116
9	0,8367553	0,8007284	0,7664167	0,7337310
10	0,8203483	0,7811984	0,7440939	0,7089188
11	0,8042630	0,7621448	0,7224213	0,6819457
12	0,7884932	0,7435559	0,7013799	0,6617833
13	0,7730325	0,7254204	0,6809513	0,6394042
14	0,7578750	0,7077272	0,6611178	0,6177818
15	0,7430147	0,6904656	0,6418619	0,5968906
16	0,7284458	0,6736249	0,6231669	0,5767059
17	0,7141626	0,6571951	0,6050164	0,5572038
18	0,7001594	0,6411659	0,5873946	0,5383611
19	0,6864308	0,6255277	0,5702860	0,5201557
20	0,6729713	0,6102709	0,5536758	0,5025659
21	0,6597758	0,5953863	0,5375493	0,4855709
22	0,6468390	0,5808647	0,5218925	0,4691506
23	0,6341559	0,5666972	0,5066917	0,4532856
24	0,6217215	0,5528754	0,4919337	0,4379571
25	0,6095309	0,5393906	0,4776056	0,4231470
26	0,5975793	0,5262347	0,4636947	0,4088377
27	0,5858620	0,5133997	0,4501891	0,3950122
28	0,5743746	0,5008778	0,4370768	0,3816543
29	0,5631123	0,4886613	0,4243464	0,3687482
30	0,5520709	0,4767127	0,4119868	0,3562784
31	0,5412460	0,4651148	0,3999871	0,3442303
32	0,5306333	0,4537706	0,3883370	0,3325897
33	0,5202287	0,4427030	0,3770262	0,3213427
34	0,5100282	0,4319053	0,3660449	0,3104761
35	0,5000276	0,4213711	0,3553834	0,2999769
36	0,4902231	0,4110937	0,3450324	0,2898327
37	0,4806109	0,4010670	0,3349829	0,2800316
38	0,4711872	0,3912849	0,3252262	0,2705619
39	0,4619482	0,3817414	0,3157535	0,2614125
40	0,4528904	0,3724306	0,3065568	0,2525725
41	0,4440102	0,3633470	0,2976280	0,2440314
42	0,4353041	0,3544848	0,2889592	0,2357791
43	0,4267688	0,3458389	0,2805429	0,2278059
44	0,4184007	0,3374038	0,2723718	0,2201023
45	0,4101968	0,3291744	0,2644386	0,2126592
46	0,4021537	0,3211458	0,2567365	0,2054679
47	0,3942684	0,3133129	0,2492588	0,1985197
48	0,3865376	0,3056712	0,2419988	0,1918065
49	0,3789584	0,2982158	0,2349503	0,1853202
50	0,3715279	0,2909422	0,2281071	0,1790534

II. Werth von $\frac{1}{1{,}0p^n}$.

n	p = 4	p = 4½	p = 5	p = 6
1	0,9615385	0,9569378	0,9523810	0,9433962
2	0,9245562	0,9157300	0,9070295	0,8899964
3	0,8889964	0,8762966	0,8638376	0,8396193
4	0,8548042	0,8385613	0,8227025	0,7920937
5	0,8219271	0,8024510	0,7835262	0,7472582
6	0,7903145	0,7678957	0,7462154	0,7049605
7	0,7599178	0,7348285	0,7106813	0,6650571
8	0,7306902	0,7031851	0,6768394	0,6274124
9	0,7025867	0,6729044	0,6446089	0,5918985
10	0,6755642	0,6439277	0,6139133	0,5583948
11	0,6495809	0,6161987	0,5846793	0,5267875
12	0,6245970	0,5896639	0,5568374	0,4969694
13	0,6005741	0,5642716	0,5303214	0,4688390
14	0,5774751	0,5399729	0,5050680	0,4423010
15	0,5552645	0,5167204	0,4810171	0,4172651
16	0,5339082	0,4944693	0,4581115	0,3936463
17	0,5133732	0,4731761	0,4362967	0,3713644
18	0,4936281	0,4528001	0,4155207	0,3503438
19	0,4746424	0,4333018	0,3957340	0,3305130
20	0,4563869	0,4146429	0,3768895	0,3118047
21	0,4388336	0,3967874	0,3589424	0,2941554
22	0,4219554	0,3797009	0,3418499	0,2775051
23	0,4057263	0,3633501	0,3255713	0,2617973
24	0,3901215	0,3477035	0,3100679	0,2469785
25	0,3751168	0,3327306	0,2953028	0,2329986
26	0,3606892	0,3184025	0,2812407	0,2198100
27	0,3468166	0,3046914	0,2678483	0,2073680
28	0,3334775	0,2915707	0,2550936	0,1956301
29	0,3206514	0,2790150	0,2429463	0,1845567
30	0,3083187	0,2670000	0,2313774	0,1741101
31	0,2964603	0,2555024	0,2203595	0,1642548
32	0,2850579	0,2444999	0,2098662	0,1549574
33	0,2740942	0,2339712	0,1998725	0,1461862
34	0,2635521	0,2238959	0,1903548	0,1379115
35	0,2534155	0,2142544	0,1812903	0,1301052
36	0,2436687	0,2050282	0,1726574	0,1227408
37	0,2342968	0,1961992	0,1644356	0,1157932
38	0,2252854	0,1877504	0,1566054	0,1092388
39	0,2166206	0,1796655	0,1491480	0,1030555
40	0,2082890	0,1719287	0,1420457	0,0972222
41	0,2002779	0,1645251	0,1352816	0,0917190
42	0,1925749	0,1574403	0,1288396	0,0865274
43	0,1851682	0,1506605	0,1227044	0,0816296
44	0,1780463	0,1441728	0,1168613	0,0770091
45	0,1711984	0,1379644	0,1112965	0,0726501
46	0,1646139	0,1320233	0,1059967	0,0685378
47	0,1582826	0,1263381	0,1009492	0,0646583
48	0,1521948	0,1208977	0,0961421	0,0609984
49	0,1463411	0,1156916	0,0915639	0,0575457
50	0,1407126	0,1107097	0,0872037	0,0542884

II. Werth von $\frac{1}{1{,}0p^n}$.

n	p = 2	p = 2½	p = 3	p = 3½
51	0,3642430	0,2838461	0,2214632	0,1729984
52	0,3571010	0,2769230	0,2150128	0,1671482
53	0,3500990	0,2701688	0,2087503	0,1614959
54	0,3432343	0,2635793	0,2026702	0,1560347
55	0,3365042	0,2571505	0,1967672	0,1507581
56	0,3299061	0,2508786	0,1910361	0,1456600
57	0,3234374	0,2447596	0,1854719	0,1407343
58	0,3170955	0,2387898	0,1800698	0,1359752
59	0,3108779	0,2329657	0,1748251	0,1313770
60	0,3047823	0,2272836	0,1697331	0,1269343
61	0,2988061	0,2217401	0,1647894	0,1226418
62	0,2929472	0,2163318	0,1599897	0,1184945
63	0,2872031	0,2110554	0,1553298	0,1144875
64	0,2815717	0,2059077	0,1508057	0,1106159
65	0,2760507	0,2008856	0,1464133	0,1068753
66	0,2706379	0,1959859	0,1421488	0,1032611
67	0,2653313	0,1912058	0,1380085	0,0997692
68	0,2601287	0,1865422	0,1339889	0,0963954
69	0,2550282	9,1819924	0,1300863	0,0931356
70	0,2500276	0,1775536	0,1262974	0,0899861
71	0,2451251	0,1732230	0,1226188	0,0869431
72	0,2403187	0,1689980	0,1190474	0,0840030
73	0,2356066	0,1648761	0,1155800	0,0811623
74	0,2309869	0,1608548	0,1122136	0,0784177
75	0,2264577	0,1569315	0,1089452	0,0757659
76	0,2220174	0,1531039	0,1057721	0,0732038
77	0,2176641	0,1493697	0,1026913	0,0707283
78	0,2133962	0,1457265	0,0997003	0,0683365
79	0,2092119	0,1421722	0,0967964	0,0660256
80	0,2051097	0,1387046	0,0939771	0,0637929
81	0,2010880	0,1353215	0,0912399	0,0616356
82	0,1971451	0,1320210	0,0885824	0,0595513
83	0,1932795	0,1288010	0,0860024	0,0575375
84	0,1894897	0,1256595	0,0834974	0,0555918
85	0,1857742	0,1225946	0,0810655	0,0537119
86	0,1821316	0,1196045	0,0787043	0,0518955
87	0,1785604	0,1166873	0,0764120	0,0501406
88	0,1750592	0,1138413	0,0741864	0,0484450
89	0,1716266	0,1110647	0,0720256	0,0468068
90	0,1682614	0,1083558	0,0699278	0,0452240
91	0,1649622	0,1057130	0,0678911	0,0436946
92	0,1617276	0,1031346	0,0659136	0,0422170
93	0,1585565	0,1006191	0,0639938	0,0407894
94	0,1554475	0,0981650	0,0621299	0,0394101
95	0,1523995	0,0957707	0,0603203	0,0380774
96	0,1494113	0,0934349	0,0585634	0,0367897
97	0,1464817	0,0911560	0,0568577	0,0355456
98	0,1436095	0,0889326	0,0552016	0,0343436
99	0,1407936	0,0867636	0,0535938	0,0331822
100	0,1380330	0,0846474	0,0520328	0,0320601

II. Werth von $\frac{1}{1,0p^n}$.

n	p = 4	p = 4½	p = 5	p = 6
51	0,1353006	0,1059422	0,0830512	0,0512154
52	0,1300967	0,1013801	0,0790964	0,0483164
53	0,1250930	0,0970145	0,0753299	0,0455816
54	0,1202817	0,0928368	0,0717427	0,0430015
55	0,1156555	0,0888391	0,0683264	0,0405674
56	0,1112072	0,0850135	0,0650728	0,0382712
57	0,1069300	0,0813526	0,0619741	0,0361049
58	0,1028173	0,0778494	0,0590229	0,0340612
59	0,0988628	0,0744970	0,0562123	0,0321332
60	0,0950604	0,0712890	0,0535355	0,0303143
61	0,0914042	0,0682191	0,0509862	0,0285984
62	0,0878887	0,0652815	0,0485583	0,0269797
63	0,0845084	0,0624703	0,0462460	0,0254525
64	0,0812580	0,0597802	0,0440438	0,0240118
65	0,0781327	0,0572059	0,0419465	0,0226526
66	0,0751276	0,0547425	0,0399490	0,0213704
67	0,0722381	0,0523852	0,0380467	0,0201608
68	0,0694597	0,0501294	0,0362349	0,0190196
69	0,0667882	0,0479707	0,0345095	0,0179430
70	0,0642194	0,0459050	0,0328662	0,0169274
71	0,0617494	0,0439282	0,0313011	0,0159692
72	0,0593744	0,0420366	0,0298106	0,0150653
73	0,0570908	0,0402264	0,0283910	0,0142125
74	0,0548950	0,0384941	0,0270391	0,0134081
75	0,0527837	0,0368365	0,0257515	0,0126491
76	0,0507535	0,0352502	0,0245252	0,0119331
77	0,0488015	0,0337323	0,0233574	0,0112577
78	0,0469245	0,0322797	0,0222451	0,0106204
79	0,0451197	0,0308897	0,0211858	0,0100193
80	0,0433843	0,0295595	0,0201770	0,0094522
81	0,0417157	0,0282866	0,0192162	0,0089171
82	0,0401112	0,0270685	0,0183011	0,0084124
83	0,0385685	0,0259029	0,0174296	0,0079362
84	0,0370851	0,0247874	0,0165996	0,0074870
85	0,0356588	0,0237200	0,0158092	0,0070632
86	0,0342873	0,0226986	0,0150564	0,0066634
87	0,0329685	0,0217211	0,0143394	0,0062862
88	0,0317005	0,0207858	0,0136566	0,0059304
89	0,0304813	0,0198907	0,0130063	0,0055947
90	0,0293089	0,0190342	0,0123869	0,0052780
91	0,0281816	0,0182145	0,0117971	0,0049793
92	0,0270977	0,0174302	0,0112353	0,0046974
93	0,0260555	0,0166796	0,0107003	0,0044315
94	0,0250534	0,0159613	0,0101907	0,0041807
95	0,0240898	0,0152740	0,0097055	0,0039441
96	0,0231632	0,0146163	0,0092433	0,0037208
97	0,0222724	0,0139868	0,0088031	0,0035102
98	0,0214157	0,0133845	0,0083840	0,0033115
99	0,0205920	0,0128082	0,0079847	0,0031241
100	0,0198000	0,0122566	0,0076045	0,0029472

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.

Verbesserungen.

Im Lehrbuche:

Seite 49 Aufg. 16 lies: $(x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4)$ statt $(x^4 - 16y^4)$.
„ 64 Zeile 5 v. u. lies: $-x^3$ statt $+x^3$.
„ 67 „ 8 v. o. lies: $+(a-b)$ statt $-(a+b)$.
„ 88 „ 5 v. o. lies: $7x$ statt $7y$.
„ 90 „ 3 v. o. lies: $\gtrless$ statt $\lessgtr$.
„ 129 „ 3 v. o. lies: $>$ statt $<$.
„ 140 „ 10 v. u. lies: $(\frac{2}{3}a^m$ statt $\frac{2}{3}a^m$.
„ 142 „ 13 v. u. lies im Multiplikator: $-\frac{6a^3b^2}{5c^4}$ statt $+\frac{6a^3b^2}{5c^4}$.
„ 145 „ 4 v. u. lies: $+\frac{6m^4n^5}{p^6}$ statt $-\frac{6m^4n^5}{p^6}$.
„ 148 „ 8 v. u. lies: 2^3 statt 2^{-3} u. Zeile 6 v. u. b statt 6.
„ 174 „ 9 v. o. streiche $-3\sqrt{625}$.
„ 192 „ 5 v. o. lies: $-$ statt $+$
„ 227 „ 7 v. o. lies: m statt n.
„ 235 „ 2 v. u. lies: 87,354 statt 873,54.
„ 289 „ 2 v. o. lies: 2400 statt 4200.
„ 290 „ 6 v. u. lies: früher statt später.
„ 290 „ 4 v. u. lies: jene statt diese u. diese statt jene.
„ 305 streiche Z. 20 u. 21 v. o. u. setze dafür: Eine zweizifferige Zahl, deren Ziffernsumme 14 beträgt, hat die Eigenschaft, daß.
„ 315 Zeile 6 v. o. lies: 4z statt 3z.
„ 329 „ 3 v. o. lies: 5x statt 5.
„ 332 „ 1 v. u. lies: 20,88 statt 22,88.
„ 338 „ 6 v. u. lies: y^2 statt y.
„ 352 „ 3 v. u. lies: 340 statt 240.
„ 360 „ 8 v. o. lies: $<$ statt $>$.
„ 369 „ 1 v. o. lies: $m^3_{3\mu}$ statt $m_{3\mu}$.
„ 369 „ 5 v. u. lies: m statt n.
„ 370 „ 1 v. u. lies: $\sqrt[3]{}[$ statt $\sqrt{}[$.
„ 391 „ 9 v. u. lies: 12 statt 13.
„ 407 „ 3 u. 21 v. u. lies: 987,65 statt 98765.

Im Anhange:

Seite 3 Zeile 7 v. u. lies: 16z statt 12z.
„ 3 „ 3 v. u. lies: +2f statt −2f.
„ 3 „ 1 v. u. lies: 5a statt 15a.
„ 5 „ 6 v. o. lies: $+4xy^2 - 8y^3$ statt $-4xy^2 + 8y^3$.
„ 6 „ 3 v. o. lies: −3xy statt 3xy.
„ 6 „ 17 v. o. lies: 1440 statt 4320.
„ 6 „ 1 v. u. lies: $18yz^2$ statt $18y^2$.
„ 8 „ 7 v. u. lies: 4xy statt 2xy.
„ 8 „ 10 v. u. lies: $\frac{a^4 - 2a^2 + 4}{a^2 + 2a + 4}$.
„ 11 „ 16 v. u. lies: 864 statt 868.
„ 12 „ 3 v. o. lies: a^{r+s} statt a^{2+s}.
„ 13 „ 16 v. o. lies: $2ab^3$ statt $4ab^3$.
„ 14 „ 2 v. o. lies: a^{-4} statt a^{-6} u. a^4 statt a^6.
„ 14 „ 5 v. u. lies: $5an^3$ statt $3an^3$.
„ 18 „ 3 v. o. lies: 344 statt 329.
„ 18 „ 7 v. u. lies: $\sqrt[3]{\ }$ statt $\sqrt{\ }$.
„ 19 „ 1 v. u. lies: $+\sqrt{\ }$ statt $-\sqrt{\ }$.
„ 21 „ 1 v. u. lies: 66 statt 56.
„ 21 „ 5 v. u. lies: + statt −.
„ 21 „ 7 v. u. fehlt der Nenner a − b.
„ 22 „ 17 v. o. lies: $\sqrt{3}$ u. $\sqrt{5}$ statt $\sqrt{-3}$ u. $\sqrt{-5}$.
„ 24 Aufg. 24 lies: 2,3741 statt 1,3741.
„ 27 Zeile 1 v. o. lies: q statt 9.
„ 29 „ 6 v. o. lies: $11\frac{1}{5}$ statt $11\frac{1}{2}$.
„ 30 „ 10 v. u. lies: −2a statt 2a.
„ 31 „ 7 v. o. lies: −6,9552 statt 6,9552.
„ 32 „ 13 v. u. lies: $3\frac{3}{4}$ statt $4\frac{3}{4}$.
„ 34 „ 14 v. o. lies: 2 Std. $17\frac{1}{2}\frac{7}{3}$ Min. statt 3 Std.
„ 38 „ 3 v. o. lies: $7\frac{1}{5}$ statt $7\frac{1}{2}$.
„ 39 „ 14 v. o. lies: $25\frac{2}{3}$ statt $28\frac{1}{2}$.
„ 39 „ 7 v. u. lies: $-\frac{3x}{4}$ statt $+\frac{3x}{4}$.
„ 40 „ 5 v. u. lies: $1\frac{1}{2}$ statt $1\frac{1}{3}$.
„ 42 „ 7 v. u. lies: 9000 statt 90000.
„ 42 „ 14 v. u. lies: $x + y = 14$ statt $x = y + 2$.
„ 43 „ 13 v. u. lies: Kupfer statt Gold.
„ 43 „ 10 v. u. lies: $\frac{y}{b}$ statt $\frac{x}{b}$.

Anhang

zu dem

Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik

von

Dr. Carl Spitz,
Professor am Polytechnikum in Carlsruhe.

Die

Resultate

und

Andeutungen zur Auflösung

der in dem

Lehrbuche befindlichen Aufgaben

enthaltend.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig und Heidelberg.
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1868.

Erster Abschnitt.

Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlzeichen.

---

§. 6.

1) $30a$.
2) $19a + 11b + 5c$.
2a) $17a + 6b + 9c + 13d$.
3) $6m + 14n + 19p$.
4) $20a + 4b + 13c + 17x + 21y$.
5) $14x + 7y + 8z + 16v$.

§. 19.

1) $5a$.
1a) $4b$.
1b) $-3c$.
1c) $-9d$.
2) $9x$.
3) $-7m + 9n$.
4) $2a - 2c$.
5) $7a - b - 5c$.
6) $9a - c + d$.
7) $9a - 2b - 7c$.
7a) $9x + 7y - 12z$.
7b) $5a - 7b$.
8) $2b$.
9) $2a + b + c$.
10) $8a - 9c + 4d + 2f$.
11) $5a - 13b + 4c$.
12) $-15a + 18b$.

13) $9a + 22b - 2c$.
14) $- 6a - 11m + 2 + 2q - 6v$.
14a) $3a - 14b - 12c + 7d$.

§. 33.

1) $abcd$.
2) $12a^2bc$.
3) $- 35ab^2c^2$.
3a) $35a^2bc$.
4) $30m^2n^2p^2$.
5) $- 70a^5b^3c$.
5a) $a^2 - ab - ac + ad$.
6) $20a^2b - 10ab^2 + 15abc$.
7) $6x^2y^2z + 24x^2yz^2 - 12xy^2z^2 - 15x^2y^2z^2$.
7a) $- 15a^2c + 10abc - 25ac^2$.
7b) $3ab + 17ac - 16ad$.
7c) $13x - 58y + 34z$.
7d) $a^2 - 2ab + 2ac - b^2 - c^2$.
8) $15a^2 + 24ab - 12b^2$.
9) $16m^2 - 16mn + 4n^2$.
10) $64x^2 - 25y^2$.
11) $9a^4b^2 - 25a^2b^6c^2$.
12) $30a^3 - 41a^2b - 54ab^2 + 72b^3$.
12a) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$.
13) $14af - 21bf - 56cf - 7df + 63f^2 + 4ag - 6bg - 16cg - 2dg + 18fg - 2ah + 3bh + 8ch + dh - 9fh$.
14) $15a^3 - 14a^2b + 24ab^2 - 7b^3$.
15) $9a^5 + 183a^4b + 688a^3b^2 - 2476a^2b^3 + 631ab^4 + 741b^5$.
16) $12x^3 - 9x^3y - 27x^2y^2 + 16x^2y - 14xy^3 - 8xy^2 + 10y^4$.
17) $30a^3 - 101a^2b + 178a^2c + 69ab^2 - 269abc + 256ac^2 - 10b^3 + 66b^2c - 140bc^2 + 96c^3$.
18) $400m^4 - 244m^2n^2 + 36n^4$.
19) $28a^5 - 62a^4b - 47a^3b^2 + 183a^2b^3 - 139ab^4 + 57b^5$.

§. 45.

1) a.
2) $- b$.
3) $- 5$.
4) ac.

5) 4a.
6) 3cd.
7) 5n.
8) 5 — 2b + 4c.
9) 4f — 3 — 2b.
10) c + d.
11) $4a^2 - 6a - 7$.
12) x — y.
13) 4m + 3n.
14) $2a^2 + 3ab - 5ac$.
15) $a^2 - ab + b^2$.
16) $x^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3$.

Zweiter Abschnitt.

Vom größten gemeinschaftlichen Theiler, der Faktorenzerlegung und dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

---

§. 53.

1) 31.
2) 107.
3) 205.
4) 2376.
5) 104.
6) 58.
7) 3a — x.
8) 3m — 2n.
9) $5x^2 + 3x - 8$.
10) $a^4 + 3a^3 + a^2 - 3a - 2$.

§. 55.

1) 2 . 2 . 2 . 2 . 2.
2) 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3.
3) 2 . 2 . 3 . 5 . 7.
4) 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5.
5) 2 . 3 . 3 . 5 . 7 . 13.
6) 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 . 11 . 13.
7) c(a + x).
8) 3 (m + n) (m + n).
8a) (x + a) (x + b).
8b) (y + a) (y — b).
8c) (z — a) (z — b).
9) (a — b) (2 + x).
10) (c + 2d) (2 + x).
11) 2 (x — 2) (2x — 3).
12) 3ab (2a — 4b + 3ab).

13) $2(2a - b)(3c - 2b)$.
14) $(x - 2y)(x - y + z)$.
Andeutung. Zerlege $3xy$ in $-2xy - xy$.
15) $(m + n - p)(m - n + p)$.
Andeutung. Addire und subtrahire $mn + mp$ und schreibe $np + np$ statt $2np$.
16) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.
17) $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.
Andeutung. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2)$ u. s. w.
18) $3ab(2a + 5b)(2a - 5b)$.
19) $(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$.
20) $(a - b)(a^2 + b^2 + ab)$.
20a) $(a^2 + b^2)(a + b)(a + b)(a - b)$.
21) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

§. 57.

1) 192.
2) 4320.
3) 4680.
4) 41580.
5) 15015.
6) 12717705.

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Brüchen.

A. Von den gemeinen Brüchen.

§. 63.

1) $32\frac{329}{360}$.
2) $74\frac{107}{168}$.
3) $\frac{3a + 5c - 6d}{b}$.
4) $\frac{4m - 2n + 3p}{xy}$.
5) $\frac{ayz + bxz - cxy}{xyz}$.
6) $\frac{18ab^3 - 16c^2 + 9ab}{24b^2c}$.
7) $\frac{20x^2z + 21xy^2 + 18y^2}{12xyz}$.

8) $\frac{36a^2b^2 - 40a^2c + 45c}{60abc^2}$.

9) $\frac{(27a - 29b)\,ab}{25\,(a^2 - b^2)}$.

10) $\frac{xz + xy - 4by}{x^2 - 16b^2}$.

11) $-\frac{4ab}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{b^2 - a^2}$.

12) $-\frac{y^2}{x - y} = \frac{y^2}{y - x}$.

13) $\frac{66m - 69n}{120} = \frac{22m - 23n}{40}$.

14) $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{6a\,(a^2 - b^2)} = \frac{(a - 3b)^2}{6a\,(a^2 - b^2)}$.

15) $\frac{22a^2 - 150a^2b - 22ab - 25b}{30ab}$.

16) $\frac{6ax + 4bx - 5ay + 10by}{x^2 - y^2}$.

17) $\frac{4xy}{x^2 - y^2}$.

18) $\frac{8x^2 - 3xy - y^2}{4\,(x^2 - y^2)}$.

18a) $\frac{-34x^2 + 39xy + 97y^2}{15\,(2x^2 - 5xy - 3y^2)}$.

18b) $\frac{2a^5 - 5a^3 + 2a^2 + 2a}{a^3 - 2a^2 + 1}$.

19) a) $2\frac{11}{12}$; b) $14\frac{7}{20}$; c) $9\frac{5}{7}$.

20) a) $\frac{mp}{n}$; b) $\frac{35ax}{3y}$.

21) a) $\frac{18a^2}{35c^2}$; b) $-\frac{10}{9c^2}$.

22) $-\frac{35a}{36d}$.

22a) -1.

22b) $\frac{32x^5 + 4x^2}{x^4 + 6x^2 + 9}$.

23) $-\frac{9a^3c}{10b^3} - \frac{9a^2}{20} + \frac{ab}{c} + 6ac$.

24) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} + \frac{d}{b} - \frac{c}{a}$.

25) $\frac{m^2}{2n^2} - \frac{34}{15} + \frac{4m}{n} + \frac{16n^2}{15m^2} - \frac{16n}{m}$.

26) $\frac{16x^2}{25y^2} - \frac{49a^2}{16b^2}$.

27) $3 - \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{b}{a} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{c}{b}$.

28) $\frac{5x^3}{6yz^2} - \frac{3x^2y^2}{4z^3} + \frac{13}{8} - \frac{25xz}{36y^3} - \frac{5z^3}{6x^2y^2}$.

29) $\frac{5a^4}{2b^4} + \frac{29a^3c}{12b^3} - \frac{5a^2c^2}{2b^4} + \frac{a^2c^2}{2b^2} - \frac{14ac^3}{15b^3} + \frac{2c^4}{5b^4}$.

30) a) $\frac{19}{35}$; b) $3\frac{11}{15}$; c) $1\frac{5}{16}$.

31) a) $\frac{m}{np}$; b) $\frac{xz}{y}$; b) $\frac{5}{6n^2}$.

32) $-\frac{11xv}{6z}$.

33) $\frac{10cd}{a}$.

33a) $\frac{a^2 + 2a + 4}{a^4 - 2a^2 + 4}$.

34) 1.

35) $\frac{n}{m}$.

35a) $-\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

35b) 1.

36) $-\frac{5c}{18b^2} + \frac{1}{5b} - \frac{7c}{12a^2}$.

37) $-\frac{35xz}{24y^3} + \frac{7z^2}{3x^2} - \frac{49y}{32x}$.

38) $\frac{2a}{3b} + \frac{4b}{5c}$.

39) $\frac{3x}{4y} - \frac{2y}{3x}$.

40) $\frac{4a^2}{b^2} + \frac{12ac}{bd} + \frac{9c^2}{d^2}$.

41) $\frac{3ax}{4b} - \frac{5ab}{2x} - \frac{7a}{2}$.

42) $1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + 2a^4 + \dots$

43) $1 + \frac{2b}{a} + \frac{2b^2}{a^2} + \frac{2b^3}{a^3} + \frac{2b^4}{a^4} + \dots$

B. Von den Decimalbrüchen.

§. 68.

1) 0,5.
2) 0,75.
3) 7,6875.
4) 34,008.
5) 0,23125.
6) 0,033203125.
7) $0,\dot{6}$.
8) $0,8\dot{3}$.
9) $3,91\dot{6}$.
10) $14,\dot{4}2857\dot{1}$.
11) $0,\dot{3}0769\dot{2}$.
12) $0,\dot{2}94117647058823\dot{5}$.
13) $0,2\dot{5}$.
14) $0,000\dot{6}7\dot{5}$.
15) $0,20\dot{0}9\dot{9}$.

§. 70.

1) $\frac{27}{40}$.
2) $4\frac{1}{800}$.
3) $24\frac{171}{400}$.
4) $\frac{9}{160}$.
5) $\frac{2}{3}$.
6) $\frac{14}{33}$.
7) $4\frac{9}{37}$.
8) $147\frac{7}{111}$.
9) $\frac{45}{1111}$.
10) $\frac{28}{45}$.
11) $3\frac{2}{55}$.
12) $\frac{47067}{111100}$.
13) $\frac{13}{5550}$.
14) $18\frac{2}{185}$.
15) $400\frac{553}{5500}$.
16) $\frac{1}{2200}$.

§. 72.

1) 1024,4779.
2) 1930,48928.
3) 712,841134.
4) 905,40586.
5) 122,49412.
6) 28,84359.
7) 0,036926.
8) 32,252.
9) 181,82075.
10) 3,2234.
11) 18,3702.
12) 1720,55545.

§. 74.

1) 3922,24.
2) 80,4635.
3) 7,0021827.
4) 0,479194001.
5) 0,690497256.
6) 0,427389192.

7) 0,002358336.
8) 0,0000220416.
9) 5946746,584.
10) 0,0542821175.

§. 76.

1) 17,82341.
2) 148,11456.
3) 1,280906.
4) 1781,199996.
5) 0,003266.
6) 0,041614.
7) 0,0031906.
8) 20415,6882.

§. 78.

1) 5,214.
2) 2,1.
3) 14,58.
4) 1,86037735849 ....
5) 0,10253625 ....
6) 4993,92405 ....
7) $51782,2\dot{5}\dot{8}$
8) 0,00053579 ....
9) 0,0000319225 ....
10) $6153,\dot{8}4615\dot{3}$.

§. 80.

1) 7,3596.
2) 79,878.
3) 9,66755.
4) 4,969806.
5) 7,4421.
6) 0,60152.

C. Von den Kettenbrüchen.

§. 83.

Die Partialnenner heißen der Reihe nach

1) 2, 2, 2.
2) 2, 5, 1, 2.
3) 1, 10, 9, 1, 7.
4) 1, 7.
5) 57, 1, 4, 11, 3.
5a) 1, 1, 1, 1, 1, 4.
6) 2, 4, 12.
6a) 43, 151, 1, 4, 1, 2.
7) 11, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 18.
8) 1, 3, 1, 8, 1, 1006, 2.

§. 85.

1) $\frac{39}{101}$. 2) $\frac{340}{581}$. 3) $\frac{1843}{3011}$. 4) $\frac{3790}{5147}$.
4a) $\frac{23719}{36572}$. 4b) $\frac{213}{68425}$.

§. 87.

1) a) $1, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17}, \frac{23}{30}, \frac{151}{197}$.
b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{9}{20}, \frac{13}{29}, \frac{35}{78}, \frac{48}{107}, \frac{179}{399}, \frac{227}{506}, \frac{406}{905}, \frac{633}{1411}$.
c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{15}{26}, \frac{214}{371}, \frac{13129}{22761}$.

2) wie 1 : 3; 7 : 22; 106 : 333; 113 : 355; 33102 : 103993 ꝛc.

3) 1, 13 : 12, 157 : 145, 170 : 157, 1517 : 1401, 1687 : 1558, 4891 : 4517, 6578 : 6075, 11469 : 10592 ꝛc.

4) 1, 9 : 8, 28 : 25, 249993 : 223208.

Vierter Abschnitt.

Von den Potenzen.

A. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 93.

1) 2526.
1a) 1215.
1b) 441.
2) 2962.
3) $88a^3b^3$.
4) $-\frac{473}{868}$.
5) $36\frac{49}{64}$.
5a) $-190\frac{583}{4096}$.
6) $3a^m$.
7) $17x^3 + 5y^4$.
8) $9a^3 + 10b^8 + 8d^4 + 7f^6$.
9) $5a^5 - 13b^6$.
10) $\frac{179}{30}a^m - \frac{59}{24}b^n + \frac{47}{8}c^q$.

§. 95.

1) $15a^{11}$.
1a) $-35a^9$.
1b) $24x^8y^{11}$.
2) $60a^{14}b^{11}$.
3) $-\frac{1}{2}a^8b^7c^7$.
3a) $\frac{35a^4b^9}{c^5}$.
4) $-\frac{21a^7}{20b^7}$.

5) $\frac{35a^{m+n}b^{n+p}}{6c^{7m}d^3}$.

5a) $12(a^2 - b^3)^9$.

5b) $\frac{6(x^6 + y^3)^{p+q}}{35a^{2+s}b^u}$.

6) $-\frac{10x^{4m+11}y^{5m+3n+2}z^{p+4}}{49a^{5m+3}b^{3n+p}}$.

7) $15a^6b^{10}c^5 - 21a^4b^8c^5 + 24a^6b^3c^9 - 6a^3b^6c^7$.

8) $-\frac{9a^5f^3}{40b^2d} + \frac{21a^4f^3}{64b^3d} - \frac{15af^6}{32b^4d^2}$.

9) $\frac{7a^{6m+6}b^{5n+9}}{6c^{7p+9}d^{2q+2}} - \frac{5a^{5m+9}b^{4n+7}}{9c^{10p+2}d^{5q+1}}$.

10) $39a^4b - 15a^3b^2 + 20a^2b^4 - 18a^5 - 12a^3b^3$.

11) $6a^3 - 17a^2b + a^2c - 26ab^2 + 51abc - 19ac^2 - 8b^3 + 32b^2c - 26bc^2 + 6c^3$.

11a) $16a^3 - 250b^3$.

11b) $48m^4 + 162mn^3$.

11c) $243x^9 + 32x^4$.

12) $20a^4 - 60a^3b + 80a^3c + 29a^2b^2 - 120a^2bc + 88a^2c^2 + 48ab^3 - 64ab^2c - 36b^4 + 96b^3c - 46b^2c^2 - 24abc^2 + 32ac^3 - 48bc^3 + 32c^4$.

13) $8x^{10} - 47x^8y^2 + 60x^6y^4 - 26x^4y^6 + 3x^2y^8$.

14) $16m^6n^4 - 64m^4p^6q^2 + 48m^2p^3q^5 - 9q^8$.

15) $25x^{6m+4}y^{8p} - 49y^{8m+10}z^{10q}$.

16) $6a^{3m+5n+5}b^{2m+3p+7} - 9a^{6n+7}b^{7m+2p+3} + 8a^{6m+2n}b^{5p+8} - 12a^{3m+3n+2}b^{5m+4p+4}$.

16a) $\frac{9a^6b^8}{16c^{10}} - \frac{25a^2b^6}{4c^4} + \frac{6a^4b^5}{c^6} - \frac{36a^6b^4}{25c^8}$.

§. 97.

1) $4a^4bc^3$.

1a) $\frac{3a^2b^2}{8}$.

1b) $\frac{8x^5y}{15}$.

2) $5a^6cd^3$.

3) $\frac{7}{30a^5b^2c^9}$.

4) $\frac{6z^5}{x}$.

4a) $5(a^2 - b^3)^3$.

4b) $4x^{2m}$.

5) $5a^m b^n$.

6) $\frac{4a^{4m}b^{18n}}{35c^{16p}}$.

6a) $3(a^m - 3b^n)^3$.

7) $\frac{4a}{b} - \frac{7}{2a^3} + \frac{9b^3c^2}{2}$.

7a) $5m^x n^{6y} - m^{3x} n^{5y} + 2m^{7x} n^{2y}$.

8) $-\frac{15z}{14x^2y} + \frac{9}{8x} - \frac{27x^4z^4}{2y^2}$.

9) $5a^3b^2 - 3a^2b^4$.

10) $5a^3 - 3b^2c^3 + 2a^2c^4$.

11) $2a^{m+3}b^{3n} + 4a^{3-m}c^{3n}$.

12) $x^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4$.

12a) $-4a^3 + 10a^2b - 7ab^2 + 3b^3$.

Andeutung. Ordne zuerst den Divisor.

12b) $16a^4 + 8a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

12c) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

13) $\frac{3x^2y^4}{4z^3} - \frac{5x^3}{3z} - 8x^2yz^3$.

14) $3a^m b^n - 2a^2b + 3a^n b^m$.

14a) $4a^3b^2 - 8a^2c^3d + 3d^4$.

14b) $\frac{3m^3n^4}{4p^5} + \frac{5mn^3}{2p^2} - \frac{6m^3n^2}{5p^4}$.

14c) $1 - 3a^2 + 9a^4 - 27a^6$.

Andeutung. Ordne den Dividenden nach dem Divisor.

B. Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.

§. 100.

1) a) $\frac{5b^4}{a^3c^2}$.

b) $\frac{4a^r c^q}{b^s x^m (y + z)^p}$.

c) $\frac{4^7a^2c^8f^7}{3^4b^4d^2(c + d)^5}$.

1a) $\frac{1}{4}$.

2) $15a^{-6}b^{-3}c^2 = \frac{15c^2}{a^6b^3}$.

2a) $\frac{6}{(a^2 - b)^9}$.

2b) $\frac{a^2}{b^6}$.

2c) $\frac{8}{9}$.

2d) $\frac{3c^5}{5a^2b}$.

2e) $\frac{5(b^{-2} - c^3)^2 d^3}{2a^6}$.

3) $\frac{5df^{12}}{16a^7(b + c)g^{21}}$.

3a) $\frac{3}{8}$.

3b) $2x^{-10} = \frac{2}{x^{10}}$.

3c) $8y^7z^{-11} = \frac{8y^7}{z^{11}}$.

4) $\frac{5b^7y^4}{a^{20}}$.

4a) $\frac{4y^3z^2}{3x^{12}}$.

4b) $\frac{15cd^3}{16a^6b^5}$.

5) $\frac{3(x + y)^{-4}}{4v^{-3}z^{-5}} = \frac{3v^3z^5}{4(x + y)^4}$.

6) $24a^{-5}c^4 + 18a^5b^{-12}c^4 - 42a^3b$

$= \frac{24c^4}{a^5} + \frac{18a^5c^4}{b^{12}} - 42a^3b$.

7) $\frac{5m^6}{3n^2p^6} - \frac{2n^{13}}{m^6p^6} + \frac{3an^3}{m^9p^6}$.

8) $\frac{5}{9a^{14}b^8} + \frac{34b}{3a^5} - \frac{2}{3a^4b^{10}} + 56a^4b^{10}$

$- \frac{20a^5}{b} - \frac{24a^6}{b^{12}}$.

9) $\frac{5x^3y^2}{z^4} - \frac{8a^2b}{c^4} + \frac{8ax^2}{7y^5}$.

10) $a^3 - 2a^2b + 4ab^2 - 8b^3$.

C. Wiederholte Potenzirung.

§. 102.

1) a^6.

1a) $a^{pr} b^{qr}$.

2) $2^{24} = 16777216$.

2a) $\frac{c^{rs}}{a^{ps} b^{qs}}$.

3) $3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$.

4) $a^{-mnp} = \frac{1}{a^{mnp}}$.

5) $a^8 b^{-12} = \frac{a^8}{b^{12}}$.

6) a^{30}.

7) $-\frac{2^{-3} a^{-12} b^6}{3^{-3} c^9} = -\frac{27 b^6}{8 a^{12} c^9}$.

8) $-\frac{a^{-30} b^{45} c^{75}}{d^{60} f^{-105}} = -\frac{b^{45} c^{75} f^{105}}{a^{30} d^{60}}$.

9) $3^6 (a^3 - b)^{-12} = \frac{729}{(a^3 - b)^{12}}$.

10) $(x^2 - y^{-2})^6$.

D. Potenzirung von Aggregaten.

§. 105.

1) $x^2 + 4xy + 4y^2$.

2) $4a^2 - 20ab + 25b^2$.

3) $9m^6 - 24m^3 n^5 + 16n^{10}$.

4) $\frac{9a^4}{b^2} + 12a^2 b^2 + 4b^6$.

4a) $\frac{4a^6}{9b^4} - \frac{16a^5}{15b^3} + \frac{16a^4}{25b^2}$.

5) $\frac{4a^4}{25b^6} + \frac{3}{5ab} + \frac{9b^4}{16a^6}$.

6) $\frac{9y^4}{4x^6 z^{10}} - \frac{4x}{y^2 z^3} + \frac{16x^8 z^4}{9y^8}$.

7) $4x^2 - 4xy + y^2 + 12xz - 6yz + 9z^2$.

8) $16m^4 - 16m^2 n^3 + 4n^6 - 24m^2 p^4 + 12n^3 p^4 + 9p^8$.

9) $\frac{9a^4}{4b^2} + \frac{12ab^2}{5} + \frac{16b^6}{25a^2} - 3a^5b^3 - \frac{8a^2b^7}{5} + a^6b^8.$

10) $4a^{-6} + 12a^{-3}b^4 + 9b^8 - 20a^{-3}c^3 - 30b^4c^3 + 25c^6 - 8a^{-3}d^{-2} - 12b^4d^{-2} + 20c^3d^{-2} + 4d^{-4}.$

11) $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2af + 2bf + 2cf + 2df + f^2.$

12) $4a^{16} - 16a^{14} + 48a^{12} - 120a^{10} + 264a^8 - 400a^6 + 548a^4 - 616a^2 + 484.$

§. 108.

1) $8x^9 - 36x^6y^2 + 54x^3y^4 - 27y^6.$

1a) $27x^6 - 54x^4yz + 36x^2y^2z^2 - 8y^3z^3.$

2) $\frac{64m^9}{27n^6} - \frac{32m^2}{9n^3} + \frac{16}{9m^5} - \frac{8n^3}{27m^{12}}.$

2a) $\frac{27x^6}{512a^6} - \frac{3x^5}{16a^5} + \frac{2x^4}{9a^4} - \frac{64x^3}{729a^3}.$

3) $27a^6 - 54a^5b + 63a^4b^2 - 44a^3b^3 + 21a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$

3a) $a^3 - 6a^4 + 21a^5 - 44a^6 + 63a^7 - 54a^8 + 27a^9.$

4) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 + 12x^2z - 36xyz + 27y^2z + 6xz^2 - 9yz^2 + z^3 - 48x^2v + 144xyv - 108y^2v - 48xzv + 72yzv - 12z^2v + 96xv^2 - 144yv^2 + 48zv^2 - 64v^3.$

§. 110.

1) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$

1a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$

1b) $1 - 8a + 28a^2 - 56a^3 + 70a^4 - 56a^5 + 28a^6 - 8a^7 + a^8.$

1c) $\frac{81}{256}x^4 + \frac{9}{8}x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{8}{9}xy^3 + \frac{16}{81}y^4.$

2) $m^4 + 4m^3n + 4m^3y + 6m^2n^2 + 12m^2ny + 6m^2y^2 + 4mn^3 + 12mn^2y + 12mny^2 + 4my^3 + n^4 + 4n^3y + 6n^2y^2 + 3ny^3 + y^4.$

3) $a^6 + 6a^5b + 6a^5c + 15a^4b^2 + 30a^4bc + 15a^4c^2 + 20a^3b^3 + 60a^3b^2c + 60a^3bc^2 + 20a^3c^3 + 15a^2b^4 + 60a^2b^3c + 90a^2b^2c^2 + 60a^2bc^3 + 15a^2c^4 + 6ab^5 + 40ab^4c + 60ab^3c^2 + 60ab^2c^3 + 30abc^4 + 6ac^5 + b^6 + 6b^5c + 15b^4c^2 + 20b^3c^3 + 15b^2c^4 + 6bc^5 + c^6.$

4) $a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12a^2cd + 6a^2d^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 24abcd + 12abd^2 + 4ac^3 + 12ac^2d + 12acd^2 + 4ad^3 + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 5c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$.

Fünfter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

---

§. 114.

1) $a^3 b^2 c$.

1a) $\frac{4a^2}{b^4}$.

1b) $\frac{2a^2b}{c^3}$.

2) $\frac{a^2 b^3}{cd^5}$.

3) $\frac{a^3 c^2}{b^4 d^8}$.

3a) $2a^2$.

3b) $2abc$.

4) $4a^{2(m+n)} b^p$.

4a) $3 (a - 2b)^2$.

5) $\frac{2 (a^2 + 4b^5)^{2m}}{3 (x + 2y^2)^{3n}}$.

5a) $\frac{a^3 (g + h)^8}{d^6 (b - c)^5}$.

6) $\frac{4 (a - 3b)^{3m} (c^2 + 3d)^{1+2n}}{(2x + y^2)^{4n}}$.

7) $8 \sqrt[p]{a^m}$.

8) $(a - 3) \sqrt{\frac{7}{3}}$.

9) $4 \sqrt[m]{a} - 3 \sqrt[p]{b} + 8 \sqrt[q]{c}$.

9a) a.

9b) $2x - 3y + z$.

10) $20\sqrt{7}$.

10a) $329\sqrt{5}$.

10b) $52\sqrt{11}$.

11) $16\sqrt{3} + 49\sqrt{5}$.

11a) $36\sqrt{3} + 20\sqrt{2}$.

11b) $220\sqrt{5} - 101\sqrt{6}$.

11c) $25\sqrt[3]{4}$.

12) $-\frac{412}{15}\sqrt{5}$.

12a) $\frac{415}{24}\sqrt{94}$.

13) $-5\sqrt[3]{3}$.

13a) $11ab$.

13b) $(a + 13b)\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

14) $(4a^2b - 4a^3 + 15)\sqrt{3ab}$.

15) $\left(\frac{6a}{y} - \frac{4bz}{x} + \frac{3cy^2}{x^3}\right)\sqrt[3]{x^2y^2}$.

15a) $\sqrt{xy}$.

15b) $a^2b^3\sqrt[3]{(ab^2 - 2a^2bc + ac^2)}$.

16) $\frac{ab^2}{c^3}\sqrt[4]{\left(\frac{a^5b^3}{c^3} + \frac{a^3b^5}{c^5}\right)} = \frac{a^2b^3}{c^4}\sqrt[4]{\left(\frac{ac}{b} + \frac{b}{ac}\right)}$.

16a) $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{27}\sqrt{6}$.

17) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{2y}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$.

17a) $\frac{4ab}{a^2 - b^2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

18) $\frac{a^{2m+1}b^{n-4} + a^{3m-10}b^{2n+3}}{c^{3-2n}}\sqrt[3]{a^{2m}b^{2n-1}}$.

18a) $1\frac{2}{3}$.

18b) 2.

19) $a\sqrt[3]{b}$.

20) $a^6\sqrt[m]{b^{n+3}}$.

20a) $15(a + 2b)\sqrt[3]{a + 2b)}$.

21) $24 \sqrt{240} = 96 \sqrt{15}$.

21a) $\sqrt[60]{a^{30} b^{20} c^{15} d^{12}}$.

22) $30 \sqrt[3]{12}$.

23) $\sqrt[12]{1119744}$.

24) $6 \sqrt[6]{\frac{27}{100}}$.

25) $\frac{c}{b} \sqrt[12]{\frac{c^5}{ab^7}}$.

25a) $\sqrt[12]{\frac{b^4}{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \sqrt[3]{a^2 b}$.

26) $56 \sqrt[15]{221184}$.

27) $18 \sqrt[12]{56953125}$.

28) $\frac{x^{m+5} y^{4-4m}}{z^{2n+4}} \sqrt[5]{\frac{z^{n-3}}{x^4 y^{3m+1}}}$.

29) $60 \sqrt{42}$.

30) $48 \sqrt{30}$.

31) $24 \sqrt{10} - 64 \sqrt{14} + 80 \sqrt{6}$.

32) $6 \sqrt[6]{108} + 18 - 6 \sqrt[12]{2000}$.

33) $6 \sqrt{6} - 16 + 10 \sqrt[10]{800}$.

34) $22 \sqrt{3} - 112$.

34a) $84 - 30 \sqrt{3}$.

34b) $8 + 2 \sqrt{15}$.

34c) $15 + 4 \sqrt{14}$.

34d) $- 11 - 3 \sqrt{6}$.

34e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{10}$.

35) $60 + 21 \sqrt{5}$.

36) $- 16 - 24 \sqrt{21}$.

37) $44 \sqrt{30} - 34$.

38) $- 452$.

38a) $2 (a^2 - b^2)$.

38b) $- \frac{4ab}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{b^2 - a^2}$.

38c) $2 (a - \sqrt{a^2 - b^2})$.

38d) $2\left[x^4 + x^2y^2 - 2xy^3 - (x^2 - y^2)\sqrt{x^4 - y^4}\right]$.

39) $30 - 6\sqrt{6}$.

40) $10\sqrt{15} - 13\sqrt{6} - 90$.

41) -2016.

42) $14\sqrt{5} + 112\sqrt{3}$.

43) $60 + 26\sqrt[6]{1125} - 16\sqrt[3]{9}$.

44) $6\sqrt{15} - 12\sqrt[6]{3125} - 4\sqrt[6]{243} + 8\sqrt[3]{15}$.

44a) $10\sqrt[6]{32} - 15\sqrt{6} - 8\sqrt[3]{6} + 12\sqrt[6]{243}$.

45) $-6 - \sqrt[6]{72} + \sqrt[10]{20000} + \sqrt[6]{648} + \sqrt[15]{922640625}$
$- \sqrt[10]{500000} + \sqrt[15]{474609375}$.

45a) $(9a^2 - 4b^2)\,b^2$.

46) $\sqrt[3]{(a^2 - b^2c)}$.

47) $\sqrt[6]{(a - b)^2\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$.

48) $\sqrt[4]{(66\sqrt{15} - 132)}$.

49) $\sqrt[3]{4}$.

50) $5\sqrt[4]{2}$.

51) $3\sqrt[8]{3ab^3}$.

52) $\sqrt[6]{\frac{125}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2000}$.

53) $6\sqrt[7]{16}$.

54) $\frac{3ab^2}{2}\sqrt[3]{ab^2}$.

55) $\frac{1}{4}\sqrt[4]{54}$.

55a) $3\sqrt[7]{(3a + 5b)^5}$.

56) $\frac{5}{24}\sqrt{3}$.

57) $\sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{1}{15}\sqrt{15}$.

58) $\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}}$.

59) $2 \sqrt[12]{\frac{c^5}{ab^2}} = \frac{2}{ab} \sqrt[12]{a^{11}b^{10}c^5}$.

60) $\frac{x^2}{y^2} \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{y}$.

61) $4 \sqrt[6]{\frac{125}{16}} = 2 \sqrt[6]{500}$.

62) $\frac{9bc^2}{8a} \sqrt[20]{\frac{b^9c^2}{a^7}}$.

63) $\sqrt[4]{(a^3 - 2b)}$.

64) $\sqrt{6} - 3 + \sqrt{3}$.

65) $2\sqrt{3} - \frac{15}{8}\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$.

66) $9\sqrt{2} + 12 + 9\sqrt{5}$.

67) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\sqrt[12]{3} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

68) $-\frac{11}{10}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{35} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

69) $16 - 2\sqrt{35}$.

70) $-6\sqrt{7} - 18$.

71) $10\sqrt{3} + 2\sqrt{30}$.

72) $6\sqrt{6} + 8$.

73) $\frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})$.

74) $-\frac{1}{53}(9\sqrt{15} - 24\sqrt{6} + 60 - 32\sqrt{10})$.

75) $\frac{6}{23} - \frac{1}{46}\sqrt{6}$.

76) $-\frac{14}{11}\sqrt{10} + \frac{12}{11}\sqrt{6} + \frac{21}{22}\sqrt{30} - \frac{27}{11}\sqrt{2}$.

77) $\frac{29}{26} - \frac{17}{26}\sqrt{3}$.

78) $\frac{47}{6}\sqrt{3} + \frac{47}{4}\sqrt{2} + \frac{47}{12}\sqrt{30}$.

79) $\frac{1}{47}(60\sqrt{6} + 144\sqrt{3} - 156\sqrt{2} - 36)$.

79a) $\frac{17}{86}\sqrt{6} - \frac{5}{43}$.

79b) $a + b + 2\sqrt{ab} - 2(\sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{ab^3})$.

Andeutung. Multiplicire Dividend und Divisor mit $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ und hierauf nochmals mit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

80) $2\sqrt[4]{(30\sqrt{2} + 33\sqrt{3} - 18\sqrt{6} - 55)}$.

§. 116.

1) $2i\sqrt{11} = 2\sqrt{-11}$.

2) $56i = 56\sqrt{-1}$.

3) $6i^2 \sqrt{35} = -6\sqrt{35}$.

4) $-30i\sqrt{24} = -60\sqrt{-6}$.

5) $-12i = -12\sqrt{-1}$.

6) $63 - 15\sqrt{6} - 12\sqrt{15}$.

7) $108 - 11\sqrt{-3}$.

8) $-85 + 26\sqrt{15}$.

9) -171.

10) $-272\sqrt{-2} - 216\sqrt{-3}$.

10a) $\sqrt{-1} - 2 = i - 2$.

10b) $3 - \sqrt{-1} = 3 - i$.

10c) $-(18 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{30})$.

11) 8.

12) $8\sqrt{-2}$.

13) $\frac{5\sqrt{5}}{i} = -5\sqrt{-5}$.

14) $\frac{2}{3i} = -\frac{2}{3}\sqrt{-1}$.

15) $4\sqrt{2} - 1 + 5\sqrt{-3} - 7\sqrt{-5}$.

16) $-9(\sqrt{-3} + \sqrt{-1})$.

17) $24 - 8\sqrt{6}$.

18) $6\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{10}$.

19) $-\frac{3}{7}\sqrt{-10} - \frac{2}{7}\sqrt{6} - \frac{4}{7}\sqrt{15} + \frac{2}{7}\sqrt{-1}$.

§. 118.

1) $x + 2y$.

2) $2m - 3x^2$.

2a) $3a^3b^4 - 5a^2c^5$.

3) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}y^3$.

3a) $\frac{2a^3b^2}{3c^4} - \frac{3c^5}{5a^2b^3}$.

4) $\frac{3a^2}{4b^3} + \frac{2b^6}{5c^3}$.

5) $\frac{4}{3}x^2y^{-1} - \frac{3}{2}x^{-1}y^3 = \frac{4x^2}{3y} - \frac{3y^3}{2x}$.

5a) $\frac{5c^3}{a^7b^3} - \frac{3a^6b^5}{c^7}$.

6) $2m + n + 3p$.
7) $2x^2 - 3xy + 4y^3$.
7a) $3a^3b^2 - 2ab^3 + 4a^2bc^3$.
8) $2a^{2m} - 3b^{m+n} - \frac{4}{5}a^m b^n$.
8a) $3a^2 - 2b^3 + 4c^4 - 5d$.
8b) $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$.
8c) $3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt{b}$.
8d) $\sqrt{-a} + \sqrt{-b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{-1}$.
8e) $a^2 - 2b\sqrt{-1} + 3c\sqrt{2}$.
8f) $a\sqrt{b} - b\sqrt{a} + \sqrt{ab}$.
9) $1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{8} + \frac{a^6}{16} - \frac{5a^8}{128} + \ldots$
10) $x - \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{8x^3} - \frac{y^6}{16x^5} - \ldots$

§. 120.

1) $x - 2y$.
2) $3m^2 - 2n$.
3) $\frac{2a^2}{3b} + \frac{3b^2}{2a}$.
3a) $4a^3b^2c^2 - 2a^2b^3c^4$.
4) $\frac{4m^3}{5n^2} - \frac{n^3}{3mp^2}$.
5) $x - y + z$.
6) $2a^3 + 3ab + b^2$.
6a) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.
6b) $\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}$.
6c) $2 - 3\sqrt{-3}$.
7) $1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} - \frac{5a^3}{81} - \frac{10a^4}{243} - \ldots$
8) $a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}} + \ldots$

§. 123.

1) 19.
2) 65.
3) 81.
4) 136.
5) 395.
6) 792.
7) 3071.
8) 3184.
9) 21323.

10) 30621.
11) 25,6.
12) 3,42.
13) 0,945.
14) 1,77242 . . . .
15) 0,054772 . . . .
16) 29,3997 . . . .
17) 1,73338 . . . .
18) $\frac{2}{3}$.
19) $\frac{11}{12}$.
20) 0,86602 . . . .
21) 0,53033 . . . .
22) 0,79057 . . . .
23) 2,1602 . . . .
24) 1,3741 . . . .
25) 1,67518 . . . .
26) 1,54215 . . . .
27) 1,01242 . . . .
27a) 2,77308 . . . .
27b) 15,67515 . . . .

§. 126.

1) 15.
2) 29.
3) 48.
4) 249.
5) 695.
6) 6,29.
7) 0,0876.
8) 1,6774 . . . .
9) 7,975 . . . .
10) 8,9461 . . . .
11) 16,2074 . . . .
12) 18,704 . . . .
13) 0,0315 . . . .
14) 0,70051 . . . .
15) 7,1454 . . . .
16) 2,57207 . . . .
17) 3,3821 . . . .
18) 0,098449.
19) 1,2.
20) 9,2336 . . . .
21) 2,1547 . . . .

§. 128.

1) 38.
2) 0,4.
3) 0,8512.
4) 1,9797 . . . .
5) 3,0871 . . . .
6) 2,8891 . . . .
7) 2,5038 . . . .
8) 0,93908 . . . .

§. 130.

1) $\frac{1}{2}(\sqrt{22} + \sqrt{2})$.
2) $10 + 2\sqrt{3}$.
3) $\frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{10})$.
4) $10 - \sqrt{72} = 10 - 6\sqrt{2}$.
5) $\sqrt[4]{192} + \sqrt[4]{48} = 2(\sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{3})$.

Andeutung. Setze $A = 12\sqrt{3}$, $B = 16 . 24 = 384$ 2c.

6) $3(\sqrt{24} + \sqrt{6})$.
7) $(1 - \sqrt{b})\sqrt{a}$.
8) $x + \sqrt{y}$.

§. 132.

1) $\sqrt{28} + \sqrt{-7} = (2 + i)\sqrt{7}$.

2) $\sqrt{12} - \sqrt{-3} = (2 - i)\sqrt{3}$.

3) $\sqrt{20} + \sqrt{-5} = (2 + i)\sqrt{5}$.

4) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{-6} = \frac{1}{2}(3 + i)\sqrt{6}$.

5) $\sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(7 + i)\sqrt{2}$.

§. 134.

1) $a^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{a^{13}} = a^2\sqrt[6]{a}$.

2) $24\, a^{-\frac{3}{4}} = 24\sqrt[4]{a^{-3}} = \frac{24}{a}\sqrt[4]{a}$.

3) $10x^{\frac{17}{12}}\, y^{\frac{7}{3}} = 10\sqrt[12]{x^{17}\, y^{28}} = 10xy^2\sqrt[12]{x^5\, y^4}$.

4) $6\,(m + 2n)^{\frac{49}{30}} = 6\,(m + 2n)\sqrt[30]{(m + 2n)^{19}}$.

5) $a^{\frac{6}{5}} - b^{\frac{10}{3}} = a\sqrt[5]{a} - b^3\sqrt[3]{b}$.

6) $$\frac{a^5y}{b^7z^2}\sqrt[15]{\frac{y^4}{x^{14}z^7}} - \frac{b^2}{a^6z}\sqrt[21]{\frac{1}{x^{10}y^4z^5}} + \frac{a^4y}{x^3z}\sqrt[12]{\frac{y^5}{xz^2}} - \frac{y}{ab^2}\sqrt[10]{x^9yz^7} + \frac{b^7xz}{a^{12}}\sqrt[14]{\frac{x^5z^{13}}{y^5}} - \frac{b^5yz^2}{a^2x}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}.$$

7) $a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$.

8) $\frac{3}{5}a^{\frac{1}{12}} = \frac{3}{5}\sqrt[12]{a}$.

9) $2ab^{-\frac{2}{15}}\, c^{-\frac{5}{8}} = \frac{2a}{\sqrt[120]{b^{16}\, c^{75}}}$.

10) $a^{\frac{1}{20}}b^{\frac{1}{12}}c^{\frac{1}{6}} = \sqrt[60]{a^3b^5c^{10}}$.

11) $a^{\frac{5}{24}}\, b^{\frac{1}{30}} - a^{\frac{1}{12}}\, b^{-\frac{3}{35}} + 4a^{-\frac{7}{24}}\, b^{-\frac{2}{5}}$.

12) $2x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{5}{6}} - 3x^{\frac{4}{5}}\, y^{\frac{7}{8}} = 2\sqrt[6]{x^4y^5} - 3\sqrt[40]{x^{32}y^{35}}$.

13) $a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{5}{9}} = \sqrt[18]{a^9b^{10}}$.

14) $a^{-\frac{7}{48}}\, b^{\frac{35}{192}}\, c^{-\frac{7}{40}} = \sqrt[960]{\frac{b^{175}}{a^{140}\, c^{168}}}$.

15) $$\frac{(a - b)^{\frac{2}{9}}\,(c - d)^{\frac{1}{6}}}{f^{\frac{4}{15}}\, g^{\frac{1}{8}}} = \sqrt[360]{\frac{(a - b)^{80}\,(c - d)^{60}}{f^{96}\, g^{45}}}.$$

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 138.

1) a) 2; b) 3; c) 4.

1a) 8.

Andeutung. $4^8 = 65536$.

1b) 5.

1c) 6.

1d) Für die Basis 4.

1e) „ „ „ 5.

1f) „ „ „ 3,5.

2) $m \log a + n \log b$.

2a) $\log a + p \log b + \log c$.

2b) $\log a + n \log b + p \log c$.

2c) $x \log a - y \log b$.

2d) $m \log a + n \log b - p \log c$.

2e) $\frac{\log a + n \log b}{m}$.

2f) $\log a + \frac{n \log b}{m}$.

2g) $m \log a + n \log b + \frac{q \log c + r \log d}{p}$.

3) $\frac{m \log a + n \log b + p \log c}{r}$.

3a) $\frac{y \log a - z \log b}{x}$.

3b) $\log (a^m + b^n) + \frac{p \log c - \log q}{2}$.

4) $\frac{a \log x}{b} + \frac{c \log y}{d} - \frac{f \log z}{g}$.

5) $m \log a + \frac{p \log b - q \log c}{n}$.

5a) $\frac{1}{m}\left[\frac{\log b}{n} + \log a\right]$.

6) $m \log (a - b) + \frac{p \log c}{n} - \left(9 \log (g + h) + \frac{r \log d}{3}\right).$

6a) $\frac{1}{3}\left[\log a + \frac{1}{3}\left(\log a + \frac{1}{3} \log a\right)\right].$

6b) $m \log a + \frac{1}{n}\left[p \log b + \frac{1}{q}\left(r \log c + \frac{t}{s} \log d\right)\right].$

7) $5 \log a + \frac{1}{m}\left[8 \log b + \frac{2 \log c - 3 \log d}{n} - \left(7 \log g + \frac{3}{q} \log (h - k)\right)\right].$

8) $\frac{a^m}{\sqrt[m]{b^n}}.$

9) $\frac{a^5 \sqrt[m]{b^7}}{(a - b)^4 \sqrt[n]{\frac{x^5}{y^3}}}.$

9a) $\frac{a + b}{a - b} \sqrt[m]{\frac{\sqrt[p]{c^r}}{d^q}}.$

§. 142.

1) 4,8946372.
1a) 1,6678450.
2) 1,6783818.
2a) 5,5851222.
3) 0,5760417.
3a) 0,9931275 — 1.
4) 0,8341472 — 1.
4a) 0,8370073 — 2.
5) 0,8707432 — 3.
5a) 0,8325089 — 5.
6) 3,8856908.
6a) 1,5130790.
7) 0,6796605.
7a) 0,8441689 — 1.
8) 0,6291945 — 2.
8a) 6,5905844.
9) 3,5961333.
10) 1,8742314.
11) 1,4132732.
12) 0,6971002 — 2.
13) 0,4050120 — 1.
14) 1,96416315.
15) 0,2374952.
16) 0,4711494 — 1.
17) 0,9456267 — 4.
18) 0,0653214.

---

19) 6679,6.
20) 887,962.
21) 24,777.
22) 1,66763.
23) 704,0391.
24) 586182,4.
25) 0,3789914.
26) 0,001989547.
27) 0,01061662.
28) 0,0001001682.

---

29) 5,960462.
30) 0,00897344.
31) 1,423551.
32) 0,9170523.
33) 1,081936.
34) 1,274133.
35) 3,24926.
36) 1,064229.
37) 6,277171.
38) 1,843645.
38a) 1,794062.
38b) 4,810992.
39) 2,118813.
40) 0,3419342.
41) — 11,37274.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 149.

1) a) $x = \frac{mp}{n}$.

b) $x = 150$.

c) $x = 6\frac{28}{279}$.

d) $x = \frac{p}{m^2}$.

e) $x = \frac{3a^2b}{5c}$.

f) $x = 6$.

Andeutung. Nach §. 147. 8.

g) $x = \frac{a(b - c)}{b + c}$.

Andeutung. Nach §. 147. 9.

h) $x = \frac{bc - ad}{b + d}$.

Andeutung. Nach §. 147. 10.

i) $x = \frac{ad - bc}{a + b + c + d}$.

k) $x = 9$.

Andeutung. Erhebe sämmtliche Glieder zum Quadrat (§. 147. 12) und benutze dann §. 147. 8.

l) $x = 9$.

2) $(a + b) f : c = d : x$.

3) $x = \frac{d}{a^2}$.

4) 15 fl. 18 kr.
5) 126 fl. 40 kr.
6) $\frac{bm_1}{m}$ würtemb. Fuß.
6a) 12 fl. 5 kr.
6b) 9 Kreuzer.
6c) $11\frac{1}{2}$ Stunden.
6d) 1720 Bäume.
7) 20 Tage.
8) 180 Ellen.
9) $3\frac{1}{3}$ Jahr.
10) $5766\frac{2}{3}$ fl.
10a) Zu $6\frac{3}{5}$ %.
10b) 40 Arbeiter.
10c) Um 247 fl. 30 kr.
10d) $644\frac{4}{9}$ fl.
10e) $28\frac{4}{7}$ %.
10f) Zu 1 fl.
10g) $565\frac{1}{8}$ fl.
10h) $2\frac{3}{4}$ Jahr.
10i) 5 %.
10k) $6\frac{1}{4}$ %.
11) $11\frac{2}{3}$ Ellen.
12) 45 Tage.
13) 10 Maurer.
13a) 29,325 fl.
13b) Zu 1 fl. 15 kr.
13c) 103 fl. oder $12\frac{7}{8}$ %.
14) $8\frac{3}{4}$ Kreuzer.
15) $89\frac{16}{105}$ Thlr.
16) 4 Bogen.
16a) 1 Kreuzer.
16b) $1794\frac{185}{307}$ Thlr.
16c) 2 Thlr. 23,8 Sgr.
16d) 3053,57 Bco. Mk.
16e) Bad. Fuß : bair. Fuß = 405 : 394.

Andeutung. Bestimme zuerst nach der Kettenregel das Verhältniß und verfahre alsdann nach §. 86.

16f) 1 wien. Pfd. : 1 Zollpfund = 3761 : 3358.

Achter Abschnitt.

Lehre von den Gleichungen.

§. 153.

1) x = 3.
1a) x = 5.
1b) x = 6.
1c) x = 4.
1d) x = 3.
1e) x = 6.
1f) x = 1.
1g) x = 2.
1h) x = − 4.
1i) x = − 1.
1k) x = 3.
2) x = 20.
3) x = 10.
4) x = 12.
5) x = 0,319 . . .
6) x = 4.
7) y = $9\frac{5}{22}$.
8) z = $1\frac{97}{237}$.

9) $x = 6.$
10) $x = 10.$
11) $y = -1\frac{4}{7}.$
11a) $x = 4.$
12) $x = 1,780204 \ldots$
12a) $x = 2.$
12b) $x = -4.$
13) $x = 5\frac{9}{11}.$
14) $x = 4,872.$
15) $x = \frac{5}{6}.$
16) $x = 4\frac{2}{7}.$
16a) $x = a^2.$
16b) $x = 6.$
17) $z = 2.$
18) $x = \frac{4ab}{2a - b}.$
19) $x = -a.$
20) $x = \frac{np(m + n)}{mp + n^2}.$
21) $x = \frac{acd + b^2d - bc^2}{acd - b^2d + bc^2}.$
22) $x = \frac{4}{9}.$
23) $y = \frac{13a + 6(b - c)}{89}.$
23a) $x = \frac{a - c}{b - d}.$
24) $z = \frac{a}{2b - 1}.$
24a) $x = 2a.$
24b) $x = 8.$
24c) $x = 3.$
25) $y = \frac{a^2 - bd}{cd - ab}.$
25a) $x = \frac{\log c - \log a}{\log b}.$
25b) $x = \frac{\log c}{\log a + \log b}.$
25c) $x = \frac{\log c}{\log a - \log b}.$
25d) $x = \frac{n \log b - m \log a}{\log a - \log b}.$
25e) $x = \frac{q(\log a - \log b) - s(\log c - \log d)}{p(\log a - \log b) - r(\log c - \log d)}.$
25f) $x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$

25g) $x = 2$.

25h) $x = 2$.

25i) $x = \frac{n \log b - m \log a}{\log a + \log b}$.

26) $x = \frac{\log c}{\log a + 2 \log b}$.

27) $x = \frac{n \log a - q \log b - r \log c - s \log d}{m \log a + p \log b - \log c - n \log d}$.

28) $x = 3$.

29) $x = 6,9552$.

30) $x = 0,58597$.

31) $x = 0,13604$.

32) $x = 2$.

32a) $x = 3$.

32b) $x = 4$.

32c) $x = 2$.

32d) $x = 3$.

§. 155.

1) 31 und 55.

2) A = 475 fl.; B = 775 fl.

3) 12.

4) 30 und 105.

Andeutung. Ist x der eine Theil, so ist der andere $3\frac{1}{2}x$ u. s. w.

5) 124 und 216.

Andeutung. Die eine Zahl sei x, so ist die andere $92 + x$, also $x + (92 + x) = 340$.

6) 840.

7) 210 und 330.

8) A = 6800 fl.; B = 11900 fl.

9) 105.

10) 24 und 42.

Andeutung. Der eine Theil sei x, so ist der andere $66-x$ u. s. w.

11) A = 12000 fl.; B = 3000 fl.; C = 1000 fl.

Andeutung. Setze das Vermögen des $C = x$ u. s. w.

12) A = 2956 fl.; B = 1478 fl.; C = $1847\frac{1}{2}$ fl.

Andeutung. Setze den Antheil von $C = x$, so ist der des $B = \frac{4x}{5}$ und der des $A = \frac{8x}{5}$ u. s. w.

13) A = 2400 fl.; B = 1600 fl.; C = 800 fl.

Andeutung. Bezeichnen wir die zu vertheilende Summe durch x, so erhält A $\frac{x}{2}$, B $\frac{x}{3}$ und es ist somit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 800 = x$.

14) Sie erhalten der Reihe nach 19, 23, 27 und 31 Nüsse.

15) A 2400 fl.; B 3600 fl.; C 9000 fl.; D 12000 fl.

Andeutung. Setze den Antheil des D = x u. s. w.

15a) A = 500 Mrg.; B = 800 Mrg.; C = 1000 Mrg.; D = 1550 Mrg.; E = 1200 Mrg.

16) A hat $175\frac{1}{5}$, B $48\frac{4}{5}$ Morgen.

Andeutung. A habe x Morgen, so hat B (224 — x) Morgen, also ist $x + 20 = 4\,(224 - x)$ u. s. w.

17) 54 Schüler.

Andeutung. $\frac{x}{3} + 7 = \frac{x}{2} - 2.$

18) 14 Gulden.

19) 240 Gulden.

Andeutung. $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + 82 = x.$

20) 24.

20a) 124 Morgen Buchen, 520 Morgen Eichen, 864 Mrg. Kiefern.

Andeutung. Bezeichnet x die Anzahl der Morgen, welche mit Kiefern besetzt sind, so folgt

$$\frac{3}{8}x - 200 + \frac{5}{9}x + 40 + x = 1508 \text{ ꝛc.}$$

21) Um 10.

22) Vermögen = 36600 fl. Die Kapitalien waren der Reihe nach: 9150 fl., 14640 fl., 12200 fl. und 610 fl.

Andeutung. Das Vermögen sei x, so stehen $\frac{x}{4}$ zu 4%, $\frac{2x}{5}$ zu $4\frac{3}{4}$% $\frac{x}{3}$ zu $4\frac{1}{2}$% und $x - \left(\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{3}\right)$ zu 5%. Bestimme nun die jährlichen Zinsen dieser Kapitalien und setze deren Summe = $149\frac{1}{2}$.

23) 6.

24) 150 Ohm von der 1ten und $166\frac{2}{3}$ Ohm von der 2ten Sorte.

Andeutung. Er habe x Ohm von der ersten Sorte, so hat er von der zweiten $(316\frac{2}{3} - x)$ Ohm. Im ersten Falle bleiben ihm nach dem Verkaufe noch $x - \frac{x}{3}$, im zweiten noch $316\frac{2}{3} - x - \frac{316\frac{2}{3} - x}{4}$. Bilde nun die Bedingungsproportion und hieraus die Gleichung.

25) Nach 55maliger Wiederholung.

Andeutung. $720 - 4x = 225 + 5x$ u. s. w.

26) 62 Pfd. von der ersten, 17 Pfd. von der zweiten Sorte.

Andeutung. $\frac{8}{15}x + \frac{1}{5}(x - 45) = 43\frac{4}{15}$ fl.

27) 70 fl. in preuß. Thlr. und 56 fl. in Fünffrkthlr.

Andeutung. Er habe x pr. Thlr. und (64 — x) Fünffrkthlr., dann ist $\frac{7}{4}x + \frac{7}{3}(64 - x) = 126$.

28) Nach 8 Jahren 7 Monaten.

Andeutung. Die baaren Werthe müssen offenbar in beiden Fällen einander gleich sein. Da nun 3800 fl., welche nach 3 Jahren fällig sind, einem Baarwerth von $\frac{100 \cdot 3800}{115}$ fl. entsprechen u. s. w., so erhält man die Gleichung:

$$\frac{380000}{115} + \frac{550000}{135} + \frac{270000}{170} + \frac{319686}{195} = \frac{100}{100 + 5x}(3800 + 5500 + 2700 + 3196{,}86).$$

29) 2400 fl.

Andeutung. $x + \frac{5 \cdot 10 \cdot x}{100} = 3600$.

30) $x = 12$.

Andeutung. Die Null zur Rechten weglassen, heißt durch zehn dividiren.

31) $x = \frac{ade}{fd - ce}$ Würfe.

Andeutung. Macht B x Würfe, so macht A während dieser Zeit $\frac{cx}{d}$ Würfe; A hat also im Ganzen $a + \frac{cx}{d}$ Würfe gemacht. Das Pulver, welches B zu einem Wurfe braucht, sei y, so braucht A zu jedem Wurfe $\frac{ey}{f}$; folglich hat A im Ganzen $\left(a + \frac{cx}{d}\right)\frac{ey}{f}$ und B y Pulver verbraucht. Man erhält demnach die Bedingungsgleichung

$$\left(a + \frac{cx}{d}\right)\frac{ey}{f} = yx \text{ u. s. w.}$$

31a) 700 Sprünge.

Andeutung. Hat der Hund noch x Sprünge zu machen, so hat der Hase, bis er eingeholt wird, noch $\frac{6x}{5}$ Sprünge zu machen. Im Ganzen hat dieser alsdann $60 + \frac{6x}{5}$ Sprünge gemacht. Da aber ein Hasensprung $= \frac{7}{9}$ Hundesprung beträgt, so sind alle vom Hasen gemachte Sprünge $= \frac{7}{9}\left(60 + \frac{6x}{5}\right)$ Hundesprünge und man hat daher

$$x = \frac{7}{9}\left(60 + \frac{6x}{5}\right).$$

32) Zu 20 Kreuzer.

Andeutung. Nehmen wir an, er gäbe x Maas um 1 fl., so kostet 1 Maas $\frac{1}{x}$ fl., also 270 Maas $\frac{270}{x}$ fl. Daher ist

$$\frac{270}{x} + 10 = 100,$$

somit $x = 3$ Maas. Folglich kostet 1 Maas $\frac{1}{3}$ fl. $= 20$ kr.

33) Um 150 fl.

Andeutung. $210 - x = 2\,(x - 120)$.

34) 24 Arme; 96 fl.

Andeutung. Die Anzahl der Armen sei x, so hat man

$$3\tfrac{1}{2}x + 12 = 4\tfrac{1}{2}x - 12 \text{ u. s. w.}$$

35) 420 fl.

Andeutung. $\frac{x + 5}{17} = \frac{x - 20}{16}$. (Vergl. §. 154. Beisp. 5.)

36) 8 Tage.

Andeutung. Setzen wir die Anzahl der Tage $= x$, so fertigt A in dieser Zeit $\frac{x}{24}$, B $\frac{x}{20}$, C $\frac{x}{30}$ und da sie zusammen die ganze Arbeit vollenden, so folgt $\frac{x}{24} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$ u. s. w.

37) In 1 Stunde $28\frac{34}{107}$ Min.

Andeutung. Vergl. Nr. 36.

38) In 3 Stunden.

Andeutung. $\frac{1\frac{3}{8}}{6} + \frac{1\frac{3}{8}}{8} + \frac{1\frac{3}{8}}{x} = 1$.

39) 15 Ctnr.; das Pfd. zu 15 Kreuzer.

Andeutung. Das Pfund koste x fl., so hat er $\frac{375}{x}$ Pfund eingekauft. Da er 10% gewann, so nahm er im Verkaufe $412\frac{1}{2}$ fl. ein, indem er das Pfund um $\left(x + \frac{1\frac{1}{2}}{60}\right)$ fl. gab. Die Anzahl der verkauften Pfunde betrug daher $\frac{412\frac{1}{2}}{x + \frac{1\frac{1}{2}}{60}}$. Da aber die Anzahl der Pfunde im Einkauf und Verkauf dieselbe war, so ist nun leicht die Bedingungsgleichung zu bilden.

40) $3\frac{1}{2}$ Centner.

Andeutung. $12 - x = x + 5$.

41) Dem B 2800 fl., dem C 3000 fl.

Andeutung. $\frac{4\frac{1}{2}x}{100} + \frac{5\,(x + 200)}{100} = 276$.

41a) 1200 Morgen Wald.

Andeutung. Bezeichnet x die Anzahl der Morgen Wald, so hat man $\frac{x}{8}$ Mrg. Wald $= \frac{7x}{80}$ Mrg. Wiesen, $\frac{x}{5}$ Mrg. Wald $= \frac{49x}{600}$ Morg. Wbrg., $\frac{x}{4}$ Mrg. Wald $= \frac{77x}{480}$ Morg. Feld; also

$$x - \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{5} + \frac{x}{4}\right) + \frac{7x}{80} + \frac{49x}{600} + \frac{77x}{480} = 905\tfrac{1}{2}.$$

42) A = 180 fl., B = 120 fl., C = 100 fl.

Andeutung. Besitzt A anfänglich x fl., so hat B $\frac{2x}{3}$, C $400 - \frac{5x}{3}$.

Bestimme nun hieraus, was jeder nach der ersten Verschenkung, darnach was jeder nach der zweiten Vertheilung hat und bilde aus den gefundenen Resultaten endlich die Bedingungsgleichung

$$720 - 3x + 40 = \frac{9x}{5} - 240 + \frac{6x}{5} - 80.$$

43) Das erste 100, das zweite 120 und das dritte 150 Maas.

Andeutung. Der Inhalt des dritten Fasses sei x, so ist der des zweiten $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$ und der des ersten $= \left(x - \frac{x}{5}\right) - \left(\frac{x - \frac{x}{5}}{6}\right) = \frac{2x}{3}$ u. s. w.

44) $12\frac{2}{3}$ fl.

Andeutung. Hat A x fl. gewonnen, so blieben dem B noch (21 — x) fl. Daher ist $21 - x = \frac{12\frac{1}{3} + x}{3}$.

45) 80000 fl.

Andeutung. Setze den Werth der Güter = x, berechne die Zinsen von $\frac{3x}{4}$ zu 5% und von $\frac{x}{4}$ zu $7\frac{1}{2}$% und setze deren Summe = 4500.

45a) 50 Gulden.

Andeutung. Hatte er zu Anfang x fl., so blieben ihm nach dem ersten Spiele noch $\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ fl., nach dem zweiten $\left(\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right)$ fl. und nach dem dritten noch $\left(\frac{x}{8} - \frac{17}{4}\right)$ fl. Es ist daher

$$\frac{x}{8} - \frac{17}{4} = \frac{x}{25} \text{ u. s. w.}$$

46) 4 Freunde erbten zusammen 4800 fl.

Andeutung. Die Erbschaft sei x, so erhält der Jüngste $300 + \frac{x - 300}{5}$ und der zweite $600 + \frac{x - 600 - \left(300 + \frac{x - 300}{5}\right)}{5}$

Da alle gleichviel erhalten sollen, so bilde hieraus die Bestimmungsgleichung und suche x = 4800 fl. Es erhält somit jeder 1200 fl. und die Anzahl der Freunde ist nun leicht zu berechnen.

47) 15 Herren und 12 Frauen.

Andeutung. Setze die Anzahl der Herren = x, so folgt

$$36x + (27 - x)\,30 = 900.$$

47a) B = 9000 fl., C = 3000 fl., D = 4000 fl., E = 1800 fl., F = 17200 fl.

48) Nach $\frac{100\,(K' - K) + K'p'n' - Kpn}{Kp - K'p'}$ Jahren.

Andeutung. $K + \frac{Kp\,(n + x)}{100} = K' + \frac{K'p'\,(n' + x)}{100}$.

49) A $3\frac{3}{4}$%, B $4\frac{1}{2}$%.

Andeutung. $\frac{3500x}{100} + \frac{4200\,(x + \frac{3}{4})}{100} = 320\frac{1}{4}$.

50) Das Pfund zu 36 kr.

Andeutung. Kostet das Pfund x Kreuzer, so ist
$(x + 6)\ 540 = 379\ .\ 60$ 2c.

51) 7.

Andeutung. $\frac{49}{x - 4} = \frac{122\frac{1}{2}}{\frac{29}{2} - x}$ u. s. w.

51a) 180 Maas von der besseren und 60 Maas von der geringeren Sorte.

Andeutung. $54x + (240 - x)\ 30 = 240\ .\ 48$ 2c.

52) 300 Maas.

Andeutung. Setzt er x Maas à 30 kr. zu, so ist
$(200 + x)\ 36 = 200\ .\ 45 + 30x$.

53) $7\frac{37}{173}$ Monate.

Andeutung. Tragen 100 fl. in 1 Mon. y fl. Zins, so ist der
Zins von 900 fl. in 6 Mon. = 54 y fl.
und „ 2100 „ „ 12 „ = 252 y fl.
Die 4 Personen brauchen also 900 + 54 y
„ 5 „ „ „ 2100 + 252 y.
Daher ist der Verbrauch 1 Person in 1 Monat

im ersten Falle $= \frac{900 + 54y}{4\ .\ 6} = 37\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}y$.

„ zweiten „ $= \frac{2100 + 252y}{5\ .\ 12} = 35 + 4\frac{1}{5}y$,

und aus der Gleichung

$$37\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}y = 35 + 4\frac{1}{5}y$$

folgt $y = 1\frac{11}{39}$% per Monat.
Jede Person braucht demnach in beiden Fällen monatlich

$$35 + 4\frac{1}{5}\ .\ 1\frac{11}{39} = 40\frac{5}{13} \text{ fl.}$$

Es sei nun x die Anzahl der Monate, welche die 9 Personen ausreichen, so ist der Zins für diese Zeit $= \frac{2400\ .\ 1\frac{11}{39}\ .\ x}{100} = \frac{400x}{13}$ und der ganze Aufwand $= 2400 + \frac{400x}{13}$. Da aber diese 9 Personen monatlich $9\ .\ 40\frac{5}{13} = 363\frac{6}{13}$ fl., also in x Monaten auch $363\frac{6}{13}\ .\ x$ fl. verzehren, so heißt die Bedingungsgleichung

$$363\frac{6}{13}x = 2400 + \frac{400}{13}x.$$

54) $\frac{a\,(100 + p)\,(100 + p')}{100\,(p - p')}$.

Andeutung. Setze die Schuldsumme = x, bringe sie für beide Fälle auf den baaren Werth und bilde hieraus die Bedingungsgleichung.

54a) 40 fl. Prämie.

Andeutung. Bezeichnet x die Prämie, so folgt

$$\frac{5\ .\ 760}{100} + \frac{5x}{100} = x.$$

55) $133\frac{1}{3}$ von der besseren, $66\frac{2}{3}$ von der geringeren Sorte.

Andeutung. Setze die Anzahl der Pfunde der einen Sorte = x ꝛc.

56) Summe = 3000 fl.

56a) 14800 fl.

Andeutung. Das anfängliche Kapital sei x, so war dasselbe am Ende des ersten Jahres $= x - 1000 + \frac{1}{3}(x - 1000) = \frac{4x - 4000}{3}$; am Ende des zweiten Jahres $= \frac{4x - 4000}{3} - 1000 + \frac{1}{3}\left(\frac{4x - 4000}{3} - 1000\right) = \frac{16x - 28000}{9}$; am Ende des dritten Jahres $= \frac{64x - 148000}{27}$. Man hat daher

$$\frac{64x - 148000}{27} = 2x \text{ ꝛc.}$$

57) Auf 700 fl.

Andeutung. $x + \frac{12x}{100} = 784$.

58) 8400 fl. und 7250 fl.

59) 14,99 Pfd. Gold und 5,01 Pfd. Silber.

Andeutung. Die Krone enthalte x Pfd. Gold, also (20 — x) Pfd. Silber, so ist

$$\frac{x}{19} + \frac{20 - x}{10} = 20 - 18{,}71 = 1{,}29.$$

60) $17\frac{5}{11}$ karatig.

Andeutung. $(4 + 1\frac{1}{2})\, x = 4 \,.\, 24$.

61) $2\frac{2}{5}$ Mark Kupfer.

Andeutung. $(12 + x)\, 20 = 12 \,.\, 24$.

62) 18 Mark.

Andeutung. $10x = 15 \,.\, 12$.

63) $14\frac{2}{5}$ Mark 14löth. und $9\frac{3}{5}$ Mark 9löth.

Andeutung. Nimmt er x Mark 14löth., so hat er (24 — x) Mark 9löth. zu nehmen; daher

$$14x + (24 - x)\, 9 = 24 \,.\, 12.$$

64) $\dfrac{A + B + C}{\dfrac{A}{a} + \dfrac{B}{b} + \dfrac{C}{c}}$ pfündig.

Andeutung. In A Pfund a pfündigem Zinn sind $\frac{A(a-1)}{a}$ Pfd. reines Zinn u. s. w. In (A + B + C) x pfünd. Zinn befinden sich $\frac{(A + B + C)(x - 1)}{x}$ reines Zinn. Daher ist

$$\frac{A(a-1)}{a} + \frac{B(b-1)}{b} + \frac{C(c-1)}{c} = \frac{(A + B + C)(x - 1)}{x}.$$

65) 3 Mark Kupfer.

Andeutung. $(18 + x)\, 12 = 18 \,.\, 14$.

66) $x = \frac{b\,(d - c)}{a - d}$.

Andeutung. $bc + ax = (x + b)\,d$.

67) $7\frac{1}{2}$ Mark 15löth. und $4\frac{4}{5}$ Mark 10löth.

Andeutung. $15x + (12 - x)\,10 = 12\,.\,13$.

68) 4 Mark.

Andeutung. $(8 + x)\,12 = 8x + 8\,.\,14$.

69) Um 1 Stunde 40 Minuten.

69a) 90 Fuß.

Andeutung. Die Entfernung sei x. Der zuerst zurückgelegte Weg ist $x - 6$, nach der ersten rückgängigen Bewegung ist also der Abstand von A noch $(x - 6) - \frac{x - 6}{8} = (x - 6)\frac{7}{8}$. Nun bewegt sich der Körper vorwärts und ist endlich um $(x - 6)\frac{7}{8} + \frac{(x - 6)\frac{7}{8}}{14} = (x - 6)\,\frac{7}{8}\,.\,\frac{15}{4}$ von A entfernt ꝛc. Man erhält schließlich die Gleichung

$$(x - 6)\;\frac{7}{8}\,.\,\frac{15}{14}\,.\,\frac{7}{8}\,.\,\frac{8}{7} = x.$$

70) 12 Stunden nach der Abreise des B.

Andeutung. B brauche noch x Stunden, so legt er in dieser Zeit $\frac{5}{2}x$ und A $(8 + x)\,\frac{3}{2}$ Meilen zurück. Beide Wege sollen aber einander gleich sein u. s. w.

71) Nach $\frac{ab}{b' - b}$ Tagen.

Andeutung. $(a + x)\,b = b'x$.

72) Nach $\frac{s}{a + b}$ Tagen.

Andeutung. $ax + bx = s$.

73) $\frac{ac'}{c' - c}$ Sekunden nach dem Abgange des ersten Körpers.

Andeutung. $cx = c'\,(x - a)$.

74) Nach $15\frac{10}{19}$ Stunden.

Andeutung. A legt in $(x + 4)$ Stunden $\frac{12}{7}\,(x + 4)$ und B in x Stunden $\frac{14}{5}$ x Meilen zurück. Man hat daher

$$\frac{12}{7}\,(x + 4) + 10 = \frac{14}{5}x.$$

$6\frac{2}{3}$

74a) ~~10~~ Meilen.

Andeutung. Nehmen wir an, es sei der Courier, den Aufenthalt in Q abgerechnet, x Stunden fort gewesen, so hat er den Weg von P nach Q in $\frac{x}{3}$ Stunden zurückgelegt, da er die Rückreise nur mit der halben Geschwindigkeit machte, dazu also $\frac{2x}{3}$ Stunden brauchte. In den $\frac{x}{3}$ Stunden aber hat er einen Weg von $\frac{x}{3}\,.\,\frac{6}{5} = \frac{2x}{5}$ Meilen zurück-

gelegt. Die Entfernung der Orte P und Q ist somit $\frac{2x}{5}$ Meilen. Der Fußgänger hat aber allein $1\frac{1}{2}$ Meile und in den 4 Stunden $4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$ Meilen, dagegen gleichzeitig mit dem Courier noch in x Stunden $\frac{x}{4}$ Meilen zurückgelegt. Man hat daher

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{5}.$$

75) Nach 7 Sekunden.

Andeutung. $(8 + x)\, 20 + 50 = 50\,x$.

76) $10\frac{2}{3}$ Stunden nach der Abreise und $21\frac{1}{3}$ Meilen von O.

Andeutung. Sie seien x Stunden unterwegs, so ist

$$2x + \tfrac{5}{2}x = 48.$$

77) $15\frac{2}{3}$ Stunden nach dem Abgange des A und $31\frac{1}{3}$ Meilen von O.

Andeutung. $2x + \frac{5}{2}(x - 9) = 48$.

77a) $38\frac{1}{2}$ Meilen.

Andeutung. Der Eilwagen sei x Stunden unterwegs gewesen, so folgt: $\frac{3}{2}x = (x - 6\frac{5}{12})\, \frac{12}{5}$ rc.

78) $32\frac{8}{11}$ Min. oder 32 Min. $43\frac{7}{11}$ Sek. nach 6 Uhr.

Andeutung. Steht der Stundenzeiger auf 6, so steht der Minutenzeiger auf 12, und hat nun der Stundenzeiger noch x Minuten zurückzulegen, so braucht der Minutenzeiger noch $(6 \cdot 5 + x)$ Min. bis er über jenem steht. Nun verhalten sich aber die Wege wie die Geschwindigkeiten, also $(6 \cdot 5 + x) : x = 12 : 1$ rc.

79) Nach $\frac{abc}{bc - ab - ac}$ Stunden.

Andeutung. $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1$.

80) In $\frac{A\,(a - a')}{A + B}$ Tagen.

Andeutung. Brauchen die $(A + B)$ Arbeiter noch x Tage, so muß sein

$$(A + B)\, x + A a' = Aa.$$

81) 2200 Kubikfuß.

Andeutung. $x + \frac{3x}{12} + \frac{3x}{15} + \frac{3x}{4} = 1540$.

82) 8 fl. das Malter; täglicher Lohn = 1 fl.

Andeutung. Setze den Preis des Malters = x und drücke den Lohn für einen Tag in beiden Fällen aus rc.

82a) 125 Fuß weit.

Andeutung. Wenn A in 4 Stunden 100 c′ 500′ weit fördert, so fördert er x Kubikfuß in 10 Stdn. $\frac{125000}{x}$ Fuß weit und da B in

5 Stunden 75 Kubikfuß 1600′ fortschafft, so fördert er (x + 536) Kbfß. in 8 Stdn. $\frac{192000}{x + 536}$ Fuß weit. Man hat daher:

$$\frac{125000}{x} = \frac{192000}{x + 536} \text{ oder } x = 1000 \text{ Kubikfuß.}$$

Der Weg ist somit $= \frac{125000}{1000} = 125$ Fuß.

83) Zu 30 Kreuzer.

Andeutung. Setzen wir die Anzahl der vorräthigen Pfunde = x, so folgt aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{2}{5}x + 20 = \frac{17}{30}x - 42$$
$$x = 372 \text{ Pfd.}$$

Diese kosten also $372 \cdot \frac{2}{5} + 20 = 168\frac{4}{5}$ fl.
Er will gewinnen $17\frac{1}{5}$ fl.
also einnehmen 186 fl. u. s. w.

84) 6 Kinder und jedes erhielt 48 Nüsse.

Andeutung. Setze die Anzahl der Kinder = x 2c.

85) 28.

Andeutung. Die Ziffer der Zehner sei x, so ist

$$2\,(10x + 4x) = 40x + x - 26.$$

86) $x = \frac{bc^2 - ad^2}{c^2 - d^2}$.

Andeutung. $\sqrt{a - x} : \sqrt{b - x} = c : d$.

87) 248.

88) 422.

89) 54 Jahre.

90) Nach 8 Jahren.

Andeutung. $3\,(6 + x) = 34 + x$.

91) $\frac{100a}{100 + (n - m)\,p}$.

Andeutung. $x + \frac{x\,(n - m)\,p}{100} = a$.

92) 5 Monate.

Andeutung. Ist die Anzahl der Monate = x, so folgt
$250\,(10 + x) + 100\,(7 + x) + 200\,(5 + x) + 150\,(2 + x) = 800 . 10$.

93) Seiten: 4 Fuß uud 16 Fuß.

Inhalte: 16 Q.-Fuß und 256 Q.-Fuß.

Andeutung. Bezeichnet x die Seite des einen Quadrats, so ist die des anderen = 12 — x, drücke nun beide Inhalte aus 2c.

94) Um $1\frac{1}{3}$ Fuß.

Andeutung. $(8 - x)^2 = (5 + x)^2$.

§. 161.

1) x = 25, y = 15.

2) x = 4, y = 7.

3) $x = 2,\ y = 5.$
4) $x = 4,\ y = -\frac{3}{4}.$
4a) $x = 8,\ y = -4.$
5) $x = 4,\ y = 6.$
6) $x = 12,\ y = 10.$
6a) $x = 18,\ y = 30.$
7) $x = 7,\ y = 10.$
8) $x = 4,\ y = 9.$
9) $x = 1\frac{7}{8},\ y = 2\frac{2}{5}.$
10) $x = 12,\ y = 15.$
11) $x = 14,\ y = -4.$
12) $x = 20,\ y = 100.$
12a) $x = 2,\ y = 1.$
13) $x = 4,\ y = 7.$
14) $x = 15,\ y = 9.$
15) $x = 2,\ y = 3.$
16) $x = 9{,}6032\ \ldots,\ y = 2{,}9425\ \ldots$
17) $x = 2{,}5,\ y = 4{,}5.$
18) $x = 4,\ y = 6.$

Andeutung. Setze $\frac{1}{x} = X$ und $\frac{1}{y} = Y$, bestimme X und Y wie seither und daraus $x = \frac{1}{X},\ y = \frac{1}{Y}.$

19) $x = 2,\ y = 6.$
20) $x = 16,\ y = 36.$

Andeutung. Setze $\sqrt{x} = X,\ \sqrt{y} = Y$, bestimme X und Y und hieraus $x = X^2,\ y = Y^2.$

21) $x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$

22) $x = \frac{a_1 a_2 (b_2 c_2 - b_1 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ y = \frac{b_1 b_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$

23) $x = ab,\ y = cd.$

24) $x = \frac{2a^2 - c^2 - d^2}{2a},\ y = \frac{2b^2 + c^2 - d^2}{2b}.$

24a) $x = a,\ y = b.$

25) $x = \frac{c}{ab},\ y = \frac{2a + c}{b}.$

26) $x = \frac{(a - b)(ad - bc)}{ad - bc} = a - b,$

$y = \frac{(d - c)(ad - bc)}{ad - bc} = d - c.$

27) $x = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2}$, $y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 c_1 - a_1 c_2}$.

28) $x = \frac{df - cg}{2bcf - a(df + cg)}$, $y = \frac{df - cg}{b(df + cg) - 2adg}$.

29) $x = 2$, $y = 3$.

30) $x = 2$, $y = 3$.

§. 163.

1) 39 und 15.

2) A hat 150 fl., B hat 100 fl.

Andeutung. I $x - 25 = y + 25$.
II $x + 50 = 4(y - 50)$.

3) 8 und 12.

4) 5 und 9.

5) Ein Buchenstamm 12 fl., ein Tannenstamm 4 fl.

6) Der eine 250 fl., der andere 200 fl.

7) Die eine 60 fl., die andere 80 fl.

8) Das eine faßt 36, das andere 12 Maas.

9) 13 und 21.

Andeutung. I $x + \frac{x}{2} + y + \frac{y}{3} = 47\frac{1}{2}$.
II $5y - 3x = 66$.

10) 6 und 10.

11) 86.

Andeutung. Die Ziffer der Zehner sei x, die der Einer y, so folgt:
I $x = y + 2$
II $10x + y - (10y + x) = 18$.

11a) Ein Buchenstamm 12 fl., ein Eichstamm 18 fl.

12) $A = 4500$ fl., $B = 5500$ fl.

Andeutung. I $x + y = 10000$
II $10000 - \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{11}\right) = y + 2500$.

13) Ausgeliehen zu 4%, B gibt $4\frac{3}{4}$%.

Andeutung. I $\frac{90000}{100} y - \frac{90000}{100} x = 67\frac{1}{2}$.
II $2x \quad y = 3\frac{1}{4}$.

14) 16 und 24.

Andeutung. I $(x + 4)(y - 10) = xy - 104$
II $(x - 6)(y + 12) = xy - 24$.

15) a) Durch die eine $\frac{5}{8}$ Ohm, durch die andere $1\frac{5}{8}$ Ohm.
b) $17\frac{7}{9}$ Stunden.

Andeutung. I $3x + 5y = 10$
II $5x + 3y = 8$.
Hieraus findet man $x = \frac{5}{8}$, $y = 1\frac{5}{8}$. Brauchen nun beide zusammen zur Füllung z Stunden, so ist

$$\tfrac{5}{8}z + 1\tfrac{5}{8}z = 40.$$

16) 500 preuß. Thaler, 300 Kronenthaler.

17) Von der ersten Sorte 18 Kr., von der zweiten 25 Kr.

18) $\frac{11}{15}$.

19) Das eine enthält 24 Maas, das andere 30 Maas.

Andeutung. I $2(x - 6) = y + 6$
II $y - 6 = x$.

20) A = 8500 fl. zu 4%,
B = 10000 fl. zu $4\frac{1}{2}$%,
C = 15000 fl. zu $4\frac{3}{4}$%.

Andeutung. Hat A x fl. zu y% ausgeliehen, so ist:

$$\text{I}\quad \frac{(y + \frac{1}{2})(x + 1500)}{100} = \frac{xy}{100} + 110$$

$$\text{II}\quad \frac{(y + \frac{3}{4})(x + 6500)}{100} = \frac{xy}{100} + 372\tfrac{1}{2}.$$

21) A = 36000 fl. zu $4\frac{1}{2}$%.
B = 25000 fl. zu 4%.
C = 48000 fl. zu 5%.

Andeutung. B habe x fl. zu y% ausgeliehen, so hat man:

$$\text{I}\quad \frac{xy}{100} + 620 = \frac{11000 + x}{100}(y + \tfrac{1}{2})$$

$$\text{II}\quad \frac{xy}{100} + 1400 = \frac{23000 + x}{100}(y + 1).$$

22) 32 Kreuzer und 24 Kreuzer.

23) $\frac{ad\,(b - c)}{c\,(b - a)}$ Pfund Silber, $\frac{bd\,(a - c)}{c\,(a - b)}$ Pfund Gold.

Andeutung. Befinden sich in der Composition x Pfd. Silber und y Pfd. Kupfer, so wiegt Wasser von dem Volumen des Silbers $= \frac{x}{a}$ Pfd., von dem des Kupfers $= \frac{y}{b}$ Pfd. und von dem des Pokals selbst $= \frac{d}{c}$ Pfd. Man hat daher

$$\text{I}\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{d}{c}$$

$$\text{II}\quad x + y = d.$$

24) a) $4\frac{1}{2}$ Kubikfuß Kupfer, $5\frac{1}{2}$ Kubikfuß Zinn; b) das Kupfer wiegt $2138\frac{2}{5}$ Pfd., das Zinn $2168\frac{1}{10}$ Pfd.

Andeutung. Es seien x Kubikfuß Kupfer und y Kubikfuß Zinn in der Composition enthalten, so folgt:
I $x + y = 10$
II $8{,}8 \cdot 54 \cdot x + 7{,}3 \cdot 54 \cdot y = 4306\frac{1}{2}$.

25) Zu $\frac{b's - bs'}{ab' - a'b}$ fl. und $\frac{as' - a's}{ab' - a'b}$ fl.

Andeutung. $ax + by = s$
$a'x + b'y = s'$.

26) Der Vater 66, der Sohn 24 Jahre.

26a) Geschwindigkeit des $A = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$,

" " $B = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$.

Andeutung. Die Geschwindigkeit des A sei $= x$, die des B $= y$, so ist

$$\text{I } t_1x + t_1y = a \text{ oder } x + y = \frac{a}{t_1}$$
$$\text{II } t_2x - t_2y = a \;\;\text{"}\;\; x - y = \frac{a}{t_2}.$$

26b) Geschwindigkeit des $A = \frac{(t_2 + t_1)\,a}{(t_2 + t_1)\,t + 2t_1t_2}$,

" " $B = \frac{(t_2 - t_1)\,a}{(t_2 + t_1)\,t + 2t_1t_2}$.

Andeutung. Die Geschwindigkeit des A sei $= x$, die des B $= y$, so hat A bis zum ersten Zusammentreffen $(t + t_1)$ Sekunden gebraucht und es ist somit

$$\text{I } (t + t_1)\,x + t_1y = a.$$

Bis zum zweiten Zusammentreffen hat A $(t + t_2)$ Sekunden nach dem Abgange des B gebraucht, daher ist

$$\text{II } (t + t_2)\,x - t_2y = a.$$

27) $\frac{aa'\,(b - b') + a' - a}{a'b - ab'}$ Tage.

$\frac{bb'\,(a - a') + b' - b}{ab' - a'b}$ Stunden.

Andeutung. B sei x Tage unterwegs gewesen und habe y Stunden täglich gemacht, so hat man:

$$\text{I } xy = (x + a)\,(y - b)$$
$$\text{II } xy = (x + a')\,(y - b').$$

28) $\frac{h'\,(b' + b'') - b'\,h''}{a'b'' - a''b'}$ Männer.

$\frac{h'\,(a' + a'') - a'\,h''}{a''b' - a'b''}$ Frauen.

28a) $\frac{[(b_1 - a_1)\,t_2 - (b_2 - a_2)\,t_1]\,(a_1b_2 - a_2b_1)}{2\,(a_1t_2 - a_2t_1)\,(b_1t_2 - b_2t_1)}$ Fuß und

$\frac{[(b_1 + a_1)\,t_2 - (b_2 + a_2)\,t_1]\,(a_1b_2 - a_2b_1)}{2\,(a_1t_2 - a_2t_1)\,(b_1t_2 - b_2t_1)}$ Fuß.

Andeutung. Die Geschwindigkeiten seien bezüglich x und y, so ist die Geschwindigkeit des Bootes stromaufwärts $= \frac{1}{x+y}$ und stromabwärts $= \frac{1}{x-y}$ 2c. Daher ist

$$\text{I} \quad \frac{a_1}{x+y} + \frac{b_1}{x-y} = t_1$$

$$\text{II} \quad \frac{a_2}{x+y} + \frac{b_2}{x-y} = t_2.$$

29) 345.

Andeutung. Bezeichnen wir die Hunderter und Zehner bezüglich durch x und y, so ist die Ziffer der Einer = 12 — x — y und man erhält

$$\text{I} \quad x + y = 12 - x - y + 2$$

$$\text{II} \quad 100\,(12 - x - y) + 10y + x = 100x + 10y + 12 - x - y + 198.$$

30) 82.

Andeutung. Die Ziffer der Zehner sei x, die der Einer y, so folgt

$$\text{I} \quad 10x + y = (x + y)\,8 + 2$$

$$\text{II} \quad 10x + y = (10y + x)\,2 + 26.$$

31) Anzahl der Ellen = 150. Jede der 60 Ellen wurde zu 2 fl. verkauft.

Andeutung. Die Anzahl der eingekauften Ellen sei x, der Verkaufspreis der 60 Ellen = y, so ist

$$\text{I} \quad 1\tfrac{3}{4}x = 60y + (x - 60)\,1\tfrac{4}{5} - 19\tfrac{1}{2}$$

$$\text{II} \quad 1\tfrac{3}{4}x = 100y + (x - 100)\,1\tfrac{1}{4}.$$

32) A 120 Tage, B 162 Tage.

Andeutung. A habe x Tage, B y Tage gebraucht, so folgt:

$$\text{I} \quad \frac{15}{x} + \frac{20\frac{1}{4}}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\text{II} \quad \frac{80}{x} + \frac{54}{y} = 1.$$

33) Durch A in 40 Stdn.; durch B in 60 Stdn.

Andeutung.

$$\text{I} \quad \frac{5}{x} + \frac{7\frac{1}{2}}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\text{II} \quad \frac{15}{x} + \frac{37\frac{1}{2}}{y} = 1.$$

§. 169.

1) $x = 4,\ y = 2,\ z = 3.$

2) $x = \frac{a+c-b}{2},\ y = \frac{a+b-c}{2},\ z = \frac{b+c-a}{2}.$

3) $x = 5,\ y = 2,\ z = 10.$

4) $x = 12,\ y = 16,\ z = -10.$

5) $x = 6,\ y = 9,\ z = 15.$

6) $x = 3,\ y = 4,\ z = 5.$

6a) $x = 91,\ y = 87,\ z = 63.$

7) $x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$, $y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$,

$$z = \frac{c_3 (a_1 b_2 - b_1 a_2) - a_3 (a_1 c_2 - c_1 a_2)}{b_3 (a_1 b_2 - b_1 a_2)}.$$

8) $x = 10$, $y = 15$, $z = 3$.
9) $x = 8$, $y = 4$, $z = 3$.
10) $x = -1$, $y = -5$, $z = 4$.
10a) $x = 16$, $y = 18$, $z = 21$.
10b) $x = 41$, $y = 31$, $z = 17$.
10c) $x = 3$, $y = 11$, $z = 27$.
11) $x = 2\frac{2}{3}$, $y = 2\frac{2}{5}$, $z = 3$.
12) $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{1}{3}$, $z = 4\frac{1}{4}$.
13) $x = 12$, $y = 16$, $z = 5$.
14) $x = 12$, $y = 16$, $z = 24$.
15) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$.
16) $x = 100$, $y = 200$, $z = 300$, $u = 100$.
17) $x = 20$, $y = 40$, $z = 10$, $u = 9$.
18) $x = 3$, $y = 7$, $z = 5$, $u = 0$.
19) $x = 10$, $y = 12$, $z = 15$, $u = 20$, $v = 30$.
20) $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$, $u = 1$, $v = 10$.
20a) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 2$, $v = 3$.
21) $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $u = 1$, $v = -1$, $w = 0$.
22) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 7$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$.
23) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$.

Andeutung. Dividire jede der sechs Gleichungen durch das Produkt der Unbekannten der entsprechenden rechten Seite.

24) A 3475 fl., B 2725 fl., C 3125 fl.
25) Im ersten 80, im zweiten 100, im dritten 150 Maas.
26) A 24000 fl., B 30000 fl., C 12000 fl.
27) 20, 36, 48.
28) Das 14löth. wiegt 3 Mark, das 10löth. 6 Mark und das 12löth. 10 Mark.

Andeutung. I $14x + 12z = (x + z)\, 12\frac{6}{13}$,
II $10y + 12z = (y + z)\, 11\frac{1}{4}$,
III $14x + 10y = (x + y)\, 11\frac{1}{3}$.

29) 1 Centner Kaffee 60 fl., 1 Centner Zucker 50 fl. und 1 Centner Reis 20 fl.

30) Durch die erste in $\frac{2abc}{ab + ac - bc}$, durch die zweite in $\frac{2abc}{ab + bc - ac}$, durch die dritte in $\frac{2abc}{ac + bc - ab}$ Stunden und durch alle drei zusammen in $\frac{2abc}{ab + bc + ac}$ Stunden.

Andeutung. $\text{I}\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$

$\text{II}\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}$

$\text{III}\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$

und $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) u = 1.$

31) Abtheilung A = 10 Tage, B = 15 Tage, C = 20 Tage; bei gemeinschaftlicher Arbeit $4\frac{8}{13}$ Tage.

Andeutung. $\text{I}\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$, $\text{II}\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6\frac{2}{3}}$

$\text{III}\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8\frac{4}{7}}$ u. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) u = 1.$

32) Von A 6 Loth, von B 14 Loth, von C 20 Loth.

Andeutung. Nimmt er von A x Loth, von B y Loth, von C z Loth hinweg, so hat er in den x Loth $\frac{10}{30}x$ Gold, in den y Loth $\frac{15}{70}y$ Gold und in den z Loth $\frac{20}{80}z$ Gold; somit ist

$$\text{I}\ \tfrac{10}{30}x + \tfrac{15}{70}y + \tfrac{20}{80}z = 10.$$

Durch ähnliche Betrachtung erhält man die zwei anderen Bedingungsgleichungen:

$$\text{II}\ \tfrac{15}{30}x + \tfrac{25}{70}y + \tfrac{24}{80}z = 14$$
$$\text{III}\ \tfrac{5}{30}x + \tfrac{30}{70}y + \tfrac{36}{80}z = 16.$$

32a) 600 fl. für den Haushalt, 48 fl. für Steuern; Ertrag des Gutes = 1600 fl.

Andeutung. Bezeichnet x der Aufwand für den Haushalt, y die Steuern, z den Ertrag, so folgt:

$$\text{I}\ z - x - y = 952$$
$$\text{II}\ \frac{9z}{8} - \left(1000 - \frac{4 \cdot 1000}{100}\right) - \frac{9x}{10} - \frac{5y}{6} - 48 = 212$$
$$\text{III}\ \left(\frac{9z}{8} + \frac{9z}{80}\right) - 960 - \left(\frac{9x}{10} + \frac{9x}{150}\right) - \left(\frac{5y}{6} + \frac{5y}{48}\right) = 399.$$

33) 364.

34) 1860.

35) 16590,7 fl.

Andeutung. Setzen wir den im ersten Jahre am Capitale abzutragenden Theil = x, den im zweiten Jahre = y, den im dritten Jahre zu entrichtenden = z, so bleibt für das vierte Jahr noch vom Kapital 58830 — (x + y + z) und an Zinsen erhält man daher

für das erste Jahr $\frac{58830 \,.\, 5}{100}$

= = zweite = $\frac{(58830 - x)\, 5}{100}$

= = dritte = $\frac{(58830 - x - y)\, 5}{100}$

= = vierte = $\frac{(58830 - x - y - z)\, 5}{100}$.

Hieraus ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\text{I} \quad x + \frac{58830 \,.\, 5}{100} = y + \frac{(58830 - x)\, 5}{100}$$

$$\text{II} \quad x + \frac{58830 \,.\, 5}{100} = z + \frac{(58830 - x - y)\, 5}{100}$$

$$\text{III} \quad x + \frac{58830 \,.\, 5}{100} = 58830 - x - y - z + \frac{(58830 - x - y - z)\, 5}{100}.$$

Bestimme nun eine Unbekannte, dann die entsprechenden Zinsen und durch Addition die jährlichen Zahlungen.

35a) 100 Maas von A, 20 Maas von B, 40 Maas von C.

Andeutung. Waren x Maas von A, y von B, z von C darin, so ist $\text{I} \quad x + y + z = 160.$

In den 240 Maas sind $\frac{3}{12} \,.\, 240 = 60$ Maas von A, $\frac{4}{12} \,.\, 240 = 80$ Maas von B, $\frac{5}{12} \,.\, 240 = 100$ M. von C enthalten; die ganze Mischung enthält somit $(60 + x)$ M. von A, $(80 + y)$ M. von B, $(100 + z)$ M. von C. Man hat daher:

$$(60 + x) : (80 + y) : (100 + z) = 8 : 5 : 7.$$

Bilde hieraus die Gleichungen:

$$\text{II} \quad (60 + x)\, 5 = (80 + y)\, 8$$

$$\text{III} \quad (80 + y)\, 7 = (100 + z)\, 5.$$

36) Von der ersten Sorte 20 Kr., von der zweiten 30 Kr., von der dritten 24 Kr., von der vierten 16 Kr.

Andeutung.

$$\text{I} \quad 5x + 2y + 6z + 3u = 352 \text{ Kr.}$$

$$\text{II} \quad 3x + 4y + 2z + 8u = 356 \text{ =}$$

$$\text{III} \quad 10x + 12y + 9z + 5u = 856 \text{ =}$$

$$\text{IV} \quad 6x + 3y + 5z + 4u = 394 \text{ =}$$

37) A hatte 105 fl., B 78 fl., C 60 fl.

Andeutung. Hat A anfänglich x fl., B y fl. und C z fl. gehabt, so hatte am Ende des ersten Spieles

$$A = x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = \frac{2x - y - z}{2}$$

$$B = y + \frac{y}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$C = z + \frac{z}{2} = \frac{3z}{2},$$

am Ende des zweiten Spieles:

$$A = \frac{2x - y - z}{2} + \frac{2x - y - z}{4} = \frac{6x - 3y - 3z}{4}$$

$$B = \frac{3y}{2} - \frac{2x - y - z}{4} - \frac{3z}{4} = \frac{7y - 2x - 2z}{4}$$

$$C = \frac{3z}{2} + \frac{3z}{4} = \frac{9z}{4},$$

am Ende des dritten Spieles:

$$A = \frac{6x - 3y - 3z}{4} + \frac{6x - 3y - 3z}{8} = \frac{18x - 9y - 9z}{8}$$

$$B = \frac{7y - 2x - 2z}{4} + \frac{7y - 2x - 2z}{8} = \frac{21y - 6x - 6z}{8}$$

$$C = \frac{9z}{4} - \frac{6x - 3y - 3z}{8} - \frac{7y - 2x - 2z}{8} = \frac{23z - 4x - 4y}{8}.$$

Folglich sind die Bedingungsgleichungen:

$$\text{I} \quad \frac{18x - 9y - 9z}{8} = 81$$

$$\text{II} \quad \frac{21y - 6x - 6z}{8} = 81$$

$$\text{III} \quad \frac{23z - 4x - 4y}{8} = 81$$

38) 123579.

§. 172.

1) $x_1 = 15,\ x_2 = -15.$

2) $x_1 = \frac{b}{a},\ x_2 = -\frac{b}{a}.$

3) $x_1 = 4,\ x_2 = -4.$

4) $x_1 = 2,\ x_2 = -2.$

5) $x_1 = 10,\ x_2 = -10.$

6) $x_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b - d}{1 + c}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{a^2 + b - d}{1 + c}}.$

7) $x_1 = 2,\ x_2 = -2.$

8) $x_1 = \sqrt{-25} = 5i,\ x_2 = -\sqrt{-25} = -5i.$

9) 246 und — 246.

10) 52.

11) 256 oder — 256.

12) 24 und 36.

Andeutung. Die eine Zahl sei x, so ist die andere $\frac{3}{2}x$; folglich

$$x \cdot \tfrac{3}{2}x = 864.$$

13) 15 und 21.

Andeutung. Das Quadrat der einen Zahl sei x^2, so ist das der anderen $= 666 - x^2$, folglich

$$x^2 - (666 - x^2) = 216 \text{ 2c.}$$

14) 12 Pfund.

Andeutung. $2\tfrac{3}{4}x \cdot x + 180 = 4x \cdot x.$

§. 175.

1) $x_1 = 10;\ x_2 = -6.$

2) $x_1 = 4;\ x_2 = -12.$

3) $x_1 = 7;\ x_2 = 8.$

3a) $x_1 = -4$; $x_2 = -7$.

3b) $x_1 = 1\frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

3c) $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = -3{,}4$.

3d) $x_1 = 10$; $x_2 = -4$.

3e) $x_1 = 9$; $x_2 = -5$.

4) $x_1 = -9$; $x_2 = 3$.

5) $x_1 = 5$; $x_2 = -4\frac{2}{7}$.

5a) $x_1 = 6$; $x_2 = -4\frac{4}{5}$.

5b) $x_1 = 2\frac{1}{3}$; $x_2 = -4$.

6) $x_1 = 12$; $x_2 = -10\frac{2}{15}$.

7) $x_1 = 20$; $x_2 = -18{,}222\ldots$

7a) $x_1 = 7$; $x_2 = 5$.

7b) $x_1 = 8$; $x_2 = -3$.

7c) $x_1 = 3{,}87647\ldots$; $x_2 = -2{,}47647\ldots$

8) $x_1 = 2{,}594$; $x_2 = -0{,}566$.

9) $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{129}{176}$.

10) $x_1 = \frac{5 + \sqrt{-967}}{8}$; $x_2 = \frac{5 - \sqrt{-967}}{8}$.

11) $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{-7791}}{16}$; $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{-7791}}{16}$.

12) $x_1 = 1$; $x_2 = 39$.

13) $x_1 = 4$; $x_2 = -1\frac{3}{11}$.

14) $x_1 = 5$; $x_2 = 3\frac{3}{4}$.

14a) $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{9}$.

15) $x_1 = 15$; $x_2 = 16$.

16) $x_1 = 1$; $x_2 = 3\frac{29}{52}$.

17) $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{985}{1133}$.

18) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{(4ac + b^2)}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{(4ac + b^2)}}{2a}$.

18a) $x_1 = a$; $x_2 = -a + b$.

18b) $x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = b^2$.

19) $x_1 = \frac{d}{b}$; $x_2 = -\frac{f}{a}$.

20) $x_1 = \frac{2mn}{p}$; $x_2 = -\frac{3m^2 + 2m^2n^2 + n^2}{mnp}$.

20a) $x_1 = \frac{a + b}{c}$; $x_2 = \frac{a - b}{c}$.

20b) $x_1 = a - b + c$; $x_2 = a + b - c$.

20c) $x_1 = \frac{2am - 3bm - 2an + 3bn}{m^2 - 3mn + 2n^2} = \frac{(2a - 3b)(m - n)}{(m - 2n)(m - n)}$
$= \frac{2a - 3b}{m - 2n};$

$x_2 = \frac{am + 2bm - 2an - 4bn}{m^2 - 3mn + 2n^2} = \frac{(a + 2b)(m - 2n)}{(m - n)(m - 2n)}$
$= \frac{a + 2b}{m - n}.$

20d) $x_1 = \frac{3a + 2b}{4ab}$; $x_2 = \frac{2a - 3b}{2a^2b^2}$.

21) $x_1 = \frac{b^2}{ac^3} + \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^6} - \frac{1}{a}\right)}$;

$x_2 = \frac{b^2}{ac^3} - \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^6} - \frac{1}{a}\right)}$.

22) $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = -\frac{bc}{a}$.

23) $x_1 = b + a$; $x_2 = b - a$.

24) $\sqrt{x_1} = 10$; $\sqrt{x_2} = 3\frac{1}{3}$ oder $x_1 = 100$; $x_2 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Andeutung. Setze $\sqrt{x} = y$ u. s. w.

24a) $x_1 = 4$; $x_2 = 2\frac{41}{64}$.

25) 8 und 17.

Andeutung. Die eine Zahl sei x, so ist die andere 25 — x 2c.

26) 91.

27) 72.

28) 8 Centner.

29) 15.

29a) Werth = 2.

Andeutung. Setzt man den Ausdruck = x und quadrirt, so folgt:

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = x^2$$

oder $2 + x = x^2$ u. s. w.

30) 42 Jahre alt.

31) 18 und 30.

31a) Der eine Theil $= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a = 0{,}618034a$; der andere $= a - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}a = 0{,}381966a$.

32) Von 16 und 20.

Andeutung. Die eine Zahl sei x, so ist die andere 36 — x u. s. w.

33) 4 und 14.

34) $\frac{a\,(a' + 2\,\sqrt{a'\,b'} + b')}{\sqrt{a'} - \sqrt{b'}} = \frac{a\,(\sqrt{a'} + \sqrt{b'})^2}{\sqrt{a'} - \sqrt{b'}}$.

Andeutung. DD' sei = x, so hat A $\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{2}\right)$ und B $\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)$ Meilen zurückgelegt; also macht A in 1 Tage $\frac{x - a}{2a'}$ und B $\frac{x + a}{2b'}$ Meilen; folglich hat A zu einer Meile $\frac{2a'}{x - a}$ und von D aus $\frac{2a'}{x - a} \cdot \frac{x + a}{2}$ Tage gebraucht, während B noch, um nach D zu kommen, $\frac{2b'}{x + a} \cdot \frac{x - a}{2}$ Tage braucht. Da beide gleich lang unterwegs waren, so setze beide Werthe einander gleich 2c.

35) 20 Arbeiter; 2 fl. 30 kr.

Andeutung. Sind es x Arbeiter, so erhält im ersten Falle jeder $\frac{50}{x}$ fl., im zweiten $\frac{50}{x - 5}$ fl.; folglich ist $\frac{50}{x} = \frac{50}{x - 5} - \frac{5}{6}$.

36) 20 fl.

Andeutung. $\frac{(100 + \frac{5}{2}x)\,x}{100} = 30$.

37) Von A $3\frac{2}{5}$ Ohm = 340 Maas à 20 Kreuzer.
 „ B $7\frac{3}{5}$ „ = 760 „ à 30 „

Andeutung. Er habe von A x Maas, so hat er von B (1100 — x) Maas, also kostet eine Maas von A $\frac{760}{3\,(1100 - x)}$ fl. und eine von B $\frac{170}{x}$ fl. Man erhält somit:

$$\frac{760x}{3\,(1100 - x)} + \frac{170}{x}\,(1100 - x) = 493\tfrac{1}{3}.$$

38) 30 Meilen.

Andeutung. Die Entfernung betrage x Meilen, so hat A zu einer Meile $\frac{15}{x}$ Stunden und B zu einer Meile $\frac{15}{x + 5}$ Stunden gebraucht. Die Zeit, welche B zu einer Meile weniger braucht, ist daher $= \frac{15}{x} - \frac{15}{x + 5}$. Da er aber auch zu 7 Meilen $\frac{1}{2}$ Stunde oder zu 1 Meile $\frac{1}{14}$ Std. weniger braucht, so erhält man die Gleichung

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x + 5} = \tfrac{1}{14}.$$

39) 8 Freunde.

Andeutung. $\frac{24000}{x} + 1000 = \frac{24000}{x - 4}$. Hieraus x = 12, somit lebten noch 8.

39a) A umfaßt 400 Morgen, B 450 Morgen.

Andeutung. A sei x, B (850 — x) Morgen groß; dann ist der Ertrag eines Morgens von A $= \frac{13500}{850 - x}$, der eines Morgens von B $= \frac{16000}{x}$. Man hat daher die Gleichung

$$\frac{13500x}{850 - x} = \frac{(850 - x)\ 16000}{x}.$$

40) 32.

41) A 2000 fl., B 3500 fl.

Andeutung. A habe x fl., so hat B (5500 — x) fl. eingelegt, also ist der Gewinn des A = 2300 — x, der des B = 4200 — 5500 + x = x — 1300; folglich verhält sich

$$2300 - x : x - 1300 = 6x : 8\ (5500 - x) \text{ ꝛc.}$$

42) Zu 4%.

Andeutung. Bezeichnen wir die Procente durch x, so ist der Rest der Zinsen zu Anfang des zweiten Jahres

$$= \frac{40000x}{100} - 600 = 400x - 600,$$

folglich betragen die Zinsen davon am Ende des zweiten Jahres

$$\frac{(400x - 600)\ (x + \frac{1}{2})}{100} = (4x - 6)\ (x + \tfrac{1}{2})$$

und man erhält daher die Gleichung

$$40000 + 400x - 600 + 400x + (4x - 6)\ (x + \tfrac{1}{2}) = 42645.$$

42a) 19,15%.

Andeutung. Die Procente seien x. Da die 100 fl. um $\frac{1}{2}$ Jahr, die 140 fl. um $1\frac{1}{2}$ Jahr früher bezahlt werden, so ist der Baarwerth von jenen $= \frac{100 \cdot 100}{100 + \frac{x}{2}}$ und von diesen $= \frac{100 \cdot 140}{100 + \frac{3x}{2}}$. Man hat daher die Gleichung:

$$\frac{10000}{100 + \frac{x}{2}} + \frac{14000}{100 + \frac{3x}{2}} = 200.$$

43) Einlage des A = 20000 fl., dessen Verlust = 2560 fl.
" " B = 25000 fl., " " = 2000 fl.
" " C = 20000 fl., " " = 1280 fl.

Andeutung. Bezeichnet x die Einlage des A, so sind die Verhältnißzahlen der Verluste für A, B und C der Reihe nach 8x, $5 \cdot \frac{5x}{4}$ und $4\left(\frac{5x}{4} - 5000\right)$ oder 8x, $\frac{25x}{4}$ und 5x — 20000, deren Summe ist somit $\frac{77x}{4} - 20000$. Es verhält sich demnach

$$\frac{77x}{4} - 20000 : \frac{25x}{4} = 5840 : \frac{5x}{4} - 23000.$$

Ist hieraus x = 20000 bestimmt, so gehen obige Verhältnißzahlen der Verluste über in 160, 128 und 80, nach welchen nun der Gesammtverlust von 5840 fl. zu vertheilen ist.

44) 5,8 Fuß und 3,6 Fuß oder 7,2 Fuß und 2,9 Fuß.

45) 6,2 Fuß.

46) $J = \frac{1}{2}\left[(2S - s\sqrt{2S(S-s)} - 3S(S-s)\right]$.

47) 8214 Quadratfuß.

Andeutung. Bestimme nach dem pythagoräischen Lehrsatze die Katheten und hieraus den Inhalt.

48) 344,544375 Quadratfuß.

49) 6 Fuß und 4 Fuß lang.

50) 144 Quadratfuß.

Andeutung. Bezeichnen G und g die beiden Grundflächen, h die Höhe, so ist der Kubikinhalt $K = \frac{h}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$*)

51) 3 Fuß.

Andeutung. Bezeichnen R und r die Radien der beiden Grundflächen, h die Höhe, so ist der Inhalt

$$K = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)\text{**)}.$$

§. 177.

1) 0,618034 . . . .
1a) 0,236068 . . . .
1b) 0,099020 . . . .
1c) 0,309409 . . . .
1d) 0,183211 . . . .
2) 0,436491 . . . .
3) 0,581139 . . . .
4) 0,720759 . . . .
5) 0,736068 . . . .
6) 0,2699 . . . .

§. 179.

1) Die Partialnenner der Periode sind: 1, 4, 1, 16, die Näherungswerthe heißen: 9, $\frac{44}{5}$, $\frac{53}{6}$, $\frac{892}{101}$ 2c.

2) Partialnenner: 7, 14; Näherungswerthe: $7\frac{1}{7}$, $7\frac{14}{99}$, $7\frac{99}{700}$, $7\frac{1400}{9899}$, $7\frac{9899}{69993}$, ...

3) Partialnenner: 8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1. NW. = $8\frac{1}{5}$, $8\frac{2}{11}$, $8\frac{3}{16}$, $8\frac{5}{27}$, $8\frac{38}{205}$, $8\frac{43}{232}$, $8\frac{81}{437}$, ...

4) Partialnenner: 5, 10; NW. = $5\frac{1}{5}$, $5\frac{10}{51}$, $5\frac{51}{260}$, $5\frac{520}{2651}$, $5\frac{2651}{13515}$, ...

5) Partialnenner: 1, 2, 7, 2, 1, 14. NW. = 7, $7\frac{2}{3}$, $7\frac{15}{22}$, $7\frac{32}{47}$, $7\frac{47}{69}$, ...

6) Partialnenner: 4, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1 . . .; NW. = 4, 5, $4\frac{8}{9}$, $4\frac{9}{10}$, $4\frac{80}{89}$, $4\frac{89}{99}$, ...

---

*) Vergl. mein Lehrbuch der Stereometrie §. 147.

**) Daselbst §. 164.

§. 181.

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

2) $x_1 = 2\frac{1}{2},\ x_2 = -2\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\sqrt{-1},\ x_4 = -\frac{3}{4}\sqrt{-1}.$

3) $y_1 = 81,\ y_2 = 625.$

4) $z_1 = \frac{9}{25},\ z_2 = 2\frac{79}{225}.$

4a) $y_1 = 3,\ y_2 = -3,\ y_3 = \sqrt{\frac{12}{5}},\ y_4 = -\sqrt{\frac{12}{5}}.$

Andeutung. Setze $y^2 - 5 = x$ 2c.

5) $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

6) $x_1 = 8,\ x_2 = -27.$

7) $x_1 = 94\frac{1}{2},\ x_2 = -94\frac{1}{2}.$

Andeutung. Setze $x - 30\frac{1}{2} = y^3$, also $x + 30\frac{1}{2}, = y^3 + 61$, so folgt $y^3 + 61 = (1 + y)^3$ 2c.

8) $x_1 = 4,\ x_2 = 9.$

9) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{-55}}{8},$

$$x_4 = \frac{3 - \sqrt{-55}}{8}.$$

Andeutung. Dividire die ganze Gleichung durch x^2 und setze dann $x + \frac{1}{x} = y$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, so folgt: $y^2 - 5y = -\frac{51}{16}$ und hieraus $y_1 = 4\frac{1}{4},\ y_2 = \frac{3}{4}$. Der erste Werth liefert für x zwei reelle, der zweite zwei imaginäre Werthe.

9a) $x_1 = 6,\ x_2 = \frac{1}{6},\ x_3 = -0{,}3557\ldots,$

$x_4 = -2{,}8109\ldots$

Andeutung. Vergl. die Andeutung zur vorhergehenden Aufgabe.

10) $x_1 = 0,\ x_2 = 5;\ x_3 = \frac{125 + \sqrt{-98711}}{50};$

$$x_4 = \frac{125 - \sqrt{-98711}}{50}.$$

Andeutung. Multiplicire die ganze Gleichung mit $\sqrt{4+x}\,.\,\sqrt{9-x}$, quadrire darauf beiderseits, setze alsdann

$$(4 + x)(9 - x) = y^2,$$

bestimme daraus

$$y_1 = 6;\ y_2 = -\tfrac{78}{25}$$

und mittelst dieser Werthe aus vorstehender Gleichung die vier Werthe von x.

11) $x_1 = \frac{a}{\sqrt{b\,(2-b) + 2b\sqrt{1-2b}}}$,

$x_2 = \frac{a}{\sqrt{b\,(2-b) - 2b\sqrt{1-2b}}}$,

$x_3 = \frac{-a}{\sqrt{b\,(2-b) + 2b\sqrt{1-2b}}}$,

$x_4 = \frac{-a}{\sqrt{b\,(2-b) - 2b\sqrt{1-2b}}}$.

Andeutung. Setze $x = \frac{a}{y}$, so folgt

$$y - b = b\sqrt{1+y} + y\sqrt{1-y}.$$

Quadrire nun noch zweimal nacheinander ꝛc.

§. 183.

1) $x_1 = -54$, $y_1 = 48$.
$x_2 = 48$, $y_2 = -54$.

1a) $x_1 = 73$, $y_1 = 9$.
$x_2 = 9$, $y_2 = 73$.

1b) $x_1 = 78$, $y_1 = 657$.
$x_2 = 657$, $y_2 = 78$.

2) $x_1 = 20$, $y_1 = 15$.
$x_2 = -15$, $y_2 = -20$.

3) $x_1 = 35$, $y_1 = 7$.
$x_2 = -35$, $y_2 = -7$.

4) $x_1 = 10$, $y_1 = -5$.
$x_2 = -5$, $y_2 = 10$.

5) $x_1 = 3$, $y_1 = 6$.
$x_2 = -6$, $y_1 = -3$.

6) $x_1 = 7$, $y_1 = 3$.
$x_2 = -7$, $y_2 = -3$.

6a) $x_1 = 53$, $y_1 = 61$.
$x_2 = -53$, $y_2 = -61$.

6b) $x_1 = 84$, $y_1 = 73$.
$x_2 = -73$, $y_2 = -84$.

6c) $x = 57$, $y = 9$.

7) $x = 12$ u. $= -13$ \} ohne gegenseitige Abhängigkeit
$y = 4$ „ $= -5$ \} von einander, so daß also der Aufgabe 4 Paare zusammengehöriger Werthe entsprechen.

8) $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}61803,\ y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$

$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0{,}38196,\ y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\ 0{,}61803.$

Andeutung. Aus II folgt $x - y = 1$, $x = y + 1$ u. s. w.

9) $x_1 = 10,\ y_1 = 2,$
$x_2 = 2,\ y_2 = 10.$

Andeutung. Addirt man die doppelte zweite Gleichung zur ersten, so folgt

$$(x + y)^2 + (x + y) = 156$$

und hieraus $x + y = 12$ oder $-\ 13$.

Aus $x + y = 12$ ergeben sich obige Werthe für x und y; aus $x + y = -\ 13$ findet man noch zwei Paare imaginärer Werthe.

10) $x_1 = 20,\ y_1 = -\ 10,$
$x_2 = -\ 10,\ y_2 = 20.$

Andeutung. Addire und subtrahire beide Gleichungen.

11) $x_1 = 8,\ y_1 = 4.$
$x_2 = 3,\ y_2 = -\ 1.$

Andeutung. Bestimme den Werth von $\frac{x}{y}$ aus I u. s. w.

11a) $x_1 = 0,\ y_1 = 0,$
$x_2 = 6,\ y_2 = 2,$
$x_3 = -\ 3,\ y_3 = 1.$

Andeutung. Bringe die Gleichungen auf die Form:

$$\text{I}\ x\,(x - y) = 12y$$

$$\text{II}\ y\,(x - y) = \frac{4x}{3}$$

dividire nun beide in einander, so folgt:

$$\frac{x}{y} = \pm\ 3,\ x = \pm\ 3y \text{ u. s. w.}$$

12) $x = 10,\ y = 5.$

Andeutung. Addire und subtrahire die gegebenen Gleichungen.

13) $x_1 = 3,\ y_1 = -\ 5$ oder $8,$
$x_2 = -\ 3,\ y_2 = 5$ oder $-\ 8.$

14) $x_1 = 6,\ y_1 = 3$ oder $x_1 = 3,\ y_1 = 6$ u. s. w.

Andeutung. Bestimme aus I $x + y$ u. s. w.

15) $x_1 = 9,\ y_1 = 16,$
$x_2 = \frac{81}{4},\ y_2 = \frac{25}{4}.$

Andeutung. Gebe der Gleichung I die Form

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 2$$

und bestimme hieraus $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ꝛc.

16) $x = 4,\ y = 2$ oder $x = 2,\ y = 4$.

Andeutung. Vergl. §. 182, Aufg. 7.

16a) $x = 13,\ y = 24$.

16b) $x = 53,\ y = 45$.

17) $x = 4,\ y = 3$.

Andeutung. Erhebe II zur vierten Potenz, ziehe diese von I ab, dividire hierauf durch $4xy$ und subtrahire nun das Quadrat der Gleichung II, so erhält man eine quadratische Gleichung, aus der xy gefunden werden kann u. s. w.

18) $x = 4,\ y = 5$.

Andeutung. Erhebe II zur fünften Potenz ($= II^3 . II^2$), subtrahire hiervon die Gleichung I, dividire hierauf durch $5xy$, subtrahire von der erhaltenen Gleichung die dritte Potenz der Gleichung II, setze auf der linken Seite xy als Faktor heraus und bilde mittelst II eine quadratische Gleichung, aus der xy gefunden werden kann u. s. w.

19) $x_1 = 5,\ y_1 = 7,\ z_1 = 3,$

$x_2 = -5,\ y_2 = -7,\ z_2 = -3.$

20) $x = \pm 1,\ y = \pm 2,\ z = \pm 3$, wo entweder alle positiv, oder je 2 der Werthe negativ zu nehmen sind, da stets xyz positiv ausfallen muß.

Andeutung. Durch Addition der drei Gleichungen erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{7}{3}\, xyz$$

Subtrahirt man hiervon jede der drei gegebenen Gleichungen, so folgt der Reihe nach

$$\text{IV } z = \tfrac{3}{2}xy;\ \text{V } y = \tfrac{2}{3}xz;\ \text{VI } x = \tfrac{1}{6}yz$$

und wenn man nun V und VI mit einander multiplicirt und nach IV für $xy = \frac{2z}{3}$ substituirt:

$$\frac{2z}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2z}{3} \cdot z^2$$

und hieraus $z = \pm 3$ u. s. w.

21) $x = \pm 1,\ y = \pm 3,\ z = \pm 6$.

Andeutung. Gebe den Gleichungen die Form

$$\text{I } \frac{x + y}{xyz} = \frac{2}{9},\ \text{II } \frac{x + z}{xyz} = \frac{7}{18},\ \text{III } \frac{y + z}{xyz} = \frac{1}{2}$$

und addire dieselben, so folgt

$$\text{IV } \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{5}{9}$$

$$\text{IV} - \text{I)}\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{3},\ xy = 3$$

$$\text{IV} - \text{II)}\ \frac{1}{xz} = \frac{1}{6},\ xz = 6$$

$$\text{IV} - \text{III)}\ \frac{1}{yz} = \frac{1}{18},\ yz = 18 \text{ u. s. w.}$$

22) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ u = 4$.

Andeutung. Ziehe die Kubikwurzel aus dem Produkte der vier Gleichungen und dividire die so erhaltene Gleichung durch jede der gegebenen.

22a) $x = 1,\ y = 4.$

Andeutung. Drücke die beiden Gleichungen auf nachstehende Weise aus:

$$\text{I}\quad 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{2\sqrt{y}} = 3^5$$

$$\text{II}\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{y}} = \left(\frac{1}{3}\right)^8.$$

Logarithmire nun beiderseits jede dieser Gleichungen u. s. w.

23) 36 und 20.

24) 26 und 18.

25) 7 und 5.

Andeutung. $\text{I}\ x - y = 2;\ \text{II}\ (x + y)^2 - xy = 109.$

26) 62 und 100 Maas.

27) 10 und 12.

28) 34 und 25.

29) 4 und 15.

30) 16 und 5.

31) 847.

Andeutung. $\text{I}\ x^2 + y^2 = 80,\ \text{II}\ xz = 56,\ \text{III}\ z^2 - y^2 = 33.$
Addire I, 2. II und III, so folgt

$$(x + z)^2 = 225$$

$$\text{IV}\quad x + z = 15$$

und behandle nun II und IV weiter ꝛc.

32) $2 : 4 = 5 : 10.$

Andeutung. Das erste Glied sei x, das zweite y, so ist das dritte $9 - y$ und das vierte $12 - x$; also heißt die Proportion:

$$x : y = 9 - y : 12 - x$$

und es ist somit $\quad \text{I}\ 12x - x^2 = 9y - y^2.$

Ferner ist nach der letzten Bedingung

$$x^2 + y^2 + (9 - y)^2 + (12 - x)^2 = 145$$

oder $\quad x^2 + y^2 - 9y - 12x = -40$

oder $\quad \text{II}\ 12x - x^2 + 9y - y^2 = 40.$

Unter Berücksichtigung der Gleichung I geht II unmittelbar über in

$$12x - x^2 = 20 \text{ u. s. w.}$$

33) $12 : 9 = 4 : 3.$

34) $x_1 = 3,\quad y_1 = 12.$

$x_2 = -3,\ y_2 = -12.$

Andeutung. $\text{I}\ x^2 + y\sqrt{xy} = 81$

$$\text{II}\ y^2 + x\sqrt{xy} = 162$$

oder

$$\text{I}\ (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})\sqrt{x} = 81$$

$$\text{II}\ (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})\sqrt{y} = 162.$$

Dividire nun die erste Gleichung in die zweite, so folgt $y = 4x$ und substituire nun das eine Mal $4x$ statt y in I, das andere Mal $\frac{y}{4}$ statt x in II.

Anmerkung. Führt man die beiden Werthe — 3 und — 12 für x und y in I ein, so erhält man

$$x^2 + y\sqrt{xy} = 9 - 12\sqrt{36} = 9 - 72 = -63$$

und nicht 81. Berücksichtigt man aber, daß

$$\sqrt{xy} = \sqrt{-3 \,.\, -12} = \sqrt{4 \,.\, (-3)^2} = 2 \,.\, -3 = -6$$

ist, so erhält man in der That

$$x^2 + y\sqrt{xy} = 9 + 72 = 81.$$

Aehnlich verhält es sich mit der Einführung dieser Werthe in II.

34a) $x = 10$ oder $\sqrt{10}$.

Andeutung. Setze $\overset{x}{\log}\, 10 = y$

und $\overset{x}{\log}\, 1000 = (\overset{x}{\log}\, 10)^2 + 2 = y^2 + 2,$

so folgt:

$$x^y = 10$$

$$x^{y^2+2} = 1000 = 10^3,$$

also $x^{y(y^2+2)} = 10^{3y}$

oder $10^{y^2+2} = 10^{3y}.$

Demnach ist $y^2 + 2 = 3y,$

woraus folgt $y_1 = 1,\ y_2 = 2.$

Somit ist $x_1 = 10,\ x_2 = \sqrt{10}.$

34b) $x = \frac{1}{10}$ oder $\sqrt{10}$.

Andeutung. Verfahre analog wie bei 34a, setze also

$$\overset{x}{\log}\, 10 = y$$

$$\overset{x}{\log}\, 1000 = 3\,(\overset{x}{\log}\, 10)^2 - 6 = 3y^2 - 6$$

oder $x^y = 10$

$$x^{3y^2-6} = 1000 = 10^3 \text{ u. s. w.}$$

§. 187.

1) 26 und 3, 22 und 6, 18 und 9, 14 und 12, 10 und 15 ꝛc.

2) 17 und 12, 12 und 15.

3) 48 und 95, 52 und 90, 56 und 85, 60 und 80, 64 und 75, 68 und 70, 72 und 65, 76 und 60, 80 und 55, 84 und 50, 88 und 45, 92 und 40, 96 und 35.

4) 3 Pfd. und 65 Pfd., 6 Pfd. und 60 Pfd., 9 Pfd. und 55 Pfd., 12 Pfd. und 50 Pfd. 15 Pfd. und 45 Pfd........ 36 Pfd. und 10 Pfd., 39 Pfd. und 5 Pfd. (13 Auflösungen.)

4a) 115 Buchenstämme und 220 Eichstämme.

5) 348.

Andeutung. $85x + 8 = 37y + 15.$

6) 160, 740, 1320, 1900, 2480, 3060 ꝛc.

Andeutung. $20x = 29y + 15.$

7) 672 und 54, 240 und 486.

Andeutung. $16x + 27y = 726.$

8) 48 preuß. Thlr. und 50 Kronenthlr.
oder 102 ⸗ ⸗ ⸗ 15 ⸗

9) 624 und 318.
Andeutung. $54x + 30 + 35y + 3 = 942$.

10) 29 Hühner und 40 Tauben.
Andeutung. $28x + 28 = 12y$.

11) 2 Pfd. von der besseren und 5 Pfd. von der schlechteren.
oder 4 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 8 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
⸗ 6 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 11 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
⸗ 8 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 14 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
⸗ 10 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 17 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
Andeutung. $36x = 24y - 48$.

12) 40, 128, 216, 304 ꝛc.
Andeutung. $8x = 11y + 7$.

13) $\frac{2}{12}$ und $\frac{12}{20}$, $\frac{5}{12}$ und $\frac{7}{20}$, $\frac{8}{12}$ und $\frac{2}{20}$.
Andeutung. $\frac{x}{12} + \frac{y}{20} = \frac{23}{30}$.

14) Das Jahr 1916.
Andeutung. Bezeichnet x den Quotienten für die goldene Zahl, y den für den Sonnenzirkel, so folgt:
$$19x + 17 - 1 = 28y + 21 - 9.$$

15) 1833.
Andeutung. $28x + 22 - 9 = 15y + 6 - 3$.

§. 189.

1) 19, 9 und 1; 18, 10 und 2; 17, 11 und 3; 16, 12 und 4, 15, 13 und 5 ꝛc.
Andeutung. I $2x + y + z = 48$; II $y \quad z = 8$.

2) 28, 148, 268, 388, 508, 628, . . .

3) 150, 330, 510, 690, 870, 1050, . . .

4) 48, 216, 384, 552, 720, 888.

5) A = 80 fl., B = 70 fl., C = 40 fl.

6) 31, 1, 26 oder 29, 2, 27 oder 27, 3, 28 u. s. w.
Andeutung. I $x + y + z = 58$.
II $3x + 2y + 4z = 199$.

7) 88, 266, 6; 89, 259, 12; 90, 252, 18; 91, 245, 24; 92, 238, 30 ꝛc.

8) Das Jahr 1862.
Andeutung. I $19x + 1 - 1 = 28y + 23 - 9$
II $19x + 1 - 1 = 15z + 5 - 3$.

9) 19, 139, 259, 379, 499, 619, . . .

10) 10, 13, 14, 30; 11, 15, 17, 33; 12, 17, 20, 36 u. s. w.

11) 864.

12) 162 Mann stark.

13) Auf 9 Arten wie folgt:

	Preuß. Thlr.	Fünffrankenthlr.	Kronenthlr.
1.	266	498	5
2.	288	441	40
3.	310	384	75
4.	332	327	110
5.	354	270	145
6.	376	213	180
7.	398	156	215
8.	420	99	250
9.	442	42	285

Andeutung. Bezeichnet man die Anzahl der preuß. Thaler durch x, die der Fünffrankenthlr. durch y, die der Kronenthlr. durch z, so hat man:

$$\text{I} \quad \frac{7x}{4} + \frac{7y}{3} + \frac{27z}{10} = 1641$$

$$\text{II} \quad x + y + z = 769.$$

§. 190b.

1) $x_1 = 4;\ x_2 = 2(-1 + i\sqrt{3});\ x_3 = 2(-1 - i\sqrt{3}).$

2) $x_1 = -7;\ x_2 = \frac{7}{2}(1 + i\sqrt{3});\ x_3 = \frac{7}{2}(1 - i\sqrt{3}).$

3) $x_1 = 5;\ x_2 = \frac{5}{2}(-1 + i\sqrt{3});\ x_3 = \frac{5}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$

4) $x_1 = -6;\ x_2 = 3(1 + i\sqrt{3});\ x_3 = 3(1 - i\sqrt{3}).$

§. 190d.

1) $x_1 = 5;\ x_2 = 1 + 3\sqrt{-1};\ x_3 = 1 - 3\sqrt{-1}.$

2) $x_1 = -2;\ x_2 = -2 + 5\sqrt{-1};\ x_3 = -2 - 5\sqrt{-1}.$

3) $x_1 = 1\frac{1}{2};\ x_2 = 3 + 6\sqrt{-1};\ x_3 = 3 - 6\sqrt{-1}.$

4) $x_1 = \frac{3}{5};\ x_2 = \frac{5 + \sqrt{-15}}{2};\ x_3 = \frac{5 - \sqrt{-15}}{2}.$

5) $x_1 = 2;\ x_2 = 5;\ x_3 = -7.$

6) $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$

7) 12.

8) 3, 7 und 12.

9) 2, 5.

10) 164.

11) 3′, 5′ und 12′.

12) Radius = 2′.

13) 0,125$^{c\prime}$; 1$^{c\prime}$; 3,375$^{c\prime}$; 8$^{c\prime}$.

14) Basisseite = 3,3′.

Andeutung. Bezeichnet x die Basisseite, so folgt:

$$\frac{x^2 (x + 15)}{3} = 66{,}429$$

oder $$x^3 + 15x^2 - 199{,}287 = 0$$

oder wenn man $$x = y - 5$$

setzt, $$y^3 - 75y + 50{,}712 = 0.$$

Diese Gleichung führt auf den irreducibeln Fall und es entsprechen ihr also 3 Werthe von y. Für vorliegende Aufgabe ist jedoch nur der eine y = 3,3 brauchbar, da die übrigen für x negative Werthe liefern.

15) Basisseiten = 2′ und 3′; Höhe = 6′.

16) Durchmesser = 2′; Höhe = 8′ oder auch Durchmesser = 4,74′; Höhe = 1,42′.

Andeutung. Bezeichnet x den Halbmesser, y die Höhe, so hat man:

$$\text{I} \quad 2\pi x^2 + 2\pi xy = 56{,}52$$

$$\text{II} \quad \pi x^2 y = 25{,}12$$

$$\text{I} \,.\, x - \text{II} \,.\, 2 \text{ gibt } 2\pi x^3 = 56{,}52x - 50{,}24$$

oder $$x^3 - 9x + 8 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung führt auf den irreducibeln Fall und in der That entsprechen derselben die drei Werthe 1; 2,372 und — 3,372, wovon jedoch nur die beiden ersten in vorliegendem Falle von Bedeutung sind.

17) Radien = 3′ und 5′.

18) 1,27′ tief.

Andeutung. Bezeichnet x die Tiefe des Einsinkens, so gelangt man zu der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 2{,}8 = 0.$$

§. 190g.

1) $x_1 = 5; x_2 = -4; x_3 = 2 + 4\sqrt{-3}; x_4 = 2 - 4\sqrt{-3}.$

2) $x_1 = -1; x_2 = 8; x_3 = 8 + 2\sqrt{-3}; x_4 = 8 - 2\sqrt{-3}.$

3) $x_1 = 6; x_2 = -7; x_3 = 4\sqrt{-3}; x_4 = -4\sqrt{-3}.$

4) $x_1 = -9; x_2 = 4; x_3 = -6; x_4 = -6.$

5) $x_4 = 3; x_2 = -10; x_3 = 2\sqrt{-3}; x_4 = -2\sqrt{-3}.$

6) $x_1 = 7; x_2 = -8; x_3 = 4 + 2\sqrt{-3}; x_4 = 4 - 2\sqrt{-3}.$

7) $x_1 = 3; x_2 = 5; x_3 = 2; x_4 = 2.$

8) $x_1 = -5; x_2 = 2; x_3 = -2 + 2\sqrt{-3};$
$x_4 = -2 - 2\sqrt{-3}.$

9) $x_1 = 3; x_2 = -6; x_3 = 6 + 2\sqrt{-3}; x_4 = 6 - 2\sqrt{-3}.$

10) $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1 + 2\sqrt{-3}$; $x_4 = -1 - 2\sqrt{-3}$.
11) $x_1 = 2$; $x_2 = 7$, $x_3 = -2$; $x_4 = -2$.
12) $x_1 = -9$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$; $x_4 = 6$.
13) $x_1 = 5$; $x_2 = -10$; $x_3 = 2 + 2\sqrt{-3}$; $x_4 = 2 - 2\sqrt{-3}$.
14) $x_1 = 2$; $x_2 = -6$; $x_3 = -4 + 2\sqrt{-3}$; $x_4 = -2 - 2\sqrt{-3}$.
15) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = -11$; $x_4 = -9$.
16) $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 3$; $4_4 = 13$.

Neunter Abschnitt.

Von den Reihen oder Progressionen.

A. Niedere arithmetische Reihen.

§. 193.

1) $t = 99$, $s = 1275$.
2) $t = -26\frac{3}{4}$, $s = -41\frac{1}{4}$.
3) $t = 139$ fl., $s = 1640$ fl.
4) $s = 54$ fl. 36 kr.
5) 4425 fl.

Andeutung. Setze in der Formel (3) des §. 192 $n = 14$, $a = 10$, $d = 10$, bestimme s und addire hierzu den Zins von 4500 fl. nach 15 Jahren.

6) $a = 2$, $s = 1722$.
7) 36 fl.
8) a) $n(n+1)$; b) n^2; c) $\frac{n(n+1)}{2}$.
9) Differenz $= \frac{1}{2}$.
10) $d = 2\frac{1}{2}$, $t = 150\frac{1}{2}$.
11) $d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$.
12) $n = 48$ Glieder.
13) 5, 17, 29, 41.

Andeutung. Die Glieder heißen der Reihe nach a, a + d, a + 2d, a + 3d. Bilde hieraus zwei Gleichungen, welche die verlangte Bedingung ausdrücken und bestimme alsdann a und d.

14) 20 Jahre alt.

15) $n = \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2\right]}$.

16) 25 Jahre und 1100 fl.

Andeutung. Nach §. 192. (4) ist

$$20000 = \frac{n}{2} [1000 + (n - 1) 25].$$

Bestimme hieraus n 2c.

17) $t = 245\frac{1}{4}$ Fuß, $s = 1046\frac{2}{5}$ Fuß.

18) $t = \frac{g}{2} + (n - 1) g = \frac{g}{2} (2n - 1)$; $s = \frac{n^2 g}{2}$.

19) 12 Sekunden.

20) n = 30 Jahre, a = 40 fl.

21) $n = \frac{2t + d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t + d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$.

Andeutung. Suche n aus den beiden Gleichungen (1) und (3) des §. 192.

22) n = 12 Jahre, t = 375 fl.

23) 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.

Andeutung. I $a + (a + 7d) = 28$
II $(a + 4d) + (a + 19d) = 60$.

Bestimme hieraus a und d 2c.

24) 2, $6\frac{1}{2}$, 11, $15\frac{1}{2}$, ...

25) Erstes Glied = 1, Differenz = 3.

Andeutung. I $(a + 2d) + (a + 7d) = 29$
II $(a + 4d)(a + 11d) = 442$.

26) t = 14 Stunden, s = $123\frac{1}{2}$ Stunden.

27) Es waren 11 Kinder und das älteste erhielt 14 fl.

28) Der erste erhielt 6 fl., jeder folgende 3 kr. mehr und betheiligt waren 15 Arbeiter.

Andeutung. $(a + 3d) + (a + 6d) = 12\frac{9}{20}$
$(a + 11d) + (a + 7d) = 12\frac{9}{10}$.

Bestimme hieraus a und d, und alsdann n.

29) Der erste 620 fl., der letzte 50 fl.

30) 26 Tapfere.

31) 7 Kinder; das jüngste derselben war 5, das älteste 17 Jahre alt.

Andeutung. I $77 = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) 2]$

II $(a + 2 + a + 8)(a + 4) = (a + 10) 12$.

Bestimme hieraus a, dann n 2c.

32) 100 Meilen von P. entfernt.

Andeutung. Waren beide bis zur Zusammenkunft x Tage unterwegs, so hat man, um den Weg für B zu erhalten,

$$a = 2\tfrac{1}{2},\ d = \tfrac{1}{2},\ n = x$$

zu setzen und findet dann dafür

$$\frac{x}{2}\left[5 + (x - 1)\tfrac{1}{2}\right].$$

Man hat daher die Gleichung

$$\frac{x}{2}\left[5 + (x - 1)\tfrac{1}{2}\right] + 5x = 245$$

und bekommt hieraus x = 20 Tage. Sie begegnen demnach einander 5 . 20 Meilen von P entfernt.

33) 3579.

Andeutung. Die Ziffern seien a, a + d, a + 2d, a + 3d, so heißt die zu suchende Zahl

$$1000\,a + 100\,(a + d) + 10\,(a + 2d) + (a + 3d)$$

und die durch dieselben Ziffern in umgekehrter Ordnung gebildete Zahl

$$1000\,(a + 3d) + 100\,(a + 2d) + 10\,(a + d) + a.$$

Bilde nun zwei Gleichungen ꝛc.

34) Seiten: 3, 8, 13, 18, 23.

Inhalte: 9, 64, 169, 324, 529.

35) $4\frac{3}{8}$, $5\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{8}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{7}{8}$, $11\frac{1}{4}$, $12\frac{5}{8}$.

Andeutung. 14 bildet das 9te Glied einer Reihe, deren erstes Glied = 3 und deren Differenz in Frage gestellt ist.

B. Höhere arithmetische Reihen.

§. 196.

1) 5, 7, 13, 23, 37, 55, 77, 103, 133, 167.

1a) 5, 9, 16, 28, 48, 80, 129, 201, 303, 443.

2) 4, 7, 11, 18, 30, 49, 77, 116, 168, 235, 319, 422.

2a) t = 1277.

2b) t = 3369.

2c) 3, — 1, — 3, — 6, — 15, — 33, — 57, — 74, — 57, 49, 301, 792.

3) t = 58949; s = 523175.

4) t = 13152; s = 55237.

4a) t = 562; s = 1585.

5) t = 302; t = 496; s = 3268.

5a) t = 1277; die Glieder heißen: 3, 5, 8, 12, 17, 23.

5b) t = 3214; s = 12615.

5c) 28, 874, 2063.

6) t = 3272; s = 2039.

6a) t = 378; s = 1470.

6b) Das 10te Glied.

7) 2, 3, 6, 14, 32, 67, 128, 226, 374, 587, 882, 1278.

§. 198.

1) 820 und 11480.

2) 505000.

2a) Die 30te.

3) 1240 und 225 Kugeln.

4) 975 Kugeln.

Andeutung. Subtrahire die Anzahl der Kugeln in 9 Schichten von der Anzahl der Kugeln in 18 Schichten.

5) 1274 Kugeln.

Andeutung. Bestimme nach §. 197, 2) durch die Gleichungen $\frac{n\,(3n - 1)}{2} = 287$ und $\frac{n\,(3n - 1)}{2} = 92$ zuerst, daß 287 die 14te und 92 die 8te Fünfeckszahl ist und subtrahire nun die Summe der 7 ersten Fünfeckszahlen von der Summe der 14 ersten.

6) 1320 Kugeln.

Andeutung. Vergl. §. 197. 5. a..

7) 12110 Kugeln.

Andeutung. Vergl. §. 197. 5. b. Jede der vierseitigen Pyramiden hat $\sqrt{576} = 24$ Schichten ꝛc.

8) 5440 Kugeln.

Andeutung. Vergl. §. 197. 5. c.

C. Geometrische Reihen.

§. 201.

1) $t = 19683$; $s = 29524$.

2) $t = 0{,}0000000434683$.
$s = 17{,}9999997826584$.

3) Quotient $= \frac{3}{2} = 1{,}5$.

4) $a = \frac{s\,(q - 1)}{q^n - 1}$.

5) $a = qt - s\,(q - 1)$.

6) $a = 7$; $t = 1701$.

7) 18446744073709551615 Körner.

8) $q = 2$.

9) $\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{s}{a} = 0$.

10) $\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{sq^{n-1}}{t} = 0$.

11) 8mal.
12) 11mal.
13) 21 Glieder.
14) Nach 6 Tagen.
15) $t = \frac{(q-1)\,s\,q^{n-1}}{q^n - 1}$.
16) $s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.
17) $s = \frac{t\,(q^n - 1)}{(q-1)\,q^{n-1}}$.
18) $q = \sqrt[11]{4} = 1{,}1343\ldots$
19) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561.
20) $3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Andeutung. I $aq + aq^3 + aq^5 = 147$
II $a + aq^2 + aq^4 = 73\frac{1}{2}$.
Multiplicire II mit q u. s. w.

21) 0,000064 Maas $= \frac{1}{15625}$ Maas.

Andeutung. Unter 5 Maas der Mischung ist 1 Maas der Flüssigkeit, also ist der Gehalt der ersten Mischung $= \frac{1}{5}$, der der zweiten $= \frac{1}{5}$ der ersten oder $= \frac{1}{25}$ u. s. w.

22) Summe = 48.

Andeutung. Nach §. 199. (4).

23) $\frac{84}{99} = \frac{28}{33}$.
24) $\frac{2405}{3300} = \frac{481}{660}$.
25) Nach 20maligem.

Andeutung. Nach dem ersten Abzapfen sind noch 49 Maas, nach dem zweiten noch $49 - \frac{49}{50} = \frac{49^2}{50}$ 2c. Maas à 54 kr. im Fasse. Der Wein ist also nach dem $n$ten Abzapfen noch werth $\frac{49^n}{50^{n-1}} \cdot 54$ kr. Man hat daher die Gleichung $\frac{49^n}{50^{n-1}} \cdot 54 = 50 \cdot 36$ 2c.

26) Jährlicher Abtrag $= \frac{Kp\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{100\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]}$.

Andeutung. Bezeichnet man den jährlichen Abtrag durch x, so hat man für den Stand des Kapitals

am Ende des 1ten Jahres $= K + \frac{Kp}{100} - x$
$= K\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x$

am Ende des 2ten Jahres =

$$\left\{K\left(1+\frac{p}{100}\right)-x+\left[K\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right]\frac{p}{100}\right\}-x=$$

$$K\left(1+\frac{2p}{100}+\frac{p^2}{100^2}\right)-x\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=$$

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{p}{100}\right)-x,$$

am Ende des 3ten Jahres =

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^3-x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{p}{100}\right)-x \text{ u. s. w.}$$

am Ende des nten Jahres =

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-x\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}-\ldots-x\left(1+\frac{p}{100}\right)-x$$

$$=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-x\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+\ldots\left(1+\frac{p}{100}\right)+1\right]$$

$$=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-x\,\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)-1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)-1} \quad [\S.\ 199\ (2)]$$

$$=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-x\,\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}{\frac{p}{100}}.$$

Setze diesen Ausdruck = 0 und bestimme hieraus x.

$$27)\ K=\frac{r\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right]}{\frac{p}{100}}.$$

Andeutung. Stand der Schuld am Ende des 1ten Jahres =

$$K+\frac{K\cdot p}{100}-\left(r+\frac{K\cdot p}{100}\right)=K-r.$$

am Ende des zweiten Jahres =

$$K-r+(K-r)\frac{p}{100}-\left(r+\frac{K\cdot p}{100}\right)=$$

$$K-r\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\right],$$

am Ende des 3ten Jahres =

$$K-r\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]+\left\{K-r\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]\right\}\frac{p}{100}-\left(r+\frac{K\cdot p}{100}\right)=$$

$$K-r\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right]$$

. . . .

am Ende des nten Jahres =

$$K - r\left[1 + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}\right]$$

$$= K - \frac{r\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]}{\frac{p}{100}}.$$

Setze diesen Ausdruck Null ꝛc.

Zehnter Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Progressionen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

---

§. 205.

1) 1153,484 fl.

2) 3348,62 fl.

Andeutung. $K = k \,.\, 1{,}0p^n = 19091{,}42$ fl.
$k = 8746$ „

Zins und Zinseszinsen = 10345,42 fl.
Einfacher Zins von 8746 fl. = 6996,8 „

Zinseszinsen allein = 3348,62 fl.

3) 9939,01 fl.

4) Zu 27568 fl. 52 kr.

5) 20 Jahre.

6) Nach 10 Jahren.

7) $8\frac{3}{4}$ Jahre.

Andeutung. $7800 \,.\, 1{,}05^n = 6450 \,.\, 1{,}045^{14}$.

8) Etwas über 14 Jahre und 2 Monate.

9) 5510,13 fl.

10) 8336,132 fl.

Andeutung. $k \,.\, 1{,}045^8 = 8425 \,.\, 1{,}05^7$.

11) 7834,93 fl.

Andeutung. $k \,.\, 1{,}05^{14} = (k + 3500)\, 1{,}04^8$.

12) Zu 5%.

Andeutung. Vergl. §. 204. Beispiel 5.

13) Zu 4%.

14) 2844,3 fl.

Andeutung. $[(3450 \,.\, 1{,}05^3 - 840)\, 1{,}05^2 - 1020]\, 1{,}05^3 = ?$

15) 8%.

16) Baar bot A 34500 fl., B 34596,18 fl., C 33536,79 fl.; also hat B am meisten geboten.

17) 5991,66 fl.

Andeutung. $k = \frac{K}{1,0p^n}$.

18) 913,3 fl.

Andeutung. $k = \frac{700}{1,045^5} + \frac{500}{1,045^8}$.

19) Zu 5%.

20) Zwischen 19 und 20 Jahren.

Andeutung. $5k = k \,.\, 1,04^n \,.\, 1,045^n$.

21) Nach 7 Jahren.

Andeutung. $\left(\frac{250}{1,04^3} + \frac{380}{1,04^5} + \frac{500}{1,04^7} + \frac{720}{1,04^{10}}\right) 1,04^n = 250 + 380 + 500 + 720.$

22) Nach 9 Jahren 8 Monaten.

Andeutung. $\left(\frac{500}{1,05^4} + \frac{300}{1,05^6} + \frac{300}{1,05^9} + \frac{1000}{1,05^{10}} + \frac{1400}{1,05^{12}}\right) \,.\, 1,05^x = 4000.$

23) Nach $\frac{1}{\log 1,0p}\left[\log(k_1 + k_2 \ldots . + k_n) - \log\left(\frac{k_1}{1,0p} + \frac{k_2}{1,0p^2} + \ldots + \frac{k_n}{1,0p^n}\right)\right]$ Jahren.

Andeutung. Vergl. 21 und 22.

24) 18923 Seelen.

25) Nach 20 Jahren.

26) Nach 70 Jahren.

27) Um 2,79%.

28) 18575,35 Klafter.

29) Etwas über 9 Jahre.

30) 2,697%.

31) Nahezu 19 Jahre lang.

32) 25784,16 Klafter.

33) Das 60te.

Andeutung. $\frac{220 \,.\, 15}{1,04^{60}} > \frac{260 \,.\, 18}{1,04^{80}}$.

34) 3675 fl. 28 kr.

Andeutung. Nach §. 204. a.

35) Zu 5%.

Andeutung. Bestimme nach §. 204. a den Zinsfuß p.

§. ~~219.~~ 220

1) 2082 fl. 15 kr.

Andeutung. Vergl. §. 207. Beispiel 1.

2) 16879 fl. 25 kr.

3) 21960 fl.

4) 7032,05 fl.

5) 950 fl.

Andeutung. Vergl. §. 207. Beispiel 2.

6) Nach 12 Jahren.

Andeutung. Vergl. §. 207. Beispiel 4.

7) 136,43 fl.

Andeutung. Nach §. 207, Zus. ist

$$5500 = \frac{r \,.\, 1{,}035\,(1{,}035^{25} - 1)}{0{,}035} \text{ u. s. w.}$$

8) 2139 fl. 39 kr.

Andeutung. Nach §. 208 ist

$$K = \frac{200\,(1{,}04^{16} - 1)}{1{,}04^{2} - 1}.$$

9) 6488 fl. 42 kr.

Andeutung. Vergl. §. 209. Beispiel 1.

10) 28734,6 Klafter.

11) 1419,02 fl.

Andeutung. Vergl. §. 209. Beispiel 2.

12) 558682,9 fl.

Andeutung. Nach §. 209 ist $r = \frac{6000000 \,.\, 0{,}045 \,.\, 1{,}045^{15}}{1{,}045^{15} - 1}$.

13) 387,757 fl.

14) 4974341 fl.

Andeutung. Nach §. 209 ist $k = \frac{350000\,(1{,}035^{20} - 1)}{1{,}035^{20} \,.\, 0{,}035}$.

15) 1897,35 fl.

Andeutung. Setze nach §. 209

$$20000 \,.\, 1{,}045^{15} = \frac{r\,(1{,}0425^{15} - 1)}{0{,}0425} \text{ u. s. w.}$$

16) 41 Jahre.

Andeutung. Vergl. §. 209. Beisp. 4.

17) Nach 9 Jahren.

18) Nahezu 33 Jahre lang.

19) 12 Jahre lang.

20) Nach 41 Jahren.

21) 1580,73 fl.

Andeutung. Vergl. §. 210. Beisp. 1.

22) 2796,36 fl.

Andeutung. Nach §. 210 b. ist

$$K = 1000 \cdot 1{,}04^{10} - \frac{1000\,(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04} \text{ u. s. w.}$$

23) 7945,1 Klafter.

Andeutung. Vergl. Aufg. 22.

24) 11209 fl. 30 kr.

25) Zwischen dem 11ten und 12ten Jahre.

Andeutung. Vergl. §. 210. Beisp. 2.

26) 2124,916 Klafter.

Andeutung. Vergl. §. 210. Beisp. 3.

27) 23905 fl.

Andeutung. Nach §. 211 ist $k = \frac{2400\,(1{,}04^{16} - 1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{4+16}}$.

28) 1503,24 fl.

Andeutung. Nach §. 212 ist $k = \frac{500\,(104^{3 \cdot 4} - 1)}{1{,}04^{3 \cdot 4}\,(1{,}04^{3} - 1)}$.

29) 1933 fl 20 kr.

Andeutung. Nach §. 213 ist $k = \frac{100 \cdot 87}{4\frac{1}{2}}$.

30) 359,257 fl.

Andeutung. Nach §. 215 $= \frac{250}{1{,}045^{12} - 1}$.

31) 29967,83 fl.

Andeutung. Nach §. 216. Zus. wird

$$k = \frac{2850}{0{,}045 \cdot 1{,}045^{17}} \text{ u. s. w.}$$

32) 608,528 fl.

Andeutung. Nach §. 209 ist der baare Werth der ersten

$$\text{Tilgungsweise} = \frac{400\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{10}},$$

$$\text{der der zweiten} = \frac{r\,(1{,}05^{6} - 1)}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{6}}.$$

Setze beide einander gleich und bestimme hieraus r.

33) 733,66 fl.

Andeutung. Vergl. die Andeutung zu Nr. 32.

34) 4683,98 fl.

Andeutung. $25500 \cdot 1{,}02^{15} \cdot 1{,}02^{8} = \frac{r\,(1{,}02^{8} - 1)}{0{,}02}$.

35) 1784,48 fl.

Andeutung. $k = \frac{240\,(1\,04^{15} - 1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{9}} - \frac{240\,(1{,}04^{6} - 1)}{0{,}04} = \frac{240\,(1{,}04^{9} - 1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{9}}$.

36) 3209,366 fl.

Andeutung. Reducirt man alle Zahlungen auf deren baaren Werth, so wird der Baarwerth der Schuld

$$\frac{800}{1,04^5} + \frac{700}{1,04^7} + \frac{500}{1,04^{10}} + \frac{400\,(1,04^8 - 1)}{0,04\,.\,1,04^{20}}.$$

37) Nach Verlauf von 15 Jahren.

Andeutung. $150000\,.\,1,04^n = \frac{13491,16\,(1,04^n - 1)}{0,04}$.

38) Nach 33 Jahren $1\frac{1}{2}$ Monat.

Andeutung. Jährlich werden im Ganzen $5\frac{1}{2}$%, also 330000 fl. abgetragen; folglich ist

$$6000000\,.\,1,04^n = \frac{330000\,(1,04^n - 1)}{0,04}.$$

Führt man für $n = 33$ ein, so findet man, daß zu Anfang des 34. Jahres die Schuld noch 41155 fl. beträgt.

39) $46\frac{3}{4}$ Jahr.

Andeutung. $8000\,.\,1,05^n - 10000 = \frac{450\,(1,045^n - 1)}{0,045}$.

40) 1946,64 fl.

Andeutung. Reducirt man die Leistungen auf den Tag, wo A 30 Jahre alt wird, so folgt:

$$\frac{r\,(1,035^{12} - 1)}{0,035} = \frac{2000\,(1,035^{20} - 1)}{0,035\,.\,1,035^{20}}.$$

41) 389,488 fl.

Andeutung. Die Summe wächst bis zum Ende des 15ten Jahres nach §. 207. Zus. an zu $\frac{r\,.\,1,04\,(1,04^{15} - 1)}{0,04}$ und die 1000 fl. sind zu dieser Zeit werth $\frac{1000\,(1,04^{10} - 1)}{0,04\,.\,1,04^{10}}$. Bilde nun eine Gleichung &c.

42) 301,168 fl.

Andeutung. Werth der Rente r am Ende des 30. oder Anfang des 31. Jahres $= \frac{r\,.\,1,035\,(1,035^{15} - 1)}{0,035} = w$. Werth von w am Ende des 49. oder Anfang des 50. Jahres $= w\,.\,1,035^{19}$. Werth der Rente von 1000 fl. zu Anfang des 50ten Jahres $= \frac{1000\,.\,1,04\,(104^{15} - 1)}{0,04\,.\,1,04^{15}}$. Bilde nun eine Gleichung &c.

43) $r' = \frac{r\,(1,0p^n - 1)\,1,0p^{n'+m-n}}{(1,0p^{n'} - 1)}$.

Andeutung. Reducirt man beide Renten auf den Baarwerth, so erhält man:

$$\frac{r'\,(1,0p^{n'} - 1)}{0,0p\,.\,1,0p^{n'}\,.\,1,0p^m} = \frac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p\,.\,1,0p^n}.$$

44) 1427,46 fl.

Andeutung. Reducire beide Renten auf den baaren Werth, so folgt:

$$\frac{1600\,(1,04^{15} - 1)}{0,04\,.\,1,04^{15}} = \frac{r\,(1,05^{20} - 1)}{0,05\,.\,1,05^{20}} \text{ \&c.}$$

45) 1974 fl. 35 kr.

Andeutung. Vergl. die Andeutung zu Nr. 44.

46) A bot baar 38914,32 fl., B 38462,7 fl., C 35780,31 fl.; also ist das Gebot des A am vortheilhaftesten.

Andeutung. Reducire sämmtliche Gebote auf den gegenwärtigen Werth.

47) Bestand $= \frac{1}{0,0p}\,[1,0p^{n-1}\,(k\,.\,0,0p - r\,.\,1,0p) + r]$.

Andeutung. Da sogleich r Klafter gefällt werden, so stehen zu Anfang noch (k — r) Klafter und diese wachsen bis zum Anfange des nten Jahres oder in (n — 1) Jahren an zu (k — r) $1,0p^{n-1}$. Da nun zu Anfang des 2ten Jahres u. s. f. bis incl. zum Anfange des nten Jahres, oder (n — 1) Jahre lang r Klafter geschlagen werden, so ist der Bestand nach dem nten Schlage =

$$(k - r)\,1,0p^{n-1} - \frac{r\,(1,0p^{n-1} - 1)}{0,0p} \text{ ꝛc.}$$

48) a) Jährliche Zahlung = 23,2638 fl.
b) Ablösungssumme = 581,596 fl.

Andeutung. a) Setze nach §. 207 $\frac{x\,(1,04^{38} - 1)}{0,04} = 2000$.

b) Nach §. 215 ist das Ablösungskapital $= \frac{2000}{1,04^{38} - 1}$ ꝛc.

49) Nach $\frac{\log n + \log 0,0p + n \log 1,0p - \log(1,0p^n - 1)}{\log 1,0p}$ Jahren.

Andeutung. Bezeichnet x die betreffende Anzahl von Jahren, so ist der Baarwerth der Schuld $s = \frac{\frac{s}{n}\,(1,0p^n - 1)}{0,0p\,.\,1,0p^n}$ und der Baarwerth der nach x Jahren zu leistenden Summe $= \frac{s}{1,0p^x}$. Setze beide Ausdrücke einander gleich und bestimme hieraus x.

50) Schuldsumme $= \frac{r\,.\,1,0p\,(1,0p^{n-1} - 1) + r'\,.\,0,0p}{0,0p\,.\,1,0p^n}$.

Andeutung. Baarer Werth der Jahreszahlungen =

$$\frac{r\,(1,0p^{n-1} - 1)}{0,0p\,.\,1,0p^{n-1}};$$

baarer Werth der letzten Zahlung $= \frac{r'}{1,0p^n}$. Addire beide ꝛc.

51) 188 fl. 12 kr.

Andeutung. A hat in den 3 Jahren $\frac{500\,(1,04^3 - 1)}{0,04}$ bezahlt und da er hiervon während der zwei darauf folgenden Jahre die Zinsen verliert, so hat er im Ganzen einen Beitrag von $\frac{500\,(1,04^3 - 1)\,1,04^2}{0,04}$ geleistet. Er erhält aber nur 1500 fl. zurück, folglich verliert er

$$\frac{500\,(1,04^3 - 1)\,1,04^2}{0,04} - 1500.$$

52) $\frac{r\,(1{,}0p^m - 1)}{0{,}0p}$.

Andeutung. Drücke beide Rentenbezüge nach §. 207 und §. 208 aus und setze die gefundenen Ausdrücke einander gleich.

53) $r = \frac{1{,}0p' \,.\, r'\,(1{,}0p'^{n'} - 1)\; 0{,}0p}{1{,}0p^{m+n'+1}\,(1{,}0p^n - 1)\; 0{,}0p'}$.

Andeutung. Die Bank empfängt in n Jahren $\frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ und verwerthet diese Summe noch $(m + n')$ Jahre, wodurch dieselbe anwächst zu $\frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \,.\, 1{,}0p^{m+n'}$. Die Gegenleistung der Bank beträgt aber $\frac{r' \,.\, 1{,}0p'\,(1{,}0p'^{n'} - 1)}{0{,}0p'}$. Folglich ist

$$\frac{r \,.\, 1{,}0p^{m+n'+1}\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} = \frac{r' \,.\, 1{,}0p'\,(1{,}0p'^{n'} - 1)}{0{,}0p'} \text{ ꝛc.}$$

54) 1580,3 fl.

Andeutung. Baarwerth der 4procent. Rente $= \frac{1500\,(1{,}04^{25} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{25}}$;

Baarwerth der $4^1/_2$ procentigen $= \frac{r \,.\, (1{,}045^{25} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{25}}$. Setze beide Werthe einander gleich und bestimme alsdann r.

55) 4457,894 fl.

Andeutung. Am Ende des vierten Jahres beträgt seine Sparkasseneinlage $\frac{84\,(1{,}03^4 - 1)}{0{,}03} = 2800 \,.\, 1{,}03^4 - 2800$, folglich bleiben nach der Wegnahme noch $2800 \,.\, 1{,}03^4 - 3050$. Die jährliche Einlage ist von nun an $= 85 + 12{,}5 = 96{,}5$ und der sich noch in der Sparkasse befindende Rest wächst bis zum Ende des 20. Jahres an zu

$$(2800 \,.\, 1{,}03^4 - 3050)\; 1{,}03^{16}.$$

Der Vermögensstand ist demnach am Ende des 20. Jahres

$$= 2100 + 250 + (2800 \,.\, 1{,}03^4 - 3050)\; 1{,}03^{16} + \frac{96{,}5\,(1{,}03^{16} - 1)}{0{,}03} \text{ ꝛc.}$$

56) 13997,128 fl.

Andeutung. Baarwerth der Unterhaltungskosten des Altbaues

$$= \frac{50\,(1{,}04^{32} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{32}} = b_1;$$

Baarwerth der Hauptreparaturen des Altbaues in 24 Jahren nach §. 212

$$= \frac{250\,(1{,}04^{24} - 1)}{(1{,}04^8 - 1)\; 1{,}04^{24}} = b_2;$$

Baarwerth des ersten Neubaues $= \frac{42000}{1{,}04^{32}} = b_3$;

Baarwerth aller folgenden Neubauten nach §. 215 und §. 204

$$= \frac{42000}{(1{,}04^{200} - 1)\; 1{,}04^{32}} = b_4;$$

Baarwerth der Unterhaltungskosten vom ersten Neubau an nach §. 213 und §. 204 $= \frac{100 \,.\, 100}{4 \,.\, 1{,}04^{32}} = b_5$;

Stiftungskapital $= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 =$
893,6776 fl. + 413,68 fl. + 11972,43 fl. + 4,6956 fl. + 712,645 fl. ꝛc.

57) 1) Ursprüngliche Kapitalanlage = 27180,5 fl.,
2) Rente = 2058,455 fl.,
3) Erbsumme = 12129,86 fl.

Andeutung. 1) Kapitalanlage $= \frac{2000\,(1,04^{20} - 1)}{0,04\,.\,1,04^{20}}$.

2) Um den Werth der umgewandelten Rente zu berechnen, bestimme man den baaren Werth der 4procentigen Rente von 12jähriger Dauer und setze diesen dem baaren Werthe der $4\frac{1}{2}$procentigen Rente von gleicher Dauer gleich. Man erhält

$$\frac{2000\,(1,04^{12} - 1)}{0,04\,.\,1,04^{12}} = \frac{r\,.\,(1,045^{12} - 1)}{0,045\,.\,1,045^{12}},$$

woraus r gefunden werden kann.

3) Die Erbsumme wird gefunden, wenn man den baaren Werth der $4\frac{1}{2}$procentigen Rente r von 7jähriger Dauer berechnet. Man erhält dafür

$$\frac{r\,(1,045^7 - 1)}{0,045\,.\,1,045^7}.$$

58) $n = \frac{\log\,(S\,.\,0,0p + a) - \log a}{\log 1,0p}$.

Andeutung. Die Aufgabe ist dieselbe, als wenn gefragt wäre: Nach wie viel Jahren ist eine Jahresrente a gleich der Summe S? Man hat somit nur aus der Gleichung

$$S = \frac{a\,(1,0p^n - 1)}{0,0p}$$

den Werth von n zu bestimmen.

Man kommt zu diesem Resultate aber auch auf folgendem entwickelnden Wege:

Nach dem ersten Jahre ist die Schuld

$$S_1 = S - a.$$

Nach dem zweiten Jahre

$$S_2 = S_1 - a - \frac{ap}{100} = S_1 - a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$
$$= S_1 - a\,.\,1,0p = S - a\,(1 + 1,0p).$$

Nach dem dritten Jahre

$$S_3 = S_2 - a - \frac{a\,(1 + 1,0p)\,p}{100}$$
$$= S_2 - a\,(1 + 0,0p + 1,0p\,.\,0,0p)$$
$$= S_2 - a\,.\,1,0p\,(1 + 0,0p) = S_2 - a\,.\,1,0p^2$$
$$= S - a\,(1 + 1,0p) - a\,.\,1,0p^2$$
$$= S - a\,(1 + 1,0p + 1,0p^2)\ \text{u. s. w.}$$

Also wird

$$S_n = S - a\,(1 + 1,0p + 1,0p^2 + \ldots + 1,0p^{n-1})$$
$$= S - \frac{a\,(1,0p^n - 1)}{0,0p} = 0,$$

folglich $S = \frac{a(1,0p^n - 1)}{0,0p}$.

59) Kapitalanschlag = 394 fl. 51 kr.

Andeutung. Für den Reädificationsbetrag r findet man aus der Gleichung $8540 = \frac{r\,(1,025^{100} - 1)}{0,025}$

r = 19,7432 fl.; also ist der Kapitalanschlag der Baulast

$$= \frac{100\,.\,19,7432}{5} = 394\ \text{fl. } 51\ \text{kr.}$$

60) 3675,456 fl.

Andeutung. Bei einer 100jähr. Dauer beträgt das Entschädigungskapital für den Neubau 18,4948 . 20 = 369,896 fl.; denn die Entschädigungsrente beläuft sich auf 18,4948 fl. (vergl. Nr. 59), da solche in 100 Jahren bei $2\frac{1}{2}$ proc. Zinsfuß zu 8000 fl. anwächst. Zu Anfang der 100 Jahre wäre die Entschäd. also $\frac{18,4948 \cdot 100}{5} = 369,896$ fl. In 20 Jahren ist der Betrag der Entschädigungsrente von 18,4948 fl. erst $\frac{18,4948\,(1,025^{20} - 1)}{0,025} = 472,447$ fl., also ein Minderbetrag von 7527,553 fl. vorhanden. Der Lastenübernehmer muß somit durch ein Kapital entschädigt werden, das in 20 Jahren bei 5 proc. Zinsen und $2\frac{1}{2}$ proc. Zinseszinsen zu 8000 + 369,896 = 8369,896 fl. anwächst. Bezeichnen wir dieses Kapital durch x, so muß also sein

$$x + \frac{\frac{5x}{100}\,(1,025^{20} - 1)}{0,025} = 8369,896,$$

woraus folgt $x = 3675,456$ fl.

Diese 3675,456 fl. wachsen nämlich wieder bei 5 procent. Zinsen und $2\frac{1}{2}$ proc. Zinseszinsen in 20 Jahren zu 8369,896 fl. an, wovon 8000 fl. zum Neubau verwendet werden und die übrigen 369,896 fl. in je 100 Jahren an Zinsen und Zinseszinsen ebenfalls 8000 fl. liefern.

61) 714,82 fl.

Andeutung. Kapitalanschlag zur Unterhaltung des Neubaues

$$= \frac{100 \cdot 30}{5} = 600 \text{ fl.}$$

Die Unterhaltung des Neubaues erfordert 10 fl. mehr, und man hat somit noch das vorige Kapital um ein anderes zu vermehren, dessen gegenwärtiger Werth einer 50 Jahre lang zu beziehenden nachschüssigen Rente von 10 fl. bei 4% Zinsen gleich ist. Man findet dafür

$$\frac{10\,(1,04^{50} - 1)}{0,04 \cdot 1,04^{50}} = 214,82 \text{ fl.}$$

Der ganze Kapitalanschlag ist somit

$$= 600 \text{ fl.} + 214,82 \text{ fl.} = 814,82 \text{ fl.}$$

62) 766,17144 fl.

Andeutung. Baarwerth der Unterhaltungskosten des jetzigen Gebäudes

$$= \frac{100 \cdot 35,2}{5} = 704 \text{ fl.}$$

Nach 35 Jahren ist derselbe

$$= \frac{100 \cdot 47\frac{7}{15}}{5} = 949\tfrac{1}{3} \text{ fl.}$$

Die letzteren sind also um $245\frac{1}{3}$ fl. größer als die ersten. Der Baarwerth von $245\frac{1}{3}$ fl. bei 4% Zins und Zinseszins für 35 Jahre ist aber

$$= \frac{245\frac{1}{3}}{1,04^{35}} = 62,17144 \text{ fl.}$$

folglich beträgt der Kapitalanschlag

$$704 \text{ fl.} + 62,17144 \text{ fl.} = 766,17144 \text{ fl.}$$

63) 2469 fl. 56 kr.

Andeutung. Für den Reädificationsbetrag einer Bausumme von 7622 fl. in 110 Jahren erhält man aus der Gleichung

$$7622 = \frac{r\,(1{,}025^{110} - 1)}{0{,}025}$$

$$r = 13{,}49246 \text{ fl.}$$

Dieser Betrag liefert in 30 Jahren

$$\frac{13{,}49246\,(1{,}025^{30} - 1)}{0{,}025} = 592{,}358 \text{ fl.}$$

Nach 30 Jahren fehlen somit an der aufzuwendenden Bausumme noch 7622 fl. — 592,358 fl. = 7029,642 fl. Man hat daher eine Summe zu suchen, welche bei 5 proc. Zinsen und $2\frac{1}{2}$ proc. Zinseszinsen nach 30 Jahren 7029,642 fl. liefert. Man findet dafür aus der Gleichung

$$x + \frac{\frac{5x}{100}\,(1{,}025^{30} - 1)}{0{,}025} = 7029{,}642$$

$$x = 2200{,}1 \text{ fl.}$$

Also ist der Kapitalanschlag der Baulast

$$= 2200{,}1 + \frac{100\,.\,13{,}49246}{5} = 2469{,}9492 \text{ fl.}$$

64) 22,56 fl.

Andeutung. Der Reädificationsbetrag, um in 150 Jahren 10500 fl. zu erhalten, wird 6,627868 fl.; diesem Betrag entspricht ein Kapitalanschlag von 20 . 6,627868 = 132,55736 fl. Da aber die Dauer des jetzigen Gebäudes um 50 Jahre länger ist, so ist der entsprechende Kapitalanschlag gleich einer Summe, welche in 50 Jahren mit 5 proc. Zinsen und $2\frac{1}{2}$ proc. Zinseszinsen zu 132,55736 fl. anwächst. Man findet analog wie in Aufgabe 63 dafür x = 22,56585 fl., was zugleich der fragliche Kapitalanschlag der Baulast ist; denn diese Summe liefert wieder in 50 Jahren bei 5 proc. Zinsen und $2\frac{1}{2}$ proc. Zinseszinsen 132,556 fl. und der 5 proc. Zins hiervon oder 6,6278 fl. liefert mit Zins und Zinseszins zu $2\frac{1}{2}\%$ nach je 150 Jahren die Bausumme von 10500 fl.

65) 127221 fl.

Andeutung. Baarwerth nach §. 209 und 214

$$= \frac{10000\,(1{,}04^{12} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{22}} + \frac{100\,.\,12000}{4\,.\,1{,}04^{22}}$$

66) 4951,55 fl.

Andeutung. Baarwerth =

$$\frac{400\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{27}} + \frac{600\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{52}} + \frac{100\,.\,300}{4\,.\,1{,}04^{64}}.$$

67) Baarwerth $= \dfrac{100r}{1{,}0p^{n-1}\,.\,p} = \dfrac{r}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p}$.

68) Bestand $= \dfrac{100}{p}\,[r - 1{,}0p^{n-1}\,(1{,}0p\,.\,r - 0{,}0p\,.\,k)]$.

Andeutung. Setze in §. 210 k — r statt k und n — 1 statt n.

69) 1796,3 Klafter.

Andeutung. Vergl. Aufgabe 68. Man hat

$$(26500 - r)\,1{,}02^{9} - \frac{r\,(1{,}2^{9} - 1)}{0{,}02} = 12000.$$

70) Nach dem 13ten Hiebe.

Andeutung. Nach Aufgabe 68 ist

$$0 = \frac{100}{1,5}\,[2500 - 1,015^{n-1}\,(1,015 \,.\, 2500 - 0,015 \,.\, 30000)].$$

71) Baarwerth $= \dfrac{r \,.\, 1,0p\,(1,0p^n - 1)}{0,0p\,(1,0p^{2n} - 1)}$.

Andeutung. Werth der ersten ertragsfähigen Periode zu Anfang derselben nach §. 207 Zus.

$$= \frac{r \,.\, 1,0p\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^n} = \frac{r \,.\, (1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{n-1}},$$

also der gegenwärtige Werth

$$= \frac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{2n-1}}.$$

Gegenwärtiger Werth der zweiten ertragsfähigen Periode

$$= \frac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{4n-1}},$$

der dritten $= \dfrac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{6n-1}}$ u. s. w.

Gegenwärtiger Werth des Waldes

$$= \frac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{2n-1}}\left(1 + \frac{1}{1,0p^{2n}} + \frac{1}{1,0p^{4n}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{r\,(1,0p^n - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{2n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1,0p^{2n}}} \text{ u. s. w.}$$

72) $K = \dfrac{r}{0,0p \,.\, 1,0p^{n-1}}\left[\dfrac{1,0p^n - 1}{0,0p} - \dfrac{n}{1,0p}\right].$

Andeutung. $K = \dfrac{r}{1,0p} + \dfrac{2r}{1,0p^2} + \dfrac{3r}{1,0p^3} + \ldots + \dfrac{nr}{1,0p^n}.$

Um diese Reihe zu summiren, multiplicire man beiderseits mit 1,0p und subtrahire dann obige Gleichung von der zweiten. Man erhält:

$$K \,.\, 1,0p - K = r\left(1 + \frac{1}{1,0p} + \frac{1}{1,0p^2} + \ldots + \frac{1}{1,0p^n}\right) - \frac{nr}{1,0p^n} \text{ u. s. w.}$$

73) 15210,92 fl.

Andeutung. Ersparniß $= \dfrac{500\,(1,02^{24} - 1)}{1,02 - 1}$.

74) 1750,818 fl.

Andeutung. Nach §. 212.

75) Baarwerth $= \dfrac{r\,(1,0q^{2n} - 1)}{(1,0q^2 - 1)\,1,0q^{2n}}$, wenn $\dfrac{p}{2} = q$ gesetzt wird.

Andeutung. Baarwerth =

$$\frac{r}{1,0q^2} + \frac{r}{1,0q^4} + \ldots + \frac{r}{1,0q^{2n}} \text{ u. s. w.}$$

76) Die zweite Art, da er jährlich 5,1885 fl. weniger bezahlt.

Andeutung. Für die erste Art findet man aus der Gleichung

$$35000 = \frac{r\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04}$$

r = 1747,937 fl.; für die zweite aus der Gleichung

$$35000 = \frac{r'\,(1{,}02^{30} - 1)}{0{,}02}$$

r' = 862,7468 fl.

Rechnet man man hierzu den halbjährlichen Zins, so zahlt er im zweiten Falle jährlich

$$862{,}7468\,.\,2 + \frac{862{,}7468\,.\,4}{100\,.\,2} = 1742{,}7485 \text{ fl.}$$

77) Baarer Werth = 21277,8 fl.

Andeutung. Baarer Werth $= \frac{800\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{15}} + \frac{900\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{30}}$

$$+ \frac{1050\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{45}} + \frac{1200\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{60}} + \frac{400}{0{,}04\,.\,1{,}04^{60}}.$$

78) 372,308 fl.

Andeutung. Werth der Einnahmen des ersten Umtriebes am Ende desselben

$$120\,.\,1{,}04^{6} + 200\,.\,1{,}04^{30} + 1500 = \quad 3411{,}034 \text{ fl.}$$

Werth aller folgenden Einnahmen zu dieser Zeit

$$= \frac{3411{,}034}{1{,}04^{90} - 1} = \quad 102{,}992 \text{ „}$$

Summe = 3514,026 fl.

Werth der Ausgaben des ersten Umtriebes am Ende desselben $= 20\,.\,1{,}04^{90} + \frac{1{,}2\,(1{,}04^{90} - 1)}{0{,}04} =$ 1675,966 fl.

Werth aller folgenden Ausgaben zu derselben Zeit

$$= \frac{1675{,}966}{1{,}04^{90} - 1} = \quad 50{,}604 \text{ „}$$

Summe = 1726,570 fl.

Ueberschuß der Einnahmen = 1787,456 fl.

$$\text{Baarwerth} = \frac{1787{,}456}{1{,}04^{40}} = 372{,}308 \text{ fl.}$$

79) 14674,7 fl.

Andeutung. Bestimme zuerst den Werth sämmtlicher Einnahmen am Ende des ersten Umtriebes und reducire hierauf den Betrag auf die Gegenwart.

80) 12425,37 fl.

Andeutung. A. Baarwerth der Einnahmen:

a) aus der ersten Abtheilung =

$$\frac{140\,(1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{18}} + \frac{160\,(1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{36}} + \frac{200\,(1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{54}} +$$

$$\frac{250\,(1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{72}} + \frac{280\,.\,100}{4\,.\,1{,}04^{72}} = 4185{,}355 \text{ fl.}$$

b) aus der zweiten Abtheilung =

$$\frac{450\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{30}}+\frac{400\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{60}}+\frac{420\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{90}}+$$

$$\frac{460\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{120}}+\frac{500\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{150}}+\frac{550\,.\,100}{4\,.\,1{,}04^{150}}=10953{,}964 \text{ fl.}$$

c) aus der dritten Abtheilung =

$$\frac{120\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{30}}+\frac{150\,.\,100}{4\,.\,1{,}04^{30}}+\frac{50\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{30}}+\frac{60\,(1{,}04^{30}-1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{60}}$$

$$+\frac{85\,(1{,}04^{30}-1}{0{,}04\,.\,1{,}04^{90}}+\frac{110\,.\,100}{4\,.\,1{,}04^{90}}=4636{,}057 \text{ fl.}$$

Baarwerth aller Einnahmen = 19775,37 fl.

Baarwerth aller Ausgaben $=\frac{294\,.\,100}{4}=$ 7350 „

Baarwerth des Distrikts = 12425,37 fl.

81) 16680 fl.

82) 212408 fl.

Druckfehler.

Seite 6 Zeile 3 v. o. lies — 3xy statt 3xy.

„ 7 „ 2 v. o. „ 26 „ 25.

„ 11 „ 15 v. o. „ $-\frac{473}{864}$ „ $-\frac{473}{868}$.

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.

$$\sqrt[\frac{a}{b}]{m} =$$

$$m : b = c\frac{e}{m}$$

$$c\frac{e}{m} : (e+r)$$

$$c\frac{e}{m} : (e+r)$$

$$\sqrt[-\frac{a}{b}]{m} = \sqrt[-\frac{a}{b}]{m}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \ldots$$

$$2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 = 2\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$a^4 - 16b^4 : a + 2b = a^3 - 2a^2b + 4ab^2 - 8b^3$

$a^4 + 2a^3b$

$-16b^4 - 2a^3b$

$a - b$ $\quad -2a^3b \quad -4a^2b^2$ $\quad a : m$

$-4a^2b^2 - 16b^4$ $\quad a \cdot \frac{1}{m}$

$a^4 - 16b^4 \quad -4a^2b^2 - 8ab^3$

$-8ab^3 - 16b^4$

$b > b - c \quad 8ab^3 - 16b^4$

$> b - c \quad b = a + r$

$-r > b - c$

$a - b > b - c \quad a - a - r > b - c$

$-r > b - b - r$

$-r > -r$

$a^4 - 16b^4 : a + 2b = a^3 - 2a^2b + 4ab^2 - 8b^3$

$a^4 + 2a^3b$ $\quad a - b > b - c$

$-2a^3b - 16b^4$ $\quad a \cdot \frac{1}{m}$

$-2a^3b - 4a^2b^2$

$10 - 12 > 12 - 11$

$4a^2b^2 - 16b^4$ $\quad -2 > 1$

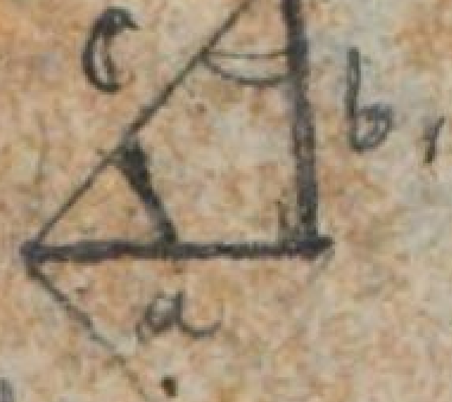
$4a^2b^2 \pm 8ab^3$ $\quad a : x = a \cdot \frac{1}{x}$

$2a$

$1 = a\sqrt{2}$

$8ab^3 - 16b^4$ $\quad a \cdot \frac{m}{1}$

$8ab^3 - 16b^4 \quad \sin(\alpha + \beta) =$



$\frac{1}{1} : \frac{1}{a^{mn}} = \frac{a^{mn}}{1} =$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = 1$

$\sin(2x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$

$\frac{a}{c}$

$2 \sin x \cos x$

$1 = 2 \sin x \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$4 \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$

$4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha$